ATELIER D

Titre : Analyse de manuels scolaires sur la division euclidienne

Auteurs : Gaby LE POCHE (IUFM de Bretagne- IREM de Rennes),
Catherine TAVEAU (IUFM de Paris- IREM Paris VII)

Date : novembre 2004 (Draguignan).

Résumé L'atelier propose.de montrer comment mener une exploitation de manuels scolaires sur un thème, ici la division euclidieenne au cycle 3.

I. PRESENTATION DE L'ATELIER

Au cours de cet atelier, les participants sont amenés à analyser des manuels de quatre collections : « Cap Maths » (Hatier), « Nouvel Objectif Calcul » (Hatier), « Diagonale » (Nathan) et « J'apprends les maths » (Retz) de CE2, CM1 et CM2, selon une grille d'analyse fournie par les animateurs.

Chaque stagiaire dispose d'un ouvrage de niveau déterminé (livre de l'élève et livre du maître).

L'atelier se déroule en deux temps bien distincts :

- apporter aux participants les informations concernant le vocabulaire utilisé dans les rubriques de la grille d'analyse ;
- effectuer une analyse des manuels concernés.

Pour découvrir les trois manuels d'une même collection, l'analyse s'effectue en trois phases :

Phases	Structure pédagogique Pour un groupe de 24 personnes (4 collections, 3 niveaux, 2 personnes par ouvrage)	Objectif	Tâche
Première phase	Par binôme sur un même manuel scolaire. *Exemple* : les 6 personnes pour la collection « Cap Math » se répartissent en une doublette pour le CE2, une doublette pour le CM1 et une doublette pour le CM2.	Débuter une analyse fouillée de l'ouvrage pour se l'approprier et découvrir les situations proposées dans le cadre d'une progression-programmation sur la division euclidienne.	Remplir par personne les différentes rubriques de la grille proposée.
Deuxième phase	Pour la deuxième phase, les doublettes se séparent pour former deux groupes A et B, constitués chacun des trois personnes (CE2+CM1+CM2). Les groupes A et B travaillent en parallèle et de façon séparée, sur une	Pour une collection déterminée, rendre compte de l'évolution des procédures tout au long du cycle et de la technique opératoire retenue.	Produire un écrit de communication renseignant sur l'évolution des procédures et sur la technique

	même collection. Les 3 personnes d'un même groupe sont issues des doublettes ayant étudié les ouvrages de CE2, CM1 et CM2.		retenue.
Troisième phase	Synthèse en grand groupe.	Mettre en évidence les choix différents opérés par les différentes collections.	Présenter les analyses à l'aide du transparent.

II. LE POINT SUR LE VOCABULAIRE EMPLOYE DANS LA GRILLE PROPOSEE

2.1 La typologie de VERGNAUD[9]

Quatre grandes classes de problèmes de proportionnalité simple

G1	G2
1	a
b	?

La multiplication

G1	G2
1	?
b	c

La division partition

G1	G2
1	a
?	c

La division quotition

G1	G2
a	b
c	?

La quatrième proportionnelle

Exemples[10] :

Un nageur parcourt 2 400 m dans une piscine. La longueur du bassin est de 50 m. Combien de longueurs de bassin le nageur doit-il parcourir ?

Cardinal Nombre de bassins.	Longueur en mètres. Distance parcourue.
1	50
?	2400

Il s'agit d'une **division quotition.**
Les procédures additives ou soustractives ont du sens. (50m + 50m pour 2 longueurs de bassin parcourues ou 2400m – 50m pour une longueur de bassin)

Une école commande des livres de mathématiques. Il faut payer, en tout 2703 F pour les 53 livres commandés. Quel est le prix d'un livre de mathématiques ?

Cardinal Nombre de livres.	Prix en francs. Somme payée.
1	?
53	2703

Il s'agit d'une **division partition.**
Les procédures additives ou soustractives sont peu significatives. (exemple : 2703 – 53 un prix et un cardinal …)

---

[9] Réf : Le Moniteur de mathématiques Nathan 2004.
[10] Réf : La division en formation initiale Concertum tome 2 ARPEME 2003

2.2 Le type de séquence

Voici différents types de séances que l'on peut repérer dans les manuels.

Approche ou *première rencontre* : pour une aide à un diagnostic.
Construction : pour faire acquérir une connaissance.
Consolidation : - pour entraîner la connaissance dans le même contexte ou en dehors de tout contexte ;
- pour réinvestir la connaissance dans un autre contexte.

2.3 Les différentes procédures[11]

Il est possible de définir plusieurs niveaux de procédures et plusieurs types de calculs.

NIveaux	Niveau 1 Simulation de l'action	Niveau 2 Calculs	Niveau 3 Calculs experts
Procécures et types de calcul	Matériel Dessins Représentations	Calculs additifs Calculs soustractifs Calculs multiplicatifs Calculs mixtes	• Procésures canoniques (deux raisonnements). **C1** : recherche des meilleurs multiples du diviseur ; *ou* **C2** : partage des groupements de numération composant le dividende. • Calculs pensés

Présentation des deux procédures canoniques.

<u>Procédure 1</u> : recherche des meilleurs multiples du diviseur à chaque étape du calcul.
Cette procédure s'appuie sur les procédures multiplicatives spontanées des élèves qui ont du sens dans le cadre des situations de type division partition comme de type division quotition.

Exemple de la division euclidienne de 6658 par 27.

Au CM1

$100 \times 27 < 6658 < 1000 \times 27$

Cette inégalité permet d'anticiper le nombre de chiffres au quotient euclidien.
En général, l'enseignant fournit à l'élève le tableau des multiples du diviseur.

1	*27*	*10*	*270*	*100*	*2700*
2	*54*	*20*	*540*	**200**	**5400**
3	*81*	*30*	*810*	*300*	
4	*108*	**40**	**1080**	*400*	
5	*135*	*50*	*1350*	*500*	
6	**162**	*60*	*1620*	*600*	
7	*189*	*70*	*1890*	*700*	
8	*216*	*80*	*2160*	*800*	
9	*243*	*90*	*2430*	*900*	

[11] Rencontres pédagogiques n° 4 (1984) Comment font-ils ? L'écolier et le problème de mathématiques » (publication I.N.R.P.)

L'égalité caractéristique traduit les calculs effectués :
6658 = (27 x 246) + 16.

	6 658	27
-	5 400	200
	1 258	+
-	1 080	40
	178	+
-	162	6
	16	246

Au CM2

$100 \times 27 < 6658 < 1000 \times 27$ (3 chiffres au quotient euclidien).

L'élève est amené à reconstruire partiellement les tableaux de multiples en s'appuyant sur **les propriétés de linéarité.**

1	*27*
2	*54*
4	*108*
6	**162**

10	*270*
20	*540*
40	**1 080**

100	*2 700*
200	**5 400**

	6 658	27
-	5 400	246
	1 258	
-	1 080	
	178	
-	162	
	16	

6658 = (27 x 246) + 16.
L'égalité caractéristique permet également de vérifier la justesse des calculs.

<u>Procédure 2</u> : partage des groupements de numération dividende

Cette procédure est peu naturelle et doit être enseignée aux élèves.

Elle suppose une bonne compréhension de la numération et a plus de sens dans le cadre de situations de type division partition.

Au CM1

En général un seul chiffre au diviseur.
Exemple de la division euclidienne de 346 par 3 :
346 = (115x3) + 1

	C	D	U			
	3	4	6			3
-	3			C	D	U
	0	4		1	1	5
-		3				
		1	6			
-		1	5			
			1			

Au CM2

	M	C	D	U			
	6	6	5	8		2	7
-	5	4			C	D	U
	1	2	5		2	4	6
-	1	0	8				
		1	7	8			
-		1	6	2			
			1	6			

6 658 = (27 x 246) +16

III. L'ANALYSE DES MANUELS. PRODUCTIONS DES STAGIAIRES.

Quelques productions de stagiaires ont été reprises pour être éventuellement complétées et réorganisées. Elles constituent une synthèse partielle des travaux des différents groupes.

Les termes employés correspondent au travail effectif des groupes et peuvent être discutés. Nous ne reproduisons ici que les synthèses pour chaque collection et ne laissons en annexe que le contenu des grilles pour la collection de « Cap maths » à titre d'exemple.

3.1 « CAP MATHS » Hatier

Analyse sommaire de la progression programmation concernant la division euclidienne - évolution des procédures : vers la technique opératoire.

CE2

- Addition itérée du diviseur (6 et 10) : conduire les élèves à utiliser des multiplications du diviseur par 10 ou 100.
- Calcul réfléchi : trouver combien de fois un nombre est contenu dans un nombre donné
- Utilisation des résultats des « tables » et des multiples du diviseur. Sinon :
    - utilisation du matériel ,
    - schématisation,
    - essai de produits et ajustements,
    - utilisation de la moitié.

CM1

Période 2 : Division quotition :

* utilisation du matériel par un groupe témoin
* schématisation
* addition ou soustraction itérée de 6 ou d'un multiple de 6
* essai de produits et ajustements
* combinaison de ces procédures

- Idem avec le diviseur 26 avec utilisation de la touche de la calculatrice pour vérifier.

Période 3 : Division partition

* Progression identique.

Période 5 : Technique opératoire

* Partage des groupements de numération
* Utilisation de la « disposition avec potence »

3.2 « LE NOUVEL OBJECTIF CALCUL » Hatier

Analyse sommaire de la progression programmation concernant la division euclidienne - évolution des procédures : vers la technique opératoire.

CE2

En quatre séances, on passe d'une procédure matérielle avec des petits nombres, à une procédures de soustractions de multiples du diviseur avec de grands nombres.
Symbolisation : $a = (b \times q) + r$.
Disposition : soustractions successives.

CM1 (en huit séances et en trois étapes)

Etape 1 : procédures libres.
Etape 2 : optimisation de la technique de soustraction des multiples du diviseur.
Etape 3 : enseignement de la disposition traditionnelle à l'aide de la potence (technique des meilleurs multiples) et découverte d'autres techniques en usage.
Exemple 4732 ⊢ 16
$16 \times 100 < 4732 < 16 \times 1000$ donc 3 chiffres pour le quotient euclidien.

16 x 1 = 16	les centaines		$\boxed{4\ 7}$		3	2	1	6		
16 x 2 = 32	2 centaines de fois 16	-	3	2	0	0	2	9	5	
16 x 3 = 48	les dizaines		$\boxed{1\ 5\ 3}$			2				
16 x 4 = 64	9 dizaines de fois 16	-	1	4	4	0				
16 x 5 = 80	les unités			0	$\boxed{9\ 2}$					
16 x 6 = 96	5 fois 16			-	8	0				unités
16 x 7 = 112					1	2			dizaines	
16 x 8 = 128							centaines			
16 x 9 = 144										

CM2

Redécouverte des différentes techniques de division euclidienne puis mise en œuvre dans un problème complexe.

3.3 « DIAGONALE » Nathan

Analyse sommaire de la progression programmation concernant la division euclidienne - évolution des procédures : vers la technique opératoire

CE2

L'objectif est d'aller vers une technique de la division posée : celle des « meilleurs multiples à chaque étape des calculs ».

Dans les situations, les élèves utilisent des procédures soustractives, additives et multiplicatives.

L'enseignant leur enseigne la disposition :

	5	9	7		4		
-	4	0	0	1	0	0	(100 x 4 = 400)
	1	9	7				
-	1	6	0	+	4	0	(40 x 4 = 160)
		3	7				
	-	3	6	+		9	(9 x 4 = 36)
			1	1	4	9	

Symbolisation : a = (b x q) + r
Disposition : soustractions successives.
Situation de référence : distribution de cartes 1 à 1 et mise en tableau

CM1 (en huit séances et en trois étapes)

- Première étape : recherche du nombre de chiffres du quotient euclidien par un encadrement.

Nouveauté : la somme des quotients intermédiaires n'est plus posée.
Encadrement : 4 x 100 < 597 < 4 x 100O ; il y a donc 3 chiffres au quotient euclidien.

	5	9	7		4	
-	4	0	0	1	4	9
	1	9	7	c	d	u
-	1	6	0			
		3	7			
	-	3	6			
			1			

CM2 (en huit séances et en trois étapes)

Nouveautés : - le diviseur a jusqu'à 3 chiffres,
- le nombre de chiffres au quotient euclidien est anticipé,
- les meilleurs multiples semblent fournis par la calculatrice.

3.4 « J'APPRENDS LES MATHS» Retz

Analyse sommaire de la progression programmation concernant la division euclidienne - évolution des procédures : vers la technique opératoire

CE2

L'objectif est de parvenir en fin d'année à une technique posée : utiliser la décomposition canonique du nombre entier et partager successivement les centaines, dizaines et unités avec un appui sur une schématisation.

En Atelier de Résolution de Problèmes, apparaît une production d'élève avec la disposition « potence ».

Au début, les pluralités de procédures sont envisagées puis la procédure multiplicative est privilégiée et enseignée.

Il en est de même pour la procédure mixte à partir du milieu de l'année, celle-ci est accompagnée du formalisme : $a = (b \times q) + r$

remplacé très vite par $a : b\ ? \begin{array}{l} \nearrow q = \\ \searrow r = \end{array}$

CM1

Une pluralité de procédures est acceptée au départ puis la procédure mixte est privilégiée et institutionnalisée avec le formalisme :

$a : b\ ? \begin{array}{l} \nearrow q = \\ \searrow r = \end{array}$ durant le premier quart de l'année.

La technique « potence » est introduite au cours de la quatrième période, pour traiter un problème de division quotition (division par 25) avec un glissement de sens pour revenir un problème de division partition.

Il s'agit donc de la technique des partages successifs des centaines, dizaines et unités. La disposition traditionnelle « potence » est retenue avec repérage des groupements de numération.

CM2

- La technique de la division euclidienne avec 2 chiffres au diviseur est enseignée (repérage du nombre de chiffres au quotient euclidien).

À partir de la décomposition canonique : opérations successives de partage des centaines, dizaines et unités (référence appuyée sur le partage équitable), passage par l'arrondi du diviseur, disposition en potence avec repérages des différents groupements.

Formalisme $a : b\ ? \begin{array}{l} \nearrow q = \\ \searrow r = \end{array}$

- Division « avec partage du reste »
- Formalisme $a : b = q + \frac{r}{b}$

IV. CONCLUSION

L'étude des quatre collections permet de mettre en évidence des différents choix proposés par les auteurs en ce qui concerne le symbolisme employé et la technique opératoire retenue.

Ceux-ci diffèrent très nettement d'un ouvrage à l'autre.

Les structures pédagogiques employées lors de cet atelier sont reproductibles avec les professeurs des écoles de deuxième année dans le cadre d'une étude de manuels scolaires.

ANNEXE

« Cap Maths » Hatier - Grilles d'analyse produites par les participants du séminaire

Niveau	Période	Type de séquence	Objectifs du maitre	Typologie de Vergnaud Contexte	Procédures envisagées	Symbolisme Disposition
CE2	1	Première approche	Compter de n en n Vers la notion de multiples	Une situation partition Une situation quotition	Comptage de n en n (de 4 en 4 ou de 5 en 5)	Pas de symbolisme spécifique Pas de disposition particulière. En général, production de l'égalité caractéristique
	2	Approche	Résolution de problèmes en renforçant les procédures multiplicatives	Quotition dans un contexte cardinal	- addition itérée en utilisant des multiples - numération (nombre de dizaines) - multiplication par 10	
	4	Construction	Vers une procédure privilégiée	Quotition puis partition dans un contexte ordinal	- matériel et schématisation - addition itérée (de n en n) **- recours à la multiplication (tables de multiples)**	
	4	Consolidation	Renforcer l'utilisation de multiples sympathiques	Quotition dans un contexte de longueurs	- schématisation - addition ou soustraction itérée - utilisation de la numération dans la division par 10 2416 = (241 x 10) + 6	