ATELIER B

Titre : Fractions et décimaux : analyse de manuels

Auteurs : Gaby LE POCHE (IUFM de Rennes),
Pascale MASSELOT (IUFM de Versailles),
Claire WINDER (IUFM de Nice)

Date : décembre 2005 (Blois).

Résumé Au cours de cet atelier, les participants sont amenés à analyser des manuels de quatre collections : " Cap Maths " (Hatier), " Nouvel Objectif Calcul " (Hatier), " Diagonale " (Nathan) et " J'apprends les maths " (Retz) de CM1 et CM2, selon certaines entrées choisies par les animateurs.

1. PRESENTATION DE L'ATELIER

Pour découvrir les deux manuels d'une même collection, l'analyse s'effectue en deux temps : tout d'abord une appropriation de la progression générale sur le thème proposé dans un niveau (CM1 ou CM2 de la collection), puis un " zoom " concernant plus particulièrement les situations amenant à la comparaison des fractions et des nombres décimaux à travers les deux niveaux (CM1 et CM2).

Pour la mise en œuvre de cette démarche, le premier travail d'analyse concerne des groupes de deux personnes, à raison d'un niveau dans une collection donnée par groupe (soit quatre fois 2 groupes : P1 et P2 pour le CM1 et P'1 et P'2 pour le CM2). Le second temps d'analyse s'effectue sur une même collection, par deux groupes de deux personnes en parallèle : chacun de ces binômes est composé d'une personne ayant analysé le manuel de CM1 et d'une personne ayant analysé celui de CM2 (P1 et P'1 d'une part et P2 et P'2 d'autre part).

Cette organisation " croisée " permet d'abord un gain de temps puisque chaque personne analyse un seul niveau, puis induit des échanges plus riches lors de la mise en commun (par des analyses complémentaires des deux groupes).
À terme, si cette organisation semble efficace, la richesse du champ étudié ici s'est avérée être un facteur pénalisant pour permettre une analyse approfondie des manuels proposés, d'où une certaine frustration chez les participants...

L'atelier s'est déroulé en quatre phases. Tout d'abord, une première phase a consisté en une présentation d'une classification des approches concernant le champ des fractions et des décimaux d'une part, puis de la grille d'analyse, s'appuyant sur celle-ci, des différents manuels d'autre part. La deuxième phase, d'une durée de 40 minutes environ, était consacrée au premier temps d'analyse ; la troisième phase, durant environ 45 minutes, au second temps. La quatrième et dernière phase est une mise en commun rapide suivie d'une courte synthèse des différents travaux des groupes.

Dans ce compte- rendu, nous proposons une présentation du champ des fractions et des décimaux, qui nous conduira à la grille d'analyse commentée utilisée par les participants. Les grandes lignes de la progression des différents manuels sera ensuite donnée, avec pour chacun d'eux un regard plus précis sur les deux situations concernant l'introduction des fractions et des décimaux. Enfin, une dernière partie sera consacrée à la synthèse des travaux des groupes concernant les activités plus particulièrement consacrées à la comparaison des fractions et des décimaux en CM1 / CM2.

2. LE POINT SUR LES INTRODUCTIONS POSSIBLES DES RATIONNELS ASSOCIES A LEURS ECRITURES FRACTIONNAIRES

2.1 Différents aspects du nombre rationnel $\frac{a}{b}$

Le nombre rationnel $\frac{a}{b}$ comme « a $b^{\text{ièmes}}$ » :

Cette signification de $\frac{a}{b}$ est facilitée par la lecture orale en usage : $\frac{2}{3}$ est habituellement lu « deux tiers », $\frac{7}{10}$ lu « sept dixièmes ». On privilégie alors les écritures :

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \quad (2 \text{ fois } \frac{1}{3}) \qquad \frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b} + \ldots + \frac{1}{b} \quad (a \text{ fois } \frac{1}{b}) \qquad \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$$

Le nombre rationnel $\frac{a}{b}$ comme « a divisé par b » (quotient de a par b), comme le nombre b fois « plus petit » que a :

Cette lecture orale de $\frac{2}{3}$ lu « deux divisé par trois » est très peu utilisée ($\frac{2}{3}$ est parfois lu « deux sur trois »). Cette signification du rationnel privilégie les écritures :

$$2 : 3 = \frac{2}{3} \qquad \frac{2}{3} \times 3 = 2$$

$$a : b = \frac{a}{b} \qquad \frac{a}{b} \times b = a$$

Le nombre rationnel $\frac{a}{b}$ comme notation fonctionnelle (« composition d'opérateurs ») :

$\frac{a}{b}$ est ainsi l'abréviation de la fonction « multiplier par a sur b » (également lue « multiplier par a $b^{\text{ièmes}}$ »), fonction composée des deux fonctions m_a (multiplier par a) et d_b (diviser par b).

<u>Notations en usage :</u>

* Soit f la fonction numérique : « prendre les $\frac{2}{3}$ de ... »

Prendre les deux tiers de t, c'est multiplier t par $\frac{2}{3}$

Cela revient :
- soit à multiplier t par 2 puis à diviser le résultat par 3
- soit à diviser t par 3 puis à multiplier le résultat par 2.

$f(t) = \frac{2}{3} \times t$	$f(t) = \frac{2 \times t}{3}$	$f(t) = \frac{t}{3} \times 2$
$f(6) = \frac{2}{3} \times 6$ ou $f(6) = 6 \times \frac{2}{3}$	$f(6) = (6 \times 2) : 3$ $= 12 : 3$ $= 4$	$f(6) = (6 : 3) \times 2$ $= 2 \times 2$ $= 4$
$f(5) = 5 \times \frac{2}{3}$ ou $f(5) = \frac{2}{3} \times 5$	$f(5) = (5 \times 2) : 3$ $= 10 : 3$ $= \frac{10}{3}$	$f(5) = (5 : 3) : 3$ $= \frac{5}{3} \times 2$ $= \frac{10}{3}$

* Soit g la fonction numérique : « prendre les $\frac{a}{b}$ de c »

$$g(c) = \frac{a}{b} \times c \qquad \frac{a}{b} \times c = \frac{a \times c}{b} \qquad \frac{a}{b} \times c = a \times \frac{c}{b}$$

2.2 Différents cadres d'introduction

	Partages	*Mesures*
Aspect a $b^{ièmes}$	Partage de l'objet	Mesurage par fractionnement de l'unité
Aspect a : b	Partage de la totalité	Mesurage par commensuration
Aspect fonctionnel	Prendre les a $b^{ièmes}$ d'un objet	Proportionnalité entre les mesures

Pour une situation de partage, les objets à partager sont souvent des grandeurs continues (longueur, aire, ...) ; le quotient de la grandeur par un nombre est alors la grandeur.

Pour une situation de mesure d'une grandeur continue, il faut se donner un étalon (unité de mesure) et le résultat de la mesure est un nombre qui est approché dans le cadre du mesurage.

Il y a des abus courants dans la lecture orale utilisée : s'il paraît légitime de lire 2 cm (2 centimètres) ; $\frac{1}{2}$ cm (demi-centimètre), $\frac{1}{2}$ h (une demi-heure), U est souvent, et à tort, lu « un quart de U », ce qui renforce maladroitement l'aspect fonctionnel de la notation et est source d'erreurs[12]. Il convient donc de lire $\frac{3}{4}$ U : « trois quarts U ».

Pour une situation de proportionnalité entre deux grandeurs, le quotient de deux grandeurs de même nature est un nombre sans dimension (scalaire).

Le cadre des graduations n'est pas retenu pour une introduction.

---

[12] Lorsque qu'il s'agit par exemple d'utiliser la mesure $\frac{2}{3}$ sur un segment gradué de 5 à 7, la plupart des élèves et des PE interprète de façon erronée $\frac{2}{3}$ comme deux tiers de AB.

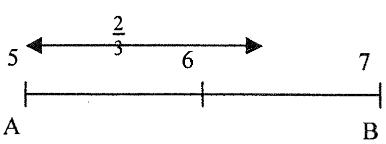


Illustration à partir des nombres rationnels $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{2}$:

Dans le cadre Partage : $\frac{2}{3}$

Partager 2 bandes entre 3 :

B	B

Deux cas à considérer :

* *Partage de l'objet* : **Chacune** des deux bandes est partagée en trois

$\frac{B}{3}$	$\frac{B}{3}$	$\frac{B}{3}$	$\frac{B}{3}$	$\frac{B}{3}$	$\frac{B}{3}$

Le résultat est $2 \times \frac{B}{3}$:

$\frac{B}{3}$	$\frac{B}{3}$

il se lit 2 fois B divisé par 3.

* *Partage de la totalité* : **La longueur totale** des 2 bandes est partagée en 3

B	B

$\frac{2B}{3}$	$\frac{2B}{3}$	$\frac{2B}{3}$

Le résultat est $\frac{2B}{3}$:

$\frac{2B}{3}$

il se lit deux 2B divisé par 3.

* *Prendre les $\frac{2}{3}$ de* O : L'objet O est partagé en 3 morceaux et l'on en prend 2.

O

$\frac{O}{3}$	$\frac{O}{3}$	$\frac{O}{3}$

Le résultat est $2 \times \frac{O}{3}$:

$\frac{O}{3}$	$\frac{O}{3}$

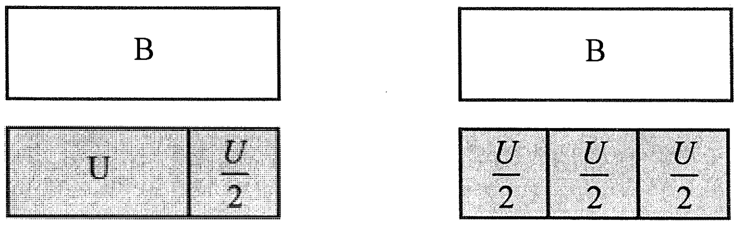
il se lit deux tiers de O ou 2 fois O divisé par 3.

Dans le cadre Mesures : $\frac{3}{2}$

Mesurer B avec la bande unité U :

B	U

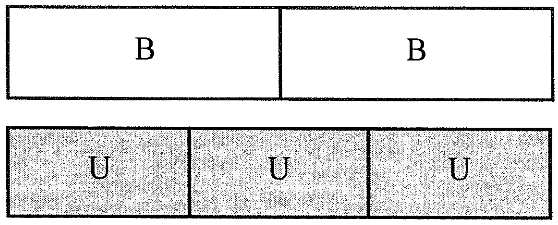
* *Mesurage par fractionnement de l'unité* : l'unité U est fractionnée en trois



Le résultat est : $B = U + \frac{U}{2}$ ou $B = 3 \times \frac{U}{2}$.

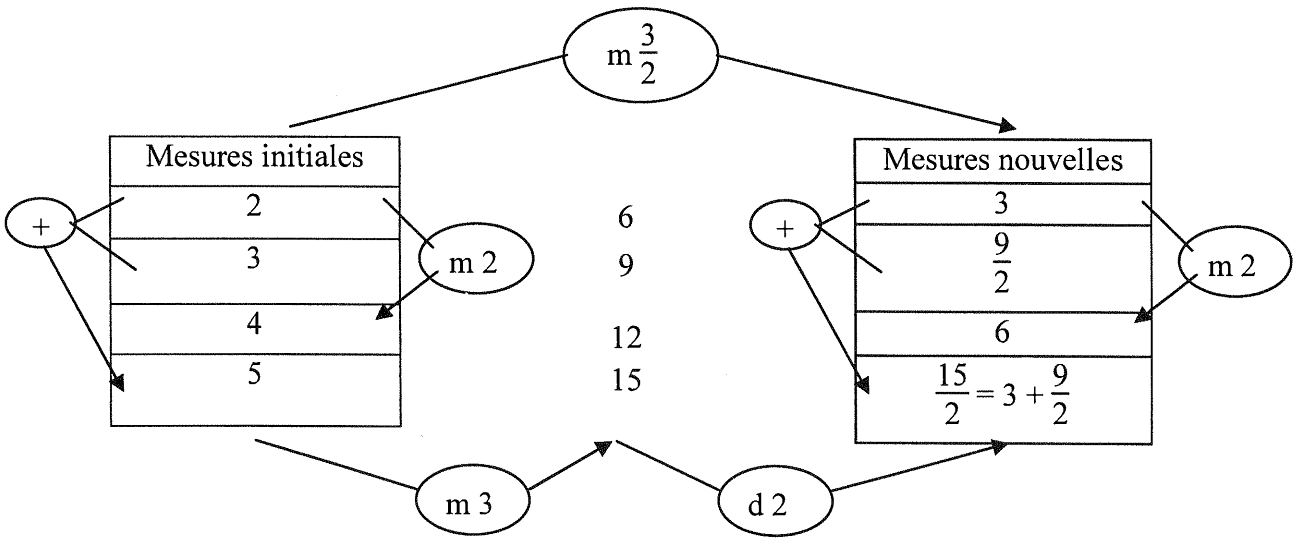
U étant l'unité, la mesure de B est $1 + \frac{1}{2}$ (se lit « un plus un demi ») ou $3 \times \frac{1}{2}$ (se lit « trois fois un demi »).

* *Mesurage par commensuration* : on fait coïncider *i* fois B avec *j* fois U



Le résultat est : 2 B = 3 U ou $B = \frac{3U}{2}$ (se lit « trois B divisé par deux ») ; U étant l'unité, la mesure de B est $\frac{3}{2}$ (se lit « trois divisé par deux »).

* *Proportionnalité entre les mesures* : exemple dans le cas d'un agrandissement



Remarques : cette fonction f ainsi définie est linéaire.

On a donc f (3) = f (2) + f (1), soit : $\frac{9}{2} = 3 + \frac{3}{2}$; et f (3) = 3 × f (1), soit : $\frac{9}{2} = 3 \times \frac{3}{2}$.

Le point de vue des Instructions Officielles de 2002 :

Les instructions officielles semblent privilégier l'aspect a b$^{\text{ièmes}}$ dans le cadre d'un mesurage par fractionnement de l'unité :

> *« En classe de sixième, un travail approfondi conduit à percevoir $\frac{7}{3}$ comme quotient de 7 par 3, il est donc important que la signification 7 fois le tiers de l'unité ou 7 fois $\frac{1}{3}$ soit travaillée à l'école primaire »*

Bien qu'il soit précisé que :

> *« Les fractions et les nombres décimaux doivent d'abord apparaître comme de nouveaux nombres, utiles pour résoudre des problèmes que les nombres entiers ne permettent pas de résoudre de façon satisfaisante :* ***problèmes de partages,*** *de mesure de longueurs ou d'aires, de repérage d'un point sur une droite. »*

L'aspect fonctionnel n'est donc jamais évoqué, il est vu au collège.

Les décimaux sont introduits avec leurs désignations sous forme d'écritures fractionnaires décimales avant de faire le lien avec les écritures à virgule

> *« En dehors des fractions d'usage courant, le travail sur les fractions est essentiellement destiné à donner du sens aux nombres décimaux envisagés comme fractions décimales ou somme de fractions décimales – fractions de dénominateurs 10, 100, 1000... ».*

3. PRESENTATION DE LA GRILLE D'ANALYSE : LES DIFFERENTS POINTS A ABORDER

Nom et niveau du manuel : Editeur :			
Période	**Type de séquence** Objectif(s)	Contexte : cadre, aspect, grandeurs	Sens des nombres - Nature et types d'écritures - Écriture privilégiée - Procédures

• *Période*
Il s'agit de la situation de la séquence dans la progression de l'année (période 1, 2, 3, 4 ou 5) ; éventuellement du numéro de la séance dans cette période. Il s'agit également de s'assurer que les notions préalables sont prises en compte.

• *Type de séquence / Objectifs*
Il s'agit de déterminer si la séquence (ou séance) concerne :

- L'**approche** d'une notion (à préciser) ;
- Une évaluation diagnostique concernant une notion (à préciser) ;
- Une **construction** de connaissance (à préciser) ;
- Une **consolidation :**
  - un entraînement dans le même contexte ou décontextualisé,
  - un réinvestissement dans un autre contexte ;
- Une évaluation finale.

• *Contexte : cadre, aspect, grandeur* en référence au paragraphe précédent
Il s'agit de préciser, pour chaque situation :

- Le cadre d'introduction (partage ou mesure) ;
- L'aspect de la fraction (« a $b^{\text{ièmes}}$ », « a : b » ou « fonction numérique ») ;
- Le cas discret ou continu ? Dans le cas continu : l'aspect densité est-il abordé (intercalation) ? Dans le domaine des grandeurs (lesquelles ?) Parle-t-on de valeurs exactes, de valeurs approchées ?

• *Le travail sur le sens des nombres rationnels ou des nombres décimaux*
Préciser :

- Les liens avec les entiers, les écritures privilégiées, le champ numérique, le vocabulaire (lecture, désignation orale) ;
- Le sens donné au nombre décimal, les liens avec les rationnels, l'ordre de présentation ;
- Si la droite graduée est utilisée, et dans ce cas quand ? Pour quoi ?
- Si les aspects épistémologiques sont évoqués.

• *Les écritures proposées :* écritures fractionnaires, écritures à virgule, écritures additives.
Sont-elles en liaison avec le sens donné aux nombres lors de la définition ?

• *Repérer dans le livre du maître quels sont les écueils envisagés par l'auteur du manuel, et quelles sont les procédures induites par ce manuel.*
Les procédures peuvent être :

- utiliser une règle « apprise » (sans appui sur le sens) ;
- utiliser la droite graduée ;
- recourir à des écritures fractionnaires ;
- ...

De quelle manière le manuel donne-t-il du sens à la procédure ? Quel est le lien avec le sens donné aux nombres lors de la définition ?

• Préciser les *opérations sur ces nombres*

4. LES GRANDES LIGNES DES PROGRESSIONS SUR LES FRACTIONS ET LES DECIMAUX DANS LES MANUELS

Consigne : « Vous devez procéder à une analyse du manuel proposé sur le thème des fractions et des décimaux. Pour cela, vous devrez compléter (en deux exemplaires) la grille fournie.

Votre attention se portera plus particulièrement sur les situations de construction ou de réintroduction des connaissances. »

4.1. Nouvel Objectif Calcul (Hatier)

Dans le livre du maître, on peut lire qu'il s'agit de « permettre aux élèves de comprendre que, dans certains problèmes, les entiers ne suffisent plus pour désigner la solution cherchée. »

Les grandes étapes de la progression sur les fractions et les décimaux en CM1 sont les suivantes :

1) Les fractions : outils pour exprimer la mesure de longueurs (*p 130 à 133*)

La situation introductrice des fractions est une situation de message, inspirée des travaux de R. Douady et M-J. Perrin (Nombres décimaux à l'école et au collège, IREM Paris VII). Il s'agit de mesurer un segment avec une unité arbitraire, mais commune à tous, sans recours à la règle graduée, et d'écrire un message pour que quelqu'un d'autre reproduise le segment sans le voir. Ceci conduit à introduire et utiliser les fractions pour coder des longueurs (pliages ou machine à partager).

2) Les fractions : outils pour graduer et repérer (*p 134 - 135*)

Les fractions sont utilisées pour désigner des points de la demi-droite numérique : * le lien est établi entre la longueur du segment [IA] et l'abscisse du point A sur la demi-droite d'origine I * on cherche à faire comprendre que plusieurs fractions désignent le même point donc sont égales (ou équivalentes) * l'encadrement d'une fraction par deux entiers consécutifs est envisagé

3) Les fractions : outils pour exprimer la mesure d'aires (*p 142 - 143*)

La situation de recherche de différents partages d'un hexagone en six parties exactement superposables permet simultanément d'introduire l'aire d'une figure plane et de réinvestir les codages fractionnaires. Repris de différentes façons, ce travail sur les aires va permettre, tout en construisant le concept d'aire, de consolider le sens à donner aux écritures fractionnaires et à la comparaison des fractions.

4) Les fractions décimales (*p 152 - 153*)

Les fractions décimales sont travaillées de manière à mettre en évidence qu'elles sont faciles à encadrer, à comparer, à écrire sous forme de somme de leur partie entière et d'une fraction plus petite que l'unité, à décomposer canoniquement et enfin pratiques pour pouvoir effectuer quelques opérations simples.

5) Fractions décimales et nombres décimaux (*p 154 à 159*)

Le passage des fractions décimales à l'écriture sous forme de nombres à virgule est assuré par des exercices s'appuyant sur les décompositions canoniques, ce qui met en évidence le rôle de la position des chiffres ; la calculatrice permet un renforcement de cette étude. Un lien est établi avec les nombres à virgule ou à point que l'on rencontre dans la vie quotidienne.

6) Comparaison des nombres décimaux (*p 160 -...)*

7) Nombres décimaux et unités du système métrique : longueurs (*p 166, 167, 175, 176*), masses (*p 174, 175*), prix (*p 175,176*), volumes (*p 177*)

8) Opérations avec les décimaux : addition et soustraction (technique opératoire en lien avec le système de numération décimale) puis multiplication par un entier.

Parallèlement à cette progression, **deux progressions en filigrane**, l'écriture de ces nouveaux nombres et leur comparaison :

- l'écriture de ces nouveaux nombres
  *fractions équivalentes
  *différentes écritures d'une fraction
  *différentes écritures d'un nombre décimal (fraction décimale ou écriture à virgule)

- la comparaison de ces nouveaux nombres
  *comparaison des fractions
  *comparaison des fractions décimales
  *comparaison des nombres décimaux.

Les grandes étapes de la progression sur les fractions et les décimaux en CM2 sont les suivantes :

1) Addition et soustraction des nombres entiers et décimaux (d'abord dans le contexte de la monnaie) (*p 18 à 21*)

2) Multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier (deux techniques pour la situation de découverte) (*p 26 à 29*)

3) Quotient décimal : rencontrer des situations où il est utile de trouver des qutients décimaux exacts ou approchés (*p 60 à 63*)

4) Les fractions : partages (*p 70 à 73*)

Les fractions sont utilisées pour coder des aires dans des situations de partage de surfaces : * en prenant pour unité le rectangle, indiquer l'aire de figures composées de morceaux de ce rectangle * construire des figures dont l'aire est donnée Les fractions sont ensuite utilisées pour coder des longueurs de segments (dans des situations de partage ou de construction), avec utilisation de la machine à partager

5) Fractions et graduations (*p 74 - 75*)

Il s'agit d'utiliser les fractions pour repérer les points de la demi-droite numérique. La situation de recherche consiste à compléter les différentes graduations d'un verre mesureur cylindrique, un seul repère étant connu.

6) Fractions et décimaux : différentes écritures (*p 76 - 77*)

Il s'agit dans la situation de découverte, de trouver un intrus parmi huit écritures. Outre ce type d'activité, les élèves sont également amenés à produire d'autres écritures fractionnaires à partir d'une fraction donnée. Certaines écritures sont privilégiées : à partir de l'écriture à virgule, les élèves doivent produire « la décomposition canonique », et à partir de l'écriture d'une fraction, l'écrire comme « somme de sa partie entière et du « rompu » ».

5) Fractions décimales et nombres décimaux (*p 154 à 159*)

Le passage des fractions décimales à l'écriture sous forme de nombres à virgule est assuré par des exercices s'appuyant sur les décompositions canoniques, ce qui met en évidence le rôle de la position des chiffres ; la calculatrice permet un renforcement de cette étude. Un lien est établi avec les nombres à virgule ou à point que l'on rencontre dans la vie quotidienne.

6) Fractions et décimaux : ordre (*p 78 à 81*)

Dans la situation de découverte, les dix nombres sont donnés par une écriture fractionnaire. Les élèves peuvent trouver des écritures décimales exactes ou approchées au millième près de ces nombres avant de les ranger en ordre croissant. La validation s'appuyant sur la représentation (hauteur d'eau dans un tube) est proposée avant la demande de formulation d'une règle.

7) Fractions, quotients et décimaux (*p 100 – 101*)

Comprendre que certaines fractions ne sont pas des nombres décimaux

8) Fraction, rapports et proportionnalité (*p 102 – 103*)

Utiliser des fractions pour désigner un rapport entre deux nombres ou pour désigner un coefficient de proportionnalité

9) Division d'un nombre décimal par un nombre entier (*p 120 à 123*)

Prolonger la technique de la division dans N à la division d'un décimal par un entier ; retrouver la notion de quotient décimal et de quotient décimal approché

10) Division : moyennes et partages (*p 124 – 125*)

Aborder la notion de moyenne ; utiliser la division d'un décimal par un entier pour calculer des valeurs moyennes

11) Décimaux, fractions et mesures de longueurs (*p 128 à 131*)

12) Décimaux, fractions et mesures d'aires (*p 136 à 139*)

13) Décimaux, fractions et mesures de masses (*p 142 – 143*)

14) Décimaux, fractions et mesures de durées (*p 144 - 145*)

15) Décimaux, fractions et mesures de volumes (en litres) (*p 180 - 181*)

Le point sur les situations introductrices :

En CM1 :

Les écritures fractionnaires sont introduites pour la première fois au cours de l'étape 31 en période 2 (*p 70*). Il s'agit de « mesurer des parcours à l'aide d'une unité U » (petite bande de papier). À l'occasion de la mise en commun le maître introduit « le partage de l'unité par 2, 4, 8 … noté $\frac{U}{2}$, $\frac{U}{4}$, $\frac{U}{8}$ .. » et parle d'unités sous-multiples.

Les écritures fractionnaires sont donc introduites sous leur aspect « a b$^{\text{ièmes}}$ » dans le cadre « mesures de longueurs » en privilégiant le mesurage par fractionnement de l'unité. On peut noter les abus courants suivants : - le « partage de l'unité » alors qu'il s'agit de la fractionner à l'aide d'un pliage. - les mesures $\frac{U}{2}$ alors qu'il s'agit d'une longueur.

Les écritures fractionnaires sont ensuite réintroduites au cours de l'étape 54 en période 4 (*p 130*) qui constitue la séquence de type construction. L'objectif est de donner du sens aux écritures fractionnaires de dénominateur 2, 4 ou 8. Le dispositif utilisé est celui d'une émission-réception de messages permettant de construire ou de retrouver à l'aide du message émis un segment superposable à un segment initial tracé par l'élève.

Les écritures fractionnaires sont donc réintroduites sous leur aspect « a b$^{\text{ièmes}}$ » dans le cadre « Mesure de longueurs » en privilégiant le mesurage par fractionnement de l'unité. Les procédures envisagées sont celles du pliage de la bande unité. Le livre du maître envisage de mettre en valeur quelques égalités comme : $\frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$ $\quad 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ $\quad \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$

On peut noter les abus suivants :
- « si on partage le segment unité en 4 parties superposables, chaque partie mesure un quart de U, que l'on note $\frac{1}{4}$ » ; il faudrait dire : chaque partie a pour longueur $\frac{U}{4}$ ou $\frac{1}{4}$ U (« U divisé par quatre » ou « un quart U »), elle a pour mesure $\frac{1}{4}$ (un quart).
- « la mesure $\frac{5}{4}$ de U » alors qu'il s'agit d'une longueur $\frac{5}{4}$ U (cinq quarts U).

En CM2 :

Les écritures fractionnaires sont réintroduites pour la première fois au cours de l'étape 30 en période 2 (*p 70*). C'est la séquence de construction. Il s'agit de « mesurer ou de construire des surfaces d'aire codée par des écritures fractionnaires de dénominateur 1, 2, 4 ou 8 ou par des sommes d'un entier et d'une écriture fractionnaire ». L'unité choisie est l'aire de la feuille A4. Le manuel indique : « utiliser des fractions pour coder des aires dans des situations de partage[13] de surfaces ».

Les écritures fractionnaires sont donc introduites ou réintroduites à nouveau sous leur aspect « a $b^{\text{ièmes}}$ » dans le cadre « Mesures d'aires » en privilégiant le mesurage par fractionnement de l'unité.
L'objectif est de donner ou redonner du sens aux écritures fractionnaires.
Les égalités mises en valeur sont les suivantes :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \text{ ou } 1 + \frac{3}{4} \text{ ou } \frac{7}{4} \qquad 1 + \frac{1}{2} \text{ ou } \frac{3}{2} \qquad 1 + \frac{1}{4} \text{ ou } \frac{5}{4}$$

On retrouve les mêmes abus de langage :
- des surfaces d'aire : 1 , $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{4}$ …
- surface dont l'aire est désignée par $\frac{1}{2}$

Remarques : pour les exercices 1 et 2, c'est l'aspect fonctionnel de la notion qui est introduit « fraction de la figure représentée par la partie colorée » ou « partie colorée de chaque figure qui correspond à une fraction ». L'unité d'aire n'est pas indiquée, l'aspect de l'écriture fractionnaire a donc changé, il ne s'agit pas d'exercices d'application (consolidation par entraînement) et cela peut conduire à des erreurs.

4.2. Cap Maths (Hatier)

Les grandes étapes de la progression sur les fractions et les décimaux en CM1 sont les suivantes :

0) Quinzaine 5 : expressions demi, quart et triple dans un contexte numérique (*séance 1*) ou d'aires (*séance 5*)

1) Vocabulaire des fractions simples (demi, tiers et quart) (*quinzaine 6 ; p 66 à 69)*

Dans le cadre des grandeurs et mesures (longueurs, aires, durées), notamment :
- Bande de papier à partager en 2, 3 ou 4 (de 2 manières différentes)
- Disque, demi- disque à partager en 2, 3 ou 4

2) Les fractions outils pour exprimer la mesure (codage et décodage)

- Mesures de longueurs (*quinzaine 7 : p 77 à 79 ; p 86*)
  Recherche (*p. 77 ; 78*)

[13] Il ne s'agit pas d'un cadre " Partage " mais d'un cadre " Mesure ".

Mesurer des bandes données avec une unité donnée ; écrire les mesures obtenues et faire deviner aux autres élèves les bandes mesurées Mesurer des segments avec une bande unité Construire des bandes avec des longueurs comprises entre 2u et 3u, écrire leurs mesures avec des fractions Décomposer des fractions en partie entière et fraction (*p 79*) <u>Tiers et sixièmes</u> Tracer des segments de longueur le tiers, le sixième ou 1 + 1/3 … d'une bande donnée (*p 86*) Écrire des fractions égales à 2/3 ; 7/3 ou 4 (*p 86*) - Mesures de durées (*p 87*) - Mesures d'aires (*p 88*)

3) Les fractions outils pour repérer et graduer *(p 89 ; 98)*

- Graduer un verre mesureur (verre doseur conique présentant une graduation irrégulière : référence à une situation de non proportionnalité), puis des demi-droites (*p 89*) - Exercice (*p 91*) concernant les différentes écritures d'un nombre - Des fractions sur une ligne graduée (qui ne commence pas toujours à 0) (*p 98*)

4) Écriture d'une fraction sous forme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1

- A l'aide des aires, construction d'une surface d'aire 103/4 u *(p 99)* - Décomposition d'une fraction comme somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1, encadrer une fraction par deux entiers consécutifs *(p 100)* - A l'aide de la droite graduée *(p 100 – 102 – 103 ; 106)*

5) Fractions décimales *(p 107 ; 110 ; 112 ; 122 ; 123)*

- Présentation à l'aide des mesures de longueurs et d'aires - Présentation à l'aide du repérage sur la droite graduée *(p 110)* - Institutionnalisation du vocabulaire (dixièmes, centièmes, millièmes) à partir des longueurs *(p 112)* - Équivalence des fractions décimales en liaison avec la numération *(p 112)* - Décomposition d'une fraction décimale à l'aide de surfaces à découper pour construire des surfaces d'aire donnée *(p 122)* - Bilan, comparaison *(p 123)*

6) Nombres décimaux *(p 125 ; 126 ; 134)*

- Introduction de l'écriture à virgule comme une notation de la fraction décimale *(p 125)* - Nombres décimaux et graduations (droites qui n'ont pas toujours le 0 en origine) *(p 134)* *À noter : l'absence du tableau de numération*

7) Comparaison des décimaux *(p 136 ; 156 ; 157 ; 158)*

- Ranger des surfaces construites par les élèves à l'aide de décimaux : 5,5 u… *(p 156)* - Intercaler un nombre entre deux nombres donnés *(p 157)* - Intercaler 20 nombres entre 2 et 10, entre 6 et 7 …*(p 158)*

8) Addition et soustraction des nombres décimaux *(p 165)*

- Construction de la technique opératoire de l'addition - Calculs de différences

Les grandes étapes de la progression sur les fractions et les décimaux en CM2 sont les suivantes :

1) Connaître et utiliser la signification des écritures à virgule de nombres décimaux (valeur des chiffres en fonction de leur position) (*Unité 2, séances 1, 2, 3*)

- Interpréter une écriture à virgule. - Construire une bande de longueur donnée (53 u ; 0,5 u ; 10,01 u ; 240,306 u) ou rédiger un message qui explique comment la construire de longueur donnée à l'aide d'une bande unité pré partagée en dixièmes et d'une bande dixième d'unité pré partagée en centièmes. La justification des procédés se fait en référence à la valeur des chiffres, sans qu'un recours au tableau de numération ne soit pour le moment nécessaire. Deux types de lecture sont au départ acceptées : la lecture courante « dix virgule zéro un », la lecture significative : « dix et un centième », c'est celle-ci qui est recommandée aux élèves. Le vocabulaire « partie entière » et « partie décimale » est également introduit. - Ranger, comparer des bandes de longueur donnée (2,3 u, 0,24 u ...), intercaler des longueurs. - Passer des écritures littérales aux écritures à virgule.

2) Comprendre les relations qui existent entre 1000 ; 100 ; 10 ; 1 ; 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ... et les utiliser pour décomposer des nombres décimaux (*Unité 3, séances 1 et 2*)

- Interpréter la signification des chiffres en fonction de leur position dans un contexte nouveau (contexte de la cible) Cette activité montre que l'écriture des décimaux est fondée sur le même principe que celle des entiers : une unité vaut dix fois plus que l'unité immédiatement « inférieure ». - Mettre en relation les formulations orales, écrites et des bandes pour renforcer la compréhension.

3) Repérer une position sur une ligne graduée en utilisant les nombres décimaux (de façon exacte ou approchée) (*Unité 4, séances 2, 3 et 4*)

- Poser la question du repérage d'une position sans indiquer que les nombres décimaux sont une solution possible. Situation de communication : chaque équipe reçoit une ligne graduée avec deux positions signalées par une flèche : écrire un message qui permettra aux autres élèves de la classe de trouver ces deux positions sur leur ligne graduée. - Placer des nombres sur une ligne graduée (graduation complète ou non). - Amener les élèves à se repérer par rapport à quelques décimaux particuliers, identifiés par leurs relations avec des entiers (7,5 est à mi chemin entre 7 et 8).

4) Comprendre la signification de l'écriture décimale dans l'expression d'une mesure, utiliser un nombre décimal pour exprimer une mesure (*Unité 4, séance 7*)

Il s'agit de poser le problème de la signification d'une écriture décimale pour exprimer une mesure **Les raisonnements appuyés sur le sens (même difficiles à expliciter par les élèves) sont privilégiés par rapport aux techniques systématiques telles que le placement dans un tableau d'unités**

5) Utiliser les nombres décimaux pour exprimer des quantités et utiliser un graphique (*Unité 5, séances 1 et 2*)

Écrire le nombre d'habitants : 218,9 milliers d'habitants ; 0,47 milliards d'habitants.

6) Maîtriser l'addition posée des nombres décimaux, exprimer des sommes d'argent à l'aide de nombres décimaux (*Unité 5, séances 6 et 7*)

- Les nombres sont donnés sous la forme : 2 centaines 4 unités 7 dixièmes 8 centièmes. - Facture à compléter.

7) Comprendre la technique posée relative à la soustraction de deux nombres décimaux et en maîtriser l'utilisation (*Unité 6, séances 1, 5 et 7*)

La difficulté se trouve accrue du fait qu'il existe plusieurs techniques possibles, comme pour les nombres entiers. Chaque élève doit donc adapter celle qu'il utilise aux nombres décimaux, les justifications étant identiques. Concernant l'absence de chiffre à une position donnée, une réflexion sur le sens de cette absence doit orienter l'action de l'élève plutôt qu'une règle imposée sans être comprise.

8) Comprendre et maîtriser la comparaison et l'intercalation des nombres décimaux (*Unité 6, séances 2, 3 et 4*)

- Élaborer une procédure pour comparer les nombres décimaux et la mettre en œuvre Cette procédure ne doit pas être une règle dépourvue de sens. Au contraire, c'est en s'appuyant sur la signification des écritures à virgule qu'elle doit être élaborée, puis utilisée, assurant ainsi aux élèves un meilleur contrôle des comparaisons qu'ils sont amenés à faire. Ce n'est que progressivement que la procédure sera automatisée. - Entre deux nombres, on peut toujours en intercaler une infinité

9) Comprendre les fractions et faire le lien avec les nombres décimaux (*Unité 7, séances 1, 2, 3, 4 et 5*)

- Comprendre et utiliser des écritures fractionnaires dans le cadre des mesures d'aires. À l'école primaire toutes ces questions (3/3 = 1 ; 10/8 = 5/4) doivent être traitées sur la base de la compréhension des écritures de fractions et non pas en donnant des règles de simplification ou de comparaison. - Mettre en relation fractions et positions sur une ligne graduée. Cette situation est, en grande partie, reprise d'une activité imaginée par une équipe de l'IREM de Lyon et décrite dans la brochure " *La sixième entre fractions et décimaux* ". - Écrire les nombres décimaux sous forme de fractions décimales ou de sommes de fractions décimales.

10) Associer différentes désignations d'un nombre décimal (*Unité 8, séances 1 et 2*)

11) Multiplier et diviser des entiers par 10, 100 et 1000 (*Unité 8, séances 5 et 6*)

12) Multiplier un nombre décimal par 10, 100 et 1000 (*Unité 9, séances 2, 3 et 4*)

- Débat : la règle des entiers ne fonctionne plus avec les nombres décimaux et il faut mettre en place une nouvelle procédure basée sur la compréhension des écritures à virgule. Le chiffre change de valeur. - Formulation d'une procédure : appui sur un tableau de numération : Quand on multiplie par 10, les chiffres changent de valeur : ils sont décalés d'un rang vers la gauche. Quand on multiplie par 100, ils sont déplacés de deux rangs. La calculette peut confirmer les résultats obtenus.

13) Décomposer une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1 (*Unité 10, séances 1 et 2*)

- Réaliser une longueur donnée (23/4 u ; 135/4 u) à l'aide d'une bande unité déjà fractionnée.

- Le cas particulier des fractions de dénominateurs 10 ou 100 est exploité pour retrouver la décomposition des écritures à virgule.
- Activité inverse.

14) Situer un nombre décimal entre deux entiers consécutifs, trouver l'entier le plus proche d'un nombre décimal, comprendre la notion d'arrondi à l'unité, au dixième ... (*Unité 10, séances 3, 4 et 5*)

La notion d'arrondi est seulement approchée au primaire ; elle sera retravaillée au collège.

15) Multiplier un nombre décimal par un nombre entier (*Unité 12, séances 3, 4 et 5*)

- Elaborer des procédures personnelles fondées sur la compréhension qu'ont les élèves des décimaux. Au cours de la mise en commun, on ne vise pas l'expression d'une procédure standardisée, mais des procédures fondées sur la signification des écritures à virgule.
- Utiliser le résultat de 456 x 208 pour calculer : 4,56 x 208 ; 0,0456 x 208.
- Technique opératoire.

16) Prendre une fraction d'une quantité ou d'un nombre (*Unité 12, séance 4*)

Le point sur les situations introductrices :

En CM1 :

Les élèves sont familiarisés avec les expressions moitié, tiers et quart au cours de la quinzaine 5 sans que l'écriture fractionnaire ne soit introduite.

Les écritures fractionnaires sont introduites pour la première fois au cours de la quinzaine 7 en période 2 (*p 77 et 78*). C'est la séquence de type construction (2 séances).

L'objectif est de donner du sens aux écritures fractionnaires de dénominateur 2 ou 4.

Le dispositif principal utilisé est celui d'une émission-réception de messages permettant de retrouver à l'aide du message émis une bande choisie par l'élève parmi un lot donné par le maître.

Les écritures fractionnaires sont donc introduites sous leur aspect « a $b^{\text{ièmes}}$ » dans le cadre « Mesure de longueurs » en privilégiant le mesurage par fractionnement de l'unité.
Les égalités qui peuvent être mises en valeur sont les suivantes :

$$\frac{1}{2}\text{ U ou }\frac{2}{4}\text{ U} \qquad 2\text{ U} + \frac{1}{4}\text{ U ou } 1\text{ U} + \frac{5}{4}\text{U ou }\frac{9}{4}\text{ U}$$

On peut noter les abus courants suivants :
- « exprimer une mesure avec le codage $\frac{3}{4}$ U » alors qu'il s'agit de l'expression d'une longueur ;
- la lecture : trois quarts d'unité.

Remarque : le mot « partager » est introduit comme synonyme de fractionner ; ainsi pour $\frac{3}{4}$,les auteurs parlent du 3 « comme indiquant que l'on a reporté 3 fois et le 4 que l'on a partagé en 4 ».

En CM2 :

Les écritures à virgule sont réintroduites pour la première fois au cours de l'unité 2 en période 1 (*p 17, 18 et 19*). C'est une séquence de type consolidation (3 séances).

L'objectif est de donner du sens aux écritures à virgule en lien avec les écritures fractionnaires décimales correspondantes.

Les élèves sont amenés à construire des bandes de longueur donnée, à exprimer des longueurs par des écritures à virgule, à passer d'une écriture fractionnaire à une écriture à virgule, à ranger des longueurs exprimées par des écritures fractionnaires ou à virgule, à ranger des décimaux (écriture à virgule ou fractionnaire).

Les écritures à virgule sont donc introduites en lien avec les écritures fractionnaires décimales correspondantes sous leur aspect « a $b^{\text{ièmes}}$ » (b valant 10, 100 ou 1000) dans le cadre « Mesures de longueurs : mesurage par fractionnement de l'unité ».

4.3. Diagonale (Nathan)

Les grandes étapes de la progression sur les fractions et les décimaux en CM1 se déroulent sur les trois dernières périodes de l'année et sont réparties comme suit :

* Période 3 : - Introduction des fractions,
- Introduction des décimaux ;

* Période 4 : comparaison et intercalation ;

* Période 5 : opérations.

Plus précisément :

1) Les fractions outils pour mesurer (codage, décodage) *(p 88 ; 89)*

- Écriture fractionnaire, écriture en toutes lettres de fractions supérieures à l'unité dans le cadre de la mesure de longueur *(p 88).* - Fraction d'une aire, dans une situation de partage. - Construction d'un partage de segment en vue de représenter une fraction inférieure ou supérieure à l'unité (*p 89*).

2) Fractions décimales (codage, décodage) *(p 90 ; 91)*

- Dixièmes d'unité (représenté par un segment, puis décontextualisé). - Fractions inférieures ou supérieures à 1 *(p 91).* - Équivalence des fractions 1/5 et 2/10. - Somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1 *(p 91).* - Intercalation de 1/3 entre 3/10 et 4/10.

3) Les fractions sur la droite numérique : graduations *(p94 ; 95)*

- Le rapport entre codage de longueur et graduations est établi par le passage d'une bande unité subdivisée en 10 à l'unité subdivisée en 10 sur une droite graduée. - Évaluation de longueurs de bandes à l'aide d'une droite graduée. - Placement d'une fraction a/10 sur la droite graduée. - Fractions décimales 1/100, 1/100. - Équivalence dixièmes - centièmes *(p 95).* - Désignations en lettres dixièmes, centièmes, millièmes *(p 95).* - Tableau de numération *(p 95).*

4) Les nombres décimaux *(p 98 à 101)*

- Passage de la décomposition avec les fractions décimales à l'écriture utilisant la virgule à l'aide du tableau de numération *(p 98).* - Place et rôle des chiffres dans une écriture à virgule, le cas de 0 *(p 98 à 100).* - Placement de nombres à virgules sur une droite graduée *(p 99 ; 101).* - Recours au « grossissement » pour tenir compte des centièmes, des millièmes *(p 99).* - Les écritures à virgule pour exprimer une longueur, un prix, lien avec les conversions *(p 98 ; 99 ; 101).* - Décomposition d'une écriture décimale à l'aide des fractions décimales *(p 100).*

5) Avec les fractions et les nombres décimaux *(p 104 ; 105 ; 107...)*

- Réinvestissement dans le cadre des aires : passage entre les écritures fractionnaires simples et l'écriture à virgule *(p 104)*.
- Évaluation par une fraction puis un nombre à virgule.
- Utilisation des écritures fractionnaires et à virgule dans la résolution de problèmes dans différents contextes : masses (*p 107 ; 109*), volumes (*p 142*) ...
- Vocabulaire *(p 105)*.

6) Comparaison des nombres décimaux *(p 130 à 133)*

7) Opération sur les nombres décimaux

- Addition et soustraction de deux décimaux.
- Produit d'un décimal par un entier.

Les techniques opératoires sont mises en place très rapidement.

Les grandes étapes de la progression sur les fractions et les décimaux en CM2 sont les suivantes :

1) Les fractions outils pour mesurer (codage, décodage) *(Période 2, palier 3 p 58 à 61)*

- Placer les élèves face à des situations de mesurage de longueurs à l'aide d'une unité (utilisation du « partageur de segment »).
- Faire utiliser des écritures fractionnaires pour désigner des mesures.
- Faire écrire des fractions sous des formes additives et multiplicatives.
- Faire écrire des égalités entre les différentes écritures fractionnaires.

2) Fractions décimales (codage, décodage) *(Période 2 paliers 3 et 4 p 62 à 65)*

- Faire utiliser les fractions décimales pour désigner des points d'une graduation, des résultats d'une mesure.
- Encadrer une fraction décimale par deux entiers, les ranger.
- Faire utiliser la droite graduée pour repérer des fractions décimales.
- Faire retrouver le processus d'échange et de subdivision de l'unité (1 dizaine → 10 unités ; 1 unité → 10 dixièmes).
- Faire utiliser des écritures fractionnaires décimales pour désigner des fractionnements et des graduations (mesures d'aires).
- Faire lire, écrire et décomposer des écritures fractionnaires décimales, utiliser le tableau de numération.
- Faire procéder à des échanges - groupements avec des fractions décimales.

3) Les nombres décimaux *(Période 2 palier 5 p 70 à 73)*

- Passage des écritures de fractions décimales en nombres à virgule à l'aide du tableau de numération (passage par écriture Stevin).
- Place et rôle des chiffres dans une écriture à virgule, le cas de 0.
- Placement de nombres à virgule sur une droite graduée.
- Comparer deux nombres décimaux (deux règles données que les élèves sont amenés à justifier ...).

4) Opérations avec les nombres décimaux *(Période 3 palier 1 p 84 à 88 palier 2 p 94 - 95)*

- Addition et soustractions de deux décimaux (*observe et explique...*).
- Familiariser les élèves avec des problèmes arithmétiques utilisant les décimaux.
- Multiplier, diviser par 10, 100, 1000 *(l'élève est amené à expliquer la règle proposée...)*.
- Produit d'un décimal par un entier.

- Technique de la division : quotient décimal *(p 92 – 93).* *Systématistion très rapide des techniques opératoires.*

5) Mesure et nombres décimaux *(Période 3 palier 5 p 110 – 111)*

- Traduire en unités françaises des unités anglaises (mesures de longueurs). - Traduire en unités françaises des unités de la Grèce ancienne (mesures de masses).

6) Approximation et ordre de grandeur *(Période 4 palier 1 p 122 – 123)*

7) Approche de la division d'un nombre décimal par un entier : utiliser la calculette *(Période 4 palier 1 p 124 à 127)*

8) Mesurer des contenances, des volumes *(Période 4 palier 4 p 138 à 140)*

Le point sur les situations introductrices :

En CM1 :

Les écritures fractionnaires sont introduites pour la première fois au cours du palier 2 en période 3 (*p 88 à 91*). C'est une séquence de type construction (4 séances).

L'objectif de la première séance intitulée « Introduction des fractions » est de donner du sens aux écritures fractionnaires de dénominateur 2, 3, 4 ou 5 dans des activités de mesurage, celui de la deuxième « Le partageur de segment », d'introduire une méthode pour partager un segment en plusieurs parties égales, ceux des troisième et quatrième séances « avec les dixièmes (1) (2) » de donner du sens aux fractions décimales de dénominateur 10.

Pour la première séance l'élève doit, pour une première activité, comprendre les écrits de deux élèves fictifs qui donnent des longueurs de segments introduisant deux fractionnements différents de l'unité puis construire des segments de longueur donnée par une écriture fractionnaire. Pour la seconde activité, l'élève doit donner l'aire de surfaces impliquant un fractionnement de l'unité d'aire.

Les écritures fractionnaires sont donc introduites sous leur aspect " a b$^{\text{ièmes}}$ " dans le cadre " mesures de longueurs " puis " mesures d'aires " en privilégiant le mesurage par fractionnement de l'unité. Les significations : deux cinquièmes de l'unité, la moitié de l'unité, le quart de l'unité sont ainsi explicitées. Les premières égalités peuvent être mises en évidence : $1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$; $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16}$ On peut noter les abus courants suivants : - le segment A mesure 2 unités - la mesure exacte pour la longueur B : 1 fois U et $\frac{2}{5}$ de U ou $\frac{7}{5}$ de U - une unité a de surface - l'étendue d'un domaine est égale à 2 a + $\frac{3}{4}$ de a

En CM2 :

Les écritures fractionnaires sont réintroduites pour la première fois au cours du palier 3 en période 2 (*p 58 et 59*). C'est une séquence de type construction (2 séances).

L'objectif des deux séances intitulées « Utilisation d'écritures fractionnaires (1) et (2) » est de donner du sens aux écritures fractionnaires de dénominateur les entiers de 2 à 10 dans des activités de partage de segments, de disques ou d'objets ; et dans des activités de mesurage de segments.

Les écritures fractionnaires sont donc réintroduites sous leurs aspects " a $b^{\text{ièmes}}$ " et " fonctionnel " dans les cadres " partages " et " mesures de longueurs " puis " mesures de capacités ".

C'est la lecture " a $b^{\text{ièmes}}$ " qui est utilisée et l'on met en évidence que $\frac{7}{5} = 1 + \frac{2}{5}$ sept cinquièmes égale un plus deux cinquièmes.
On retrouve les abus courants habituels :
- tracer un segment qui mesure sept dixièmes de u
- la longueur de S est égale à $2 + \frac{1}{3}$ de cette unité.

4.4. J'apprends les maths (Retz)

C'est vraisemblablement au CM1 que se jouent les compétences futures des élèves concernant les décimaux. *Le temps consacré à l'apprentissage des fractions et des décimaux au CM1 est relativement important et nous développons davantage la progression concernant ce niveau.*
• Qu'est-ce qu'un décimal ?
- S'approcher aussi près que l'on veut d'un nombre « irrationnel » ;
- Un projet présent dès l'invention des fractions ;
- Le concept de fraction a beaucoup évolué depuis son invention. *Quatre significations : proportion, rapport, partition de la pluralité, fractionnement de l'unité. Au CM1 que les élèves s'approprient l'équivalence " 13 partagé en 4 " (division-partition de la pluralité), c'est aussi " 13 quarts " (fractionnement de l'unité).*
• Les décimaux écrits avec une virgule : ça ressemble à des entiers, ça se manipule comme des entiers, alors que ce ne sont pas des entiers. *L'écriture à virgule est un système économique de notation des décimaux qui facilite les calculs mais qui masque leur véritable nature. Il s'agit d'*enseigner d'abord les décimaux sous forme de fractions décimales.
• Une équivalence fondamentale pour conceptualiser les fractions : partition de la pluralité et fractionnement de l'unité : *lire indifféremment 13/4 comme « 13 divisé par 4 » ou comme « 13 quarts ».* Il s'agit de donner d'abord du sens à a/b dans un contexte de partition de la pluralité.
• *Aide à l'appropriation de l'équivalence fondamentale qui fonde la notion de fraction et à comprendre que les décimaux permettent d'approcher d'aussi près que l'on veut la mesure d'une grandeur continue.* La notion de conflit entre l'économie de la représentation et celle du calcul pour enseigner l'équivalence qui fonde le concept de fraction.
Deux facteurs :
- La sémantique de l'énoncé (on partage a unités en b parties égales ou on prend a fois un $b^{\text{ième}}$ d'une unité)
- Les valeurs numériques

Il y a quatre périodes dans le manuel, les fractions apparaissent au début de la troisième. Progression :
- a/b est défini comme « a divisé par b » ;
- 3 partagé en 4 c'est 3 quarts ;
- équivalences d'écritures et comparaison de fractions ;
- 155 tiers c'est aussi 155 divisé par 3 ;
- ne pas introduire d'emblée l'addition des fractions ;
- utiliser d'abord des unités de mesure non conventionnelles pour favoriser l'appropriation de l'idée de fractionnement ;
- enseigner l'écriture à virgule comme un simple changement de notation ;

- faire oraliser systématiquement les nombres à virgule, en explicitant les dixièmes, les centièmes …

Les grandes étapes de la progression sur les fractions et les décimaux en CM1 sont les suivantes :

1) Une nouvelle division et de nouveaux nombres (*Leçon 73*)

> *« **J'ai appris** » :* 17/3 se lit « 17 divisé par 3 » (tu apprendras bientôt une autre façon de le lire). C'est une nouvelle division, la division-fraction, où l'on partage le reste.
> Avec cette division, on peut écrire l'égalité : 17/3 = 5 + 2/3 ….
> C'est le quotient de la division avec reste mais le reste a été partagé.
> *Quelques consignes* : *Pour chacun de ces problèmes, quelle division utilises-tu … ?*

2) Fractionnement de l'unité en parts égales (Leçon 74)

> *« **J'ai appris** » :* Quand je partage une unité (1 pizza, 1 litre d'eau, 1 tablette de chocolat, un ruban, …) en 10 parts, c'est seulement si les parts sont égales que la grandeur d'une part est égale à 1/10
> *Quelques consignes : Quelles sont les figures où l'on a coloré 1/3 ? Quelles sont les figures où l'on a coloré 1/10 ?*

3) « 2 divisé par 3 » c'est aussi « 2 tiers » (*Leçon 76*)

> *« **J'ai appris** » :*Il y a deux façons de représenter la part de pizza correspondant à ¾
> - soit je prends 3 pizzas, je partage chacune en quarts et je prends une part dans chaque ;
> - soit je prends une seule pizza, je la partage en quarts et j'en prends trois parts.
> 5/6 se lit " 5 divisé par 6 " mais on peut le lire aussi " 5 sixièmes ".
> Dans la fraction 13/8 , 8 est le dénominateur, il nous permet de dénommer la fraction (ici, ce sont des huitièmes) ; 13 est le numérateur, il nous indique le nombre de huitièmes.
> *Quelques consignes* : *Écris sous forme de fraction : cinq septièmes … Écris les fractions correspondant aux parties colorées*

4) Partager une longueur en *n* longueurs égales (*Leçon 78 – 79*)

> Réseau de droites parallèles

5) Comparer des fractions inférieures à l'unité (*Leçon 82*)

> Établir que des écritures fractionnaires peuvent être égales (représenter la même étendue). S'appuyer sur les équivalences privilégiées (1/10 = 10/100 ; ½ = 5/10 et ½ = 50/100) pour comparer des fractions de dénominateurs différents.

6) Comparer des fractions inférieures à l'unité (*Leçon 85*)

> *« **J'ai appris** » :* Pour comparer ¾ et 82/100 , il faut savoir que ¾ c'est 75/100 …
> Voici les principales équivalences qu'il faut connaître (en présence de représentations du carré …) :
> ½ = 2/4 = 5/10 = 50/100 ;
> ¼ = 25/100 ;
> ¾ = 75/100 ;
> 1/10 = 10/100 …

7) « Cent trente-cinq quarts », c'est aussi « 135 divisé par 4 » (*Leçon 86*)

> *« **J'ai appris** » :* Pour calculer trois cent vingt-huit sixièmes, Gino cherche combien de fois il y a 6 dans 328. Il fait la même division que Fino 328/6

8) Fractions inférieures, égales ou supérieures à 1 (*Leçon 87*)

Quelques consignes : Fino veut savoir pour quelles commandes il a besoin de plus d'une pizza. Essaie d'énoncer une règle qui permet de savoir si une fraction est plus petite que 1, égale à 1 ou plus grande que 1.

9) Somme de fractions décimales : ½ et dixième (*Leçons 90 et 91*)

*« **J'ai appris** » :* Additionner des dixièmes entre eux, c'est facile.

9/10 + 3/10 + 2/10 = 14/10 ou 1 + 4/10

Pour additionner des demis et des dixièmes, je transforme les demis en dixièmes ½ = 5/10.

Avec contexte du verre doseur gradué en dixièmes, on verse ... puis ...

Quelques consignes : Calcule ces sommes ; Compare ces nombres 37/10 et 3 + 8/10.

Règle graduée en stylos, demi-stylo et dixième de stylo.

Quelques consignes :

Reconnaître 2/10, 3/10 comme longueur d'un segment ne partant pas de la graduation 0.

Quel est le nombre le plus proche de 2 ? 1 + ½ ou 2 + 4/10 ?

Calcule puis range ces nombres du plus petit au plus grand

13/10 1 8/10 24/10 2 14 ½

10) Somme de fractions décimales ½, n/4 ; n/100 (*Leçons 92 et 93*)

Verre doseur gradué en centième ; règle graduée en stylo, demi, quart et centième de stylo.

*« **J'ai appris** » :* On peut additionner des centièmes 52/100 + 73/100 = 125/100 c'est-à-dire 1 + 25/100 ou 1 + ¼.

Pour additionner des centièmes, des quarts et des demis, je dois transformer les demis et les quarts en centièmes, j'utilise les égalités : ½ = 50/100 et ¼ = 25/100.

11) Somme de fractions décimales ½, n/4 ; n/10 ; n/100 (*Leçons 99 et 100*)

Règle graduée en centième et dixième de stylo.

*« **J'ai appris** » :* Additionner des centièmes entre eux, c'est facile : 46/100 + 32/100 = 78/100. Pour additionner des centièmes et des dixièmes, je transforme les dixièmes en centièmes : 6/10 + 32/100 = 60/100 + 32/100 = 92/100.

12) Écritures décimales : les dixièmes (*Leçons 109 et 110*)

À partir de l'affichage de la calculatrice pour 46/10

*« **J'ai appris** » :* 13,6 signifie 13 + 6/10 ou 136/10. Sur les machines, la virgule est souvent remplacée par un point. Ce nombre s'appelle un nombre décimal. Le chiffre à droite de la virgule désigne les dixièmes. 13,6 se dit " treize virgule six dixièmes "

13) Écritures décimales : les dixièmes et les centièmes (*Leçons 111 et 112*)

*« **J'ai appris** » :* 23,67 signifie 23 + 6/10 + 7/100 ou 23 + 67/100 ou 2367/100. Le premier chiffre après la virgule désigne les dixièmes. Le second chiffre après la virgule désigne les centièmes.

23,67 se dit « vingt-trois virgule six dixièmes et sept centièmes » ou « vingt-trois virgule soixante-sept centièmes ».

3,07 se dit « trois virgule sept centièmes ».

Quelques consignes : Calcule ces divisions-fractions. Écris le résultat en utilisant le système de la virgule, puis vérifie avec ta calculette.

½ 4/100 59/100 107/100 110/100 143/100 201/100

14) Fractions décimales du mètre exprimées en dm, cm et mm (*Leçon 118*)

15) Fractions décimales du dm² exprimées en cm²...(*Leçon 119*)

16) Les écritures décimales pour exprimer des mesures (*Leçons 121 et 122)*

« ***J'ai appris*** » *:* Pour savoir ce que veut dire 12,7 dm², il faut le lire « douze virgule sept dixièmes de décimètre carré » et chercher l'étendue qui correspond à 1 dixième de dm² : 1/10 dm² = 10 cm². 12,7 dm² = 12 dm²70 cm²

17) Opérations sur les nombres décimaux (*Leçons 125, 127 à 130*)

Somme de nombres décimaux (*Leçon 125*). Produit d'un nombre décimal par un entier (*Leçons 127-128*) Soustraction de nombres décimaux (*Leçon 129-130*)

Les grandes étapes de la progression sur les fractions et les décimaux en CM2 sont les suivantes :

Deuxième période :

1) " 5 divisé par 6 ", c'est aussi " 5 sixièmes " (*Leçon 32*)

« ***J'ai appris*** » *:* Il y a deux façons de représenter la part correspondant à 5 pizzas partagées équitablement entre 6 personnes : - soit je prends 5 pizzas, je partage chacune en sixièmes et je prends une part dans chaque, - soit je prends une seule pizza, je la partage en sixièmes et je prends 5 parts. 5/6 se lit " 5 divisé par 6 " ; mais on peut le lire aussi " 5 sixièmes ". Dans la fraction 3/10 , ce nombre (10) est le dénominateur, il nous permet de dénommer la fraction (ici, ce sont des dixièmes) ; ce nombre est le numérateur, il nous indique le nombre de dixièmes (ici, il y en a 3)

2) Fractions équivalentes < 1 (*Leçon 33*)

À partir de découpages de carrés, « voici les principales équivalences » : 1/4 = 25/100 ; ¾ = 75/100 ; ½ = 2/4 = 5/10 = 50/100 ; 1/10 = 10/100 ; 2/10 = 20/100 ; 3/10 = 30/100.

3) La division – fraction : « 11 divisé par 4 », c'est aussi « 11 quarts » (*Leçon 34*)

La division – fraction 11/4 = 2 + ¾ permet de résoudre deux sortes de problèmes : - ceux où l'on partage 11 unités en 4 parts égales et où l'on partage le reste, - ceux où l'on cherche combien font 11 fois ¼ (" 11 fois un quart " ou " 11 quarts ") Attention : Une division – fraction peut s'écrire de deux façons : 11/4 = 2 + ¾ ou 11 : 4 = 2 + ¾ Quand on utilise le signe " : " - s'il est suivi d'un point d'interrogation (?), c'est une division avec reste ; - s'il est suivi du signe égal (=), c'est une division – fraction.

4) Fractions inférieures, égales ou supérieures à 1 (*Leçon 37*)

« ***J'ai appris*** » *:* Pour savoir si une fraction est inférieure à 1, égale à 1 ou supérieure à 1, comparer son numérateur et son dénominateur. Si le numérateur est plus petit que le dénominateur, la fraction est inférieure à 1. Si le numérateur et le dénominateur sont égaux, ... *Deux manières de raisonner sont possibles, correspondant aux deux sens des fractions. Avec 7/5 par exemple, on peut dire : soit, 7 cinquièmes, c'est plus grand que 1 parce que c'est5 cinquièmes qui est égal à 1 ; soit, en faisant la division, on voit que 7/5 = 1 + 2/5 ; 7/5 est donc plus grand que 1.*

5) Sommes de fractions décimales : ½ ; ¼ ; 1/10 ; 1/100 (*Leçons 39 et 40*)

*« **J'ai appris** » :* Pour additionner des demis et des dixièmes ... je transforme les demis en dixièmes. Pour additionner des demis, des quarts, des dixièmes et des centièmes... je transforme les demis, les quarts et les dixièmes en centièmes.
Les additions comme 2/10 + 7/100 ou 6/10 + 3/100 sont particulièrement faciles !
Comme au CM1, les seules fractions qu'on demande d'additionner sont les fractions décimales. Les élèves savent déjà transformer en centièmes : ½ ; ¼ ; 1/10 ; 2/10 ; 3/10 ... ; ils apprendront à les transformer en millièmes à la leçon 41. De ce fait, on n'a pas besoin d'enseigner une règle de « réduction au même dénominateur ». Le quadrillage découpé en centièmes qu'on utilise dans cette leçon aurait pu être plus petit. Nous avons choisi cette grande taille pour pouvoir utiliser le même quadrillage, découpé en millièmes, dans la leçon d'introduction de ces fractions.
Avec la règle graduée en dixièmes et centièmes de bâton de ski, pour tracer :
- une ligne brisée qui mesure 57/100 de bâton de ski, je peux utiliser l'égalité : 57/100 = 5/10 + 7/100 ;
- une ligne brisée qui mesure 73/100 de bâton de ski, je peux utiliser l'égalité : 73/100 = 7/10 + 3/100.

Rappelons les raisons du choix d'une unité non conventionnelle : l'addition 7/10 m + ½ m risquerait d'être traitée comme une addition d'entiers : 7 dm + 5 dm. Ici les élèves sont obligés de raisonner sur des nombres fractionnaires. Le choix d'une grande unité, le bâton de ski, permettra de faire apparaître ultérieurement les millièmes de cette unité. Du coup, la règle ne possède pas de repère « 1 », ce qui surprend les élèves. Dans l'activité 2 et les suivantes, on privilégiera les raisonnements du type : " 2/10 + 6/100 , c'est plus petit que 3/10 parce qu'il manque 4/100 pour faire 3/10 ", plutôt que de transformer systématiquement les nombres à comparer en centièmes.

6) Fractions décimales (les millièmes) : équivalences (*Leçon 41*)

*« **J'ai appris** » :* Pour comparer des **millièmes** avec des **dixièmes**, il faut transformer les dixièmes en millièmes : 1/10 = 100/1000 ; 2/10 = 200/1000 ; 3/10 = 300/1000 ; ... ;
9/10 = 900/1000 ; ...etc
Pour comparer des **millièmes** avec des **centièmes**, il faut transformer les centièmes en millièmes : 1/100 = 10/1000 ; 2/100 = 20/1000 ; 3/100 = 30/1000 ; ... 9/100 = 90/1000 ; ... ; 24/100 = 240/1000 ... etc
Pour comparer des **millièmes** avec des **demis** et des **quarts**, il faut connaître ces équivalences : 1/2 = 500/1000 ; 1/4 = 250/1000 ; 3/4 = 750/1000.
Apprendre que 67/100 = 670/1000 prépare à la compréhension du fait que 42,67 = 42,670 . Ainsi, le fait que l'on puisse écrire des zéros à droite de la partie décimale d'un nombre sans en changer la valeur n'apparaîtra pas comme un phénomène mystérieux.

7) Sommes de fractions décimales : les millièmes (*Leçons 45 et 47*)

*« **J'ai appris** » :* Pour additionner des millièmes avec des demis, quarts, dixièmes ou centièmes, je peux transformer les demis, quarts, dixièmes, etc. en millièmes.
Par exemple :
241/1000 + 3/10 = 241/1000 + 300/1000 d'où 241/1000 + 3/10 = 541/1000 ;
241/1000 + 5/100 = 241/1000 + 50/1000 d'où 241/1000 + 5/100 = 291/1000.
Certaines additions sont particulièrement faciles.
Par exemple : 9/100 + 5/100 + 7/1000 = 957/1000 ; 24/100 + 8/1000 = 248/1000 ;
3/10 + 62/1000 = 362/1000.
Pour additionner des dixièmes et des millièmes, on peut évidemment transformer les dixièmes en millièmes. Cependant, dès cette leçon, on remarque que lorsqu'on ajoute jusqu'à 7 dixièmes à 241/1000 , seul le chiffre « 2 » est transformé. Il s'agit, là encore, de se préparer à comprendre l'écriture à virgule de ces nombres.
Avec une règle graduée en dixièmes, centièmes et millièmes, pour tracer :
-une ligne brisée qui mesure 582/1000 de bâton de ski, je peux utiliser l'égalité :

582/1000 = 5/10 + 8/100 + 2/1000
-une ligne brisée qui mesure 673/1000 de bâton de ski, je peux utiliser l'égalité :
673/1000 = 6/10 + 7/100 + 3/1000
Pour tracer une ligne brisée de 578/1000 de bâton de ski, par exemple, on a intérêt à juxtaposer d'abord des segments de 1/10 , parce que cette longueur figure sur la règle. Du coup, on est conduit à utiliser la décomposition : 578/1000 = 5/10 + 7/100 + 8 /1000, dont on a souligné l'importance.

8) Situer un décimal par des encadrements successifs (*Leçon 48*)

La situation du nombre - cible
Les décimaux permettent d'approcher d'aussi près que l'on veut (au 1/10 près, etc.) la mesure de n'importe quelle grandeur continue (longueur, aire, masse, etc.). Cette propriété fondamentale est théâtralisée en classe grâce au « jeu du nombre – cible ». Avec cette double page, les élèves s'approprient la structure générale du jeu et un mode conventionnel de visualisation des nombres qui se situent à l'intérieur d'intervalles numériques emboîtés de plus en plus petits : il suffit de s'imaginer en parachutiste, dont le champ visuel est de plus en plus restreint, mais aussi de plus en plus précis, à mesure qu'il se rapproche du sol.
Pour encadrer le nombre – cible au centième près, l'interrogation orale du maître par les élèves peut prendre deux formes : « Est-il entre 56 plus 80 centièmes et 56 plus 85 centièmes ? » ou « Est-il entre 56 plus 8 dixièmes et 56 plus 8 dixièmes plus 5 centièmes ? ». A l'oral on a privilégié la première possibilité. Sinon lorsqu'on veut situer le nombre – cible entre deux millièmes, il devient fastidieux d'interroger : « Est-il compris entre 56 plus 8 dixièmes, plus 3 centièmes, plus 5 millièmes et ... ». En revanche, à l'écrit, c'est la seconde possibilité qui a été retenue. En utilisant les deux formes, les élèves continuent à s'approprier leur équivalence.

Troisième période :

9) Les écritures décimales : les dixièmes et les centièmes (*Leçons 56 et 57*)

*« **J'ai appris** » :* La touche « : » de la calculette ne calcule pas la division avec reste. Elle calcule la division – fraction, mais le résultat du partage du reste ne s'affiche pas sous la forme d'une fraction : 35,8 signifie 35 + 8/10 ou 358/10.
Cette écriture de 358/10 s'appelle une écriture décimale ou « à virgule ». Sur les machines, la virgule est souvent remplacée par un point. Le chiffre après la virgule désigne les dixièmes. 35,8 se dit " trente-cinq virgule huit dixièmes " ou " trente-cinq et huit dixièmes ". Les chiffres à gauche de la virgule forment la partie entière du nombre (ici, 35).
*« **J'ai appris** » :* Les chiffres à droite de la virgule forment la partie décimale du nombre (ici, 0,8). La partie décimale d'un nombre est toujours plus petite que 1.
35,83 signifie 35 + 8/10 + 3/100 ou 35 + 83/100 ou 3583/100
Le premier chiffre après la virgule désigne les dixièmes.
Le deuxième chiffre après la virgule désigne les centièmes.
35,83 se dit « trente-cinq virgule huit dixièmes et trois centièmes » ou « trente-cinq virgule quatre-vingt-trois centièmes ».
47,06 se dit « quarante-sept virgule six centièmes ».
La partie entière de 35,83 est 35 et sa partie décimale est 0,83.
Les élèves savent déjà résoudre les exercices proposés dans ces deux pages lorsqu'ils sont proposés avec des fractions. Mais ils ne penseront à mobiliser ces connaissances que si on les incite à oraliser les nombres écrits avec une virgule comme ils le faisaient auparavant avec les fractions, c'est-à-dire en utilisant les mots « dixième » et « centième ». Grâce à cette oralisation, l'enfant voit des nombres à virgule, mais il raisonne sur des fractions.

10) Le jeu du nombre – cible avec les écritures décimales (*Leçon 58*)

11) Les écritures décimales : les millièmes (*Leçon 59*)

*« **J'ai appris** » :* 29,659 signifie 29 + 6/10 + 5/100 + 9/1000 ou 29 + 659/1000 ou 29659/1000. Le troisième chiffre après la virgule désigne les millièmes.
29,5659 se dit « vingt-neuf virgule six dixièmes cinq centièmes et neuf millièmes » ou « vingt-neuf virgule six cent cinquante-neuf millièmes ».
92,003 se dit « quatre-vingt-douze virgule trois millièmes ».
Les élèves apprennent d'abord à interpréter ce qu'affiche une calculette lors de divisions par 1000. Ils prennent ensuite conscience qu'ils savent effectuer tous les exercices proposés, pour peu qu'ils soient attentifs à bien oraliser une écriture telle que 29,659 en explicitant ce que représentent les chiffres de la partie décimale : « vingt-neuf virgule six cent cinquante-neuf millièmes » ou « vingt-neuf virgule six dixièmes cinq centièmes et neuf millièmes ».

12) Sens des chiffres dans une mesure décimale : les longueurs (*Leçon 65*)

Dans les unités de longueur, chaque unité est le dixième de l'unité immédiatement supérieure. (...) Cela permet de comprendre n'importe quelle mesure décimale de longueur.
1,36 dm ; c'est 1 dm ; c'est 3/10 dm ou 3 cm ; c'est 6/100 dm ou 6 mm.
2,575 km ; c'est 1 km ; c'est 5/10 km ou 5 hm ; c'est 7/100 km ou 7 dam ; c'est 5/1000 km ou 5 m
Cette façon d'aborder les mesures décimales de longueur rend inutile l'usage d'un tableau dans lequel les enfants écrivent les chiffres à interpréter.

13) Sens des chiffres dans une mesure décimale : les aires (*Leçon 66*)

Dans les unités d'aires, chaque unité est le centième de l'unité immédiatement supérieure. (...) Cela permet de comprendre n'importe quelle mesure décimale d'aire.
1,3952 dm^2 ; c'est 1 dm^2 ; c'est 39/100 dm^2 ou 39 cm^2 ; c'est 52/10000 dm^2 ou 52 mm^2
Attention ! Dans 1,3 dm^2, 3 c'est 3/10 dm^2 ou 30 cm^2. Dans 1,395 dm^2, 5 c'est 5/1000 dm^2 ou 50 mm^2
Une mesure décimale d'aire est plus facile à comprendre quand elle a 2 ou 4 chiffres après la virgule : 1,3 dm^2 = 1,30 dm^2 ; 1,395 dm^2 = 1,3950 dm^2.
Dans le cas des mesures décimales d'aire, il faut se rappeler que chaque unité est le centième de l'unité supérieure. C'est pourquoi nous nous limitons aux unités inférieures au mètre carré. Il est facile d'évoquer mentalement un étalon de chacune de ces unités et ainsi de se rappeler que le dm^2 est le centième du m^2, etc.

14) Somme et différence de nombres décimaux (*Leçon 67*)

Trouver la somme de deux aires et leur différence par tracé ; les élèves prennent conscience qu'ils auraient pu trouver cette somme et cette différence avec les algorithmes qu'ils connaissent de l'addition et de la soustraction. Dans un premier temps, il est préférable de faire expliciter ce que représente chaque chiffre : « 8 dixièmes et 4 dixièmes ça fait 12 dixièmes, c'est-à-dire une unité et 2 dixièmes ». Dans le cas de la soustraction, le nombre de chiffres des deux nombres doit être égalisé.
*« **J'ai appris** » :* Pour calculer la somme de nombres décimaux (46,375 + 2,98 par exemple), je peux poser une addition en colonnes. Pour aligner les unités sous les unités, les dixièmes sous les dixièmes, les centièmes sous les centièmes, etc., il suffit d'aligner les virgules :

Je peux écrire : 46,375 ou 46,375
+ 2,98 + 2,980

Je commence mon addition par les millièmes, je continue avec les centièmes, etc.

Pour calculer la différence entre deux nombres décimaux (56,3 – 7,825 par exemple), je peux poser une soustraction en colonnes. Pour que les unités soient sous les unités, les dixièmes sous les dixièmes, etc., il suffit d'aligner les virgules :
Pour avoir le même nombre de chiffres, j'écris : 56,300
\- 7,825

15) Produit d'un nombre décimal par un entier : entier < 10 (*Leçon 70*)

« ***J'ai appris*** » : Pour calculer le produit d'un nombre décimal par un nombre entier inférieur à 10 (46,372 x 8 par exemple), je peux poser une multiplication :

46,37
x 8

Je commence mon calcul par les millièmes, je continue avec les centièmes, etc.
Dans un premier temps, pour 46,372 x 8 par exemple, on dit : " 8 fois 2 millièmes, 16 millièmes. Je pose 6 millièmes et je retiens 1 centième… ".

16) Multiplication et division d'un nombre décimal par 10 (*Leçon 73*)

« ***J'ai appris*** » : Quand on multiplie un nombre décimal par 10, le chiffre des unités devient celui des dizaines ; le chiffre des dixièmes devient …
Cela revient à décaler la virgule d'un rang vers la droite.
Par exemple : 43,794 x 10 = 437,94 ou 0,712 x 10 = 7,12
Quand on divise un nombre décimal par 10, le chiffre des unités devient celui des dixièmes. Cela revient à décaler la virgule d'un rang vers la gauche.
Par exemple : 127,84 : 10 = 12,784 ou 0,0132 : 10 = 0,00132
Pour comprendre que le chiffre des dixièmes devient celui des unités, le chiffre des centièmes celui des dixièmes ..., on peut se référer à la ligne brisée et calculer « de gauche à droite » : les 10 dixièmes forment une unité (1 bâton de ski) ; les 10 fois 3 centièmes donnent 30 centièmes, soit 3 dixièmes, etc.

17) Multiplication et division d'un nombre décimal par 10, 100, 1000, etc.(*Leçon 74*)

« ***J'ai appris*** » : Quand on multiplie un décimal par 100, le chiffre des unités devient celui des centaines ; le chiffre des dixièmes devient …Cela revient à décaler la virgule de 2 rangs vers la droite.
Par exemple : 43,794 x 100 = 4379,4 ou 0,725 x 100 = 72,5
Quand on divise un décimal par 100, le chiffre des unités devient celui des centièmes.
Cela revient à décaler la virgule de 2 rangs vers la gauche.
Par exemple : 127,84 : 100 = 1,2784 ou 0,073 : 100 = 0,00073
La règle de déplacement de la virgule conduit à des cas particuliers : multiplier 3,2 par 1000, par exemple. Aussi convient-il d'insister sur la nécessité de contrôler le résultat en s'intéressant à ce que devient l'un des anciens chiffres (celui des unités le plus souvent) à l'issue de cette opération.

18) Produit d'un nombre décimal par un entier : entier quelconque (*Leçon 75*)

« ***J'ai appris*** » : Pour multiplier un nombre décimal par un nombre entier, je fais comme s'il n'y avait pas de virgule, mais je la replace une fois le calcul terminé.
Par exemple pour 34,596 x 923 : je calcule 34596 x 923 mais j'obtiens le résultat en millièmes : 31 932 108 ; je replace la virgule 34,596 x 923 = 31 932,108.
Ici, il y a 3 chiffres après la virgule, au résultat, il faut aussi 3 chiffres après la virgule.

19) Quotient décimal d'une division (*Leçon 80*)

« ***J'ai appris*** » : Quand on divise un nombre décimal par un nombre entier, après le partage des unités, on peut partager les dixièmes, puis les centièmes, etc.
On obtient un quotient décimal. Quand le dividende est plus petit que le diviseur, le quotient décimal commence par 0,…

Paradoxalement, le cas où l'on divise un décimal par un entier est plus facile que celui où c'est un entier que l'on divise par un autre entier car il est alors naturel de poursuivre le partage au-delà des unités. Les divisions de cette leçon « tombent juste ». (...) À partir de cette leçon, on pourra proposer aux élèves de vérifier leurs calculs de divisions sur la calculette plutôt qu'en faisant la preuve. En effet, les calculs devenant de plus en plus complexes, la preuve risque de prendre une place disproportionnée dans le temps des élèves.

20) Quotient décimal d'une division (*Leçon 81*)

*« **J'ai appris** » :* Le quotient d'une division – fraction peut s'exprimer de deux façons :
- sous forme fractionnaire, par exemple 73 : 8 = 9 + 1/8 ;
- sous forme décimale, en « poussant la division après la virgule », par exemple 73 : 8 = 9,125.

Quand le dividende est plus petit que le diviseur, le quotient est inférieur à 1, il commence par 0,...
Dans certains problèmes de division, cela n'a pas de sens de chercher un quotient décimal.

21) Division par 2 et 4 : calcul mental du quotient décimal (*Leçon 83*)

*« **J'ai appris** » :* Chercher la moitié d'un nombre, c'est le diviser par 2.
La moitié d'un nombre impair est un nombre décimal qui se termine par 5 dixièmes.
Par exemple, 27 : 2 = 13 + ½ , ou 27 : 2 = 13,5
Chercher le quart d'un nombre, c'est le diviser par 4.
Quand le reste de la division est égal à 1, le quotient décimal se termine par ...,25
Quand le reste de la division est égal à 2, ...

22) Division décimale : quotient approché (*Leçon 85*)

*« **J'ai appris** » :* Certaines divisions « ne tombent jamais juste », il faut décider si on s'arrête au 1/10 ou au 1/100 ou au 1/1000 ou ...
Par exemple, si on calcule 10 : 7 en s'arrêtant au 1/10000 près, 1,428**5** est une approximation par défaut ; 1,428**6** est une approximation par excès.
Dans le cas des mesures de longueur et d'aire, il faut décider la précision recherchée :
Si on calcule 10 km : 7 et qu'on veut être précis au dm près, on s'arrête au 1/10000.
Si on calcule 10 dm^2 : 7 et qu'on veut être précis au cm^2 près, on s'arrête au 1/100.
Dans l'activité 1, les élèves découvrent que certaines divisions décimales ne s'achèvent jamais.
Dans l'activité 2, on utilise à nouveau le contexte du parachutiste qui s'approche de plus en plus d'un nombre a : b. Les approximations successives correspondent aux quotients décimaux successifs de la division. La tour de contrôle, elle, fournit des encadrements décimaux de plus en plus fins. Dans le cas d'un contexte de mesure (longueur ou aire), c'est la connaissance du système d'unités qui permet de savoir à quel rang il convient de s'arrêter : le mm, par exemple, correspond au 1/1000 m.

23) Multiplier / diviser pour convertir des mesures décimales (longueur et aire) : cas simples (*Leçon 88*)

*« **J'ai appris** » :* Pour convertir une mesure décimale de longueur ou d'aire, je raisonne comme dans la conversion des mesures entières. Si je passe d'une unité à une unité plus petite, je calcule une multiplication :
3,27 dm = 32,7 cm (j'ai multiplié par 10)
3,27 dm^2 = 327 cm^2 (j'ai multiplié par 100).
Si je passe d'une unité à une unité plus grande, je calcule une division :
401,58 dm = 40,158 m (j'ai divisé par 10)

401,58 dm^2 = 4,0158 m^2 (j'ai divisé par 100).
Les élèves, de nouveau, doivent mobiliser leurs connaissances sur les rapports entre unités (de longueur et d'aire). Il s'agit aussi d'un nouveau contexte pour mettre en œuvre la multiplication et la division d'un décimal par 10, 100, 1000, etc. et pour approfondir la réversibilité de ces opérations.

Quatrième période :

24) Multiplier et diviser pour convertir des unités de capacité (*Leçon 95*)

25) Multiplier et diviser pour convertir des mesures de masse (cas général) (*Leçon 100*)

26) Calculer 4,5 fois n (vers la multiplication d'un entier par un décimal) (*Leçon 108*)

La multiplication d'un décimal par un entier a été introduite dans des situations où on cherchait le résultat de n fois un décimal. C'était donc le nombre décimal qui était réitéré. On aborde ici, dans des cas simples, une situation où l'entier est réitéré en cherchant : « 4 virgule cinq dixièmes de fois n ».

27) Les changements d'unité : utiliser un tableau de conversion (*Leçon 111*)

Nous avons différé à la fin du CM2 l'usage des tableaux de conversion. Ce choix se justifie du fait qu'avec cet outil, les élèves peuvent effectuer les conversions sans s'intéresser à la grandeur de chaque unité et sans connaître les rapports entre unités. Nous avons déjà souligné les bienfaits attendus des stratégies alternatives privilégiées jusqu'ici. On sera attentif à relier les deux stratégies, par exemple en faisant remarquer que, dans le tableau, déplacer la virgule de 1, 2, 3 ... rangs vers la gauche (ou vers la droite), revient à diviser (ou multiplier) par 10, 100, 1000 ... On introduit aussi les notions de dam^2, hm^2 et km^2 .

28) Prendre la fraction d'un nombre (*Leçons 114, 115 et 116*)

Le point sur les situations introductrices :

En CM1 :

Les écritures fractionnaires sont introduites pour la première fois en début de période 3 (*séquences 58 et 59 p 86 à 88*). C'est une séquence de type construction (deux séances que l'auteur nomme séquences).

L'objectif de la première séance, intitulée « Une nouvelle division et de nouveaux nombres », est de donner du sens aux écritures fractionnaires avec les choix des dénominateurs 3 puis 10 (fractions décimales) dans des activités de partage de grandeurs continues, en différenciant la division euclidienne de la nouvelle division (division dans l'ensemble des rationnels appelée division-fraction). Il s'agit également d'apprendre, dans ce contexte, à calculer la partie entière d'un rationnel.

Pour cette première séance, les élèves sont invités à comprendre, avec l'aide du maître, le sens de cette nouvelle division et à entraîner cette connaissance dans « le calcul de divisions–fractions » avant de résoudre des problèmes de partage dans les deux contextes : division euclidienne (division avec reste déjà connue) et division dans Q (division-fraction nouvellement introduite).

L'auteur privilégie les dénominateurs inférieurs à 10. Les fractions décimales et le dénominateur 25 sont également choisis, ils permettent d'effectuer des calculs mentaux.

Pour la seconde séance, intitulée « Fractionnement de l'unité en parts égales », l'objectif est de montrer aux élèves que les écritures fractionnaires ne s'utilisent pas dans le cadre de partages inégaux.

Les enfants doivent rechercher les partages qui correspondent aux rationnels $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{10}$.

Les écritures fractionnaires sont donc introduites sous leur aspect « a : b » dans le cadre « Partage ».
La signification $\frac{a}{b}$ comme a divisé par b est définie et toutes les recherches de la partie entière d'un rationnel sont rendues possibles en lien avec la division euclidienne.
Ainsi $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$; $\frac{12}{10} = 1 + \frac{2}{10}$; $\frac{702}{100} = 7 + \frac{2}{100}$; $\frac{7041}{1000} = 7 + \frac{41}{1000}$.
Remarque : un abus qui consiste à parler du « calcul d'une division-fraction ».

<u>En CM2</u> :

Les écritures fractionnaires sont réintroduites pour la première fois en début de période 2 (*séquences 31, 32 et 33 p 48 à 50*). C'est une séquence de type construction (trois séances).

L'objectif est de réintroduire les écritures fractionnaires en assurant le lien entre les deux aspects : l'aspect « a : b » et l'aspect « a bièmes ».

Au cours de la première séance intitulée « 5 divisé par 6, c'est aussi 5 sixièmes », les élèves découvrent différentes méthodes de partage de baguettes ou de pizzas dans le cas de rationnels inférieurs à 1.

Dans la deuxième séance « Fractions équivalentes < 1 », les élèves découvrent ou retrouvent les égalités fondamentales qui concernent les fractions décimales dixièmes et centièmes.

Dans la troisième séance « 11 divisé par 4 c'est aussi 11 quarts », les enfants travaillent sur des situations de partage dans les deux contextes division euclidienne et division dans Q (rationnels supérieurs à 1).

Les écritures fractionnaires sont donc réintroduites sous leurs aspects « a : b » et « a bièmes » dans le cadre « Partages ».
Les deux écritures et les deux lectures sont assurées : $\frac{5}{6} = 5 : 6$
$\frac{5}{6}$ c'est 5 divisé par 6 mais aussi 5 sixièmes.
Les égalités fondamentales sont institutionnalisées :
$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$; $\frac{3}{4} = \frac{75}{100}$; $\frac{1}{10} = \frac{10}{100}$; etc..
La recherche de la partie entière est réactivée : $\frac{23}{4} = 5 + \frac{3}{4}$; $8207 : 100 = 82 + \frac{7}{100}$

5. LA COMPARAISON DES FRACTIONS ET DES DECIMAUX DANS LES MANUELS - SYNTHESE DES GROUPES

<u>Consigne :</u> « Après avoir échangé à partir des grilles précédentes, vous devez vous intéresser plus particulièrement aux séances portant sur la comparaison des « nouveaux nombres », au CM1 et au CM2 dans la collection étudiée, en identifiant les procédures privilégiées. Votre travail sera présenté sur une grande affiche et permettra ainsi une étude comparative en grand groupe. »

Nouvel objectif Calcul - Hatier			
Niveau Période	**Type de la séance**	**Contexte**	**Procédures privilégiées Écritures**
CM1 Période 4	Introduction des fractions	Mesure de longueur (aspect *a* *b*ièmes)	• écritures additives et soustractives - fractions • rangement de segments (du plus court au plus long) • recopier le rangement des mesures correspondantes • cherche à faire ressortir les conceptions erronées des élèves (par exemple en comparant 6,101 et 6,21)
	Comparaison de fractions décimales	Cadre numérique	• Encadrement de fractions décimales par deux entiers consécutifs
	Comparaison de nombres décimaux		• écritures fractionnaires, décimales • placement sur une droite graduée • procédure privilégiée : comparer les parties entières, puis les dixièmes, ...
CM2 Période 2	Comparaison	Mesure (vérification) Repérage (aspects : *a* *b*ièmes et quotient)	• trouver le nombre décimal lié à une fraction (pas forcément décimale, parfois le nombre décimal est une valeur approchée de la fraction), et inversement • comparaison des nombres décimaux dont certains sont des valeurs approchées de fractions (aspect continu) • grandeurs : longueur et aire • validation par représentation de segments, avec la machine à partager • établissement de règles

Cap Maths - Hatier		
Niveau	**Période**	**Progression**
CM1	Période 3	Comparaison de fractions usuelles via des petits problèmes : • Comparaison de fractions à 1 • Encadrement de fractions par deux entiers (support : droite graduée)
	Période 4	• Reprise de ces activités avec des fractions décimales • Comparaison de nombres décimaux en utilisant leur écriture décimale.
	Période 5	Situation de recherche : rangement de surfaces → intercalation par comparaison d'aire
CM2	Dès la période 1	Évaluation diagnostique de la dernière compétence vue en CM1, c'est-à-dire concernant les écritures décimales
	Période 1	• Comparaison en utilisant les écritures décimales dans un contexte de mesure (on s'appuie sur la valeur positionnelle des chiffres → travail sur le sens) • Intercalation • Comparaison sur la droite numérique (dixième, ...).
	Période 2	• Recontextualisation → mesures de longueurs. • À partir de mesures, élaboration d'une méthode de comparaison de deux nombres décimaux (reprise dans le « Dico Maths »).

Diagonale – Nathan (Édition 2002)		
Niveau	**Période**	**Progression**
CM1		Dans le chapitre Fractions, on relève la présence d'un encadrement : …/5 de u < c < … /5 de u
	Périodes 2 et 3	• Activité d'introduction : « Le conseil de l'Europe : nombre d'habitants ». - Le mot **comparer** n'apparaît pas - Les tâches : Encadrement 4 < … < 5 Rangement dans l'ordre croissant à partir d'une mesure (20 M hab) Rangement dans l'ordre croissant de tous les pays • Exercices - Supports : Tableau de nombres « à effacer » Droite numérique : marquer des points dont on donne l'abscisse Tableau de numération avec écritures différentes - Utilisation des symboles = < - Tâches : Placer des décimaux sur une droite numérique Encadrer
		• Trouver des nombres décimaux égaux écrits de façons différentes • Ranger sur une droite graduée en dixièmes • Zoom pour placer des nombres entre 1,2 et 1,3 • Repérer des nombres sur une droite graduée • Intercaler des décimaux entre deux entiers • Ranger des décimaux en les plaçant sur une droite numérique entre deux nombres : 3,1 et 3,2 • Dégager un algorithme de rangement de plusieurs décimaux (comparaison chiffre à chiffre si partie entières égales) • Intercaler des décimaux entre deux nombres
		• Comparer un décimal et un entier • Mise en place d'un algorithme : comparaison des nombres de gauche à droite dans la partie décimale
CM2	Période 2	• Présentation de deux techniques : - mise au même format - algorithme • Fraction décimale : réinvestissement de la comparaison algorithmique des décimaux

J'apprends les maths - Retz		
Niveau	**Période**	**Progression**
CM1	Période 3	• Comparer ¼ et 21/100 : construction d'équivalences puis comparaison à l'aide de quadrillages • Comparaison d'aires colorées qui sont des fractions d'un même carré • Écritures fractionnaires, fractions inférieures à l'unité • Reconnaître des fractions < 1 ; = 1 ou > 1 en comparant numérateur et dénominateur • Des lignes de partage sont amorcées, l'élève est invité à imaginer le quadrillage pour par exemple comparer ½ et 3/10
	Période 4	Pour comparer les décimaux, on se ramène à l'écriture : partie entière + fraction inférieure à 1
CM2	Période 2	Procédure : il faut savoir que ½ = 2/4 = 5/10 = 50/100 ... • Pour les fractions supérieures à 1, décomposition partie entière + reste • Pour comparer des millièmes avec des dixièmes, on transforme les dixièmes en millièmes

6. CONCLUSION

Quelle conclusion envisager ?

- Sur les contenus des manuels (proximité , différences , cohérence interne, manques ...) ;

- Sur la mise au travail des participants (ampleur de la tâche ... mais nécessité de se coller à ce travail régulièrement pour un formateur ... tenir compte des ressources disponibles pour rester proche des préoccupations et des activités effectives des stagiaires et des débutants) ;

- Sur les activités de ce type à mener avec des PE2 : comment les inciter à ce type d'analyse, quel recul nécessaire, jusqu'où aller ? nature des apports du formateur ... pendant les cours, en dehors des cours ...