

À PROPOS DE L'ENSEIGNEMENT DES SOLIDES : QUELLES MATHÉMATIQUES FAIRE VIVRE À L'ÉCOLE ? QUELS OUTILS POUR LA FORMATION DES MAÎTRES ?

Jean-Claude AUBERTIN

Yves GIRMENS

Claude MAURIN

Louis ROYE

Formateurs en IUFM, membres de la Copirelem

Résumé

Cet atelier prolonge la réflexion de la Copirelem sur les finalités de l'enseignement des mathématiques à l'école qui s'est concrétisée par un atelier proposé lors du colloque du XXXI^e colloque à Foix.

Ce premier travail avait permis de dégager trois orientations autour desquelles s'organise l'enseignement des mathématiques : rationalité et raisonnement, culture, intégration sociale et citoyenne.

Cette fois-ci, l'atelier a pour objectif d'étudier comment il est possible d'intégrer ces orientations dans les actions de formation des maîtres afin qu'elles participent à la construction de leur rapport aux mathématiques. La réflexion s'appuie sur deux situations de formation concernant les solides qui peuvent être transposées en cycle 3.

Mots-clés : Rationalité - argumentation - référent culturel - modèle.

I – INTRODUCTION

L'atelier s'inscrit dans la continuité d'une réflexion engagée par la Copirelem sur le questionnement « Quelles mathématiques faire vivre à l'école ? Quels outils pour la formation des maîtres ? ». Cette réflexion a déjà donné lieu à deux ateliers lors du colloque précédent de Foix, l'un à propos de l'enseignement de la soustraction, l'autre, animé par les mêmes formateurs présents, à partir des solides.

Cette première étape a conduit à mettre en évidence trois grandes orientations de l'enseignement des Mathématiques à l'école : La rationalité et le raisonnement, la culture, l'intégration sociale et la formation du citoyen.

L'atelier a pour objectif d'étudier de quelle manière on peut faire intervenir ces trois orientations en formation à propos de situations de formation sur les solides, afin que les personnes en formation prennent en compte ces orientations pour faire vivre à leurs élèves des situations analogues.

L'atelier se déroule en deux temps : la première partie vise à permettre aux participants de s'approprier deux situations susceptibles d'être proposées en formation des professeurs des écoles : « le solide caché » proposé par Louis Roye, puis « le cube Soma » présenté par Claude Maurin ; en deuxième partie, il est proposé aux participants de réfléchir à la manière dont on peut les exploiter en formation, en mettant en évidence les orientations évoquées plus haut - pour qu'elles puissent servir d'appui à ces maîtres quand ils proposeront ces situations à leurs élèves.

II – ÉTUDE DES SITUATIONS

II – 1 Le Solide Caché

II – 1.1 Description de la situation

Un solide est caché dans une boîte. Afin de le reproduire à l'identique, il s'agit, par groupes de 4, d'en réaliser un patron par un jeu de questions fermées posées à un groupe auquel le solide a été préalablement remis. Les questions sont fermées dans le sens où les réponses ne peuvent être que "oui", "non" ou un nombre. Si les questions sont imprécises ou incompréhensibles, la réponse sera "on ne peut pas répondre".

Il est convenu que l'enseignant écrit au tableau, en abrégé, les questions et les réponses pour une étude ultérieure.

Quand les indications recueillies par le jeu "questions-réponses" sont jugées suffisantes ; dans chaque groupe, chacun tente de construire un patron correspondant aux informations afin de réaliser le solide envisagé. Les différentes productions sont d'abord comparées entre elles puis au solide modèle.

On procède alors à l'examen critique du questionnaire : questions imprécises qui n'ont pas reçu de réponses, questions superflues, etc.

II – 1.2 Mise en situation et recherche

Trois groupes « Questions » sont constitués (GQ) formés de trois ou quatre personnes. Les groupes « Questions » ne connaissent pas le solide caché et se concertent pour choisir des questions à poser en vue de le déterminer.

Un groupe « Réponses » (GR), composé de deux personnes qui disposent du solide a comme tâche de prévoir les questions qui pourraient leur être posées et de préparer des réponses à donner à ces questions.

II – 1.3 Phase de questions – réponses

Les groupes « questions » (GQ) posent, à tour de rôle, des questions au groupe-réponse qui répond par oui ou par non. L'animateur a écrit les questions et réponses au tableau :

GQ1 : <i>Le solide a-t-il des faces ?</i>	<i>Oui</i>
GQ2 : <i>Est-ce un polyèdre ?</i>	<i>Oui</i>
GQ3 : <i>Quel est le nombre de faces ?</i>	<i>5</i>
GQ1 : <i>Combien y a-t-il de natures de faces différentes ?</i>	<i>3</i>
GQ2 : <i>Comprend-il des faces triangulaires ?</i>	<i>Oui</i>
GQ3 : <i>Comporte-t-il des faces polygones réguliers ?</i>	<i>Oui</i>
GQ1 : <i>Quel est le nombre maximal de côtés pour une face ?</i>	<i>4</i>
GQ2 : <i>Ne comprend-il que des triangles et des quadrilatères ?</i>	<i>Oui</i>
GQ3 : <i>Tous les polygones sont-ils réguliers ?</i>	<i>Non</i>

GQ1 : Possède-t-il un plan de symétrie ?	Oui
GQ2 : Y a-t-il des triangles non équilatéraux ?	Oui
GQ3 : Est-il concave ?	Non
GQ1 : Combien a-t-il d'arêtes ?	8
GQ3 : Combien a-t-il de sommets ?	5
GQ3 : Y a-t-il un rectangle non carré ?	Non

Il décide, après sondage des groupes-questions pour savoir s'ils ont recueilli assez d'informations pour trouver la solution, d'interrompre le questionnement.

II – 1.4 La solution de chaque groupe

Chaque groupe GQ propose sa solution et dit s'il peut, avec les informations recueillies, construire un patron du solide ou s'il lui manque des informations.

Voici les réponses fournies par les trois groupes :

GQ3 : *C'est une pyramide avec des triangles rectangles. Il manque le modèle, la nature des triangles, les dimensions.*

GQ2 : *C'est une pyramide à base carrée avec des arêtes perpendiculaires au plan du carré. Il manque les dimensions.*

GQ1 : *C'est une pyramide à base losange ou trapèze isocèle ou carré. Il manque les dimensions et la position du sommet par rapport à un axe de symétrie de la base.*

Le solide est ensuite dévoilé par l'animateur, ce qui permet à chaque groupe de valider ou d'invalidier sa solution.

II – 2 Le Cube Soma

II – 2.1 Description de la situation

L'animateur présente le « cube Soma » : un ensemble de pièces permettant de reconstituer un cube et formé de 6 tétracubes et 1 tricube, soit l'équivalent de 27 cubes élémentaires en 7 pièces toutes différentes.

Il présente ensuite la situation telle qu'on peut la proposer à des élèves de cycle 3.

Les élèves ont construit les différentes pièces lors de séances précédentes. Ils sont maintenant répartis en groupes et disposent des pièces qu'ils ont réalisées. Le problème leur est alors posé : peut-on réaliser un cube avec ces 7 pièces ?

Lorsque les groupes ont réussi, non sans difficulté, à obtenir un cube, le maître leur propose de chercher un moyen pour se rappeler comment les pièces ont été assemblées pour pouvoir remonter le cube une autre fois.

La situation a comme objectif d'amener les enfants à « inventer » un moyen de représenter par un dessin sur un plan une configuration spatiale.

II – 2.2 Mise en situation et recherche

Deux cubes Soma (non assemblés) sont distribués à chacun des trois groupes formés dans l'atelier (G1, G2, G3).

G1 réalise le cube très vite, G2 y parvient après 7 à 8 minutes de recherche et G3 ne réussit pas.

Ce travail est loin d'être simple et reste difficile, même après un succès et ce, tant que l'on n'a pas élaboré une méthode que l'on peut contrôler et reproduire. L'animateur rappelle la suite de l'activité, telle qu'elle est prévue en cycle trois : le maître demande alors aux élèves (qui s'insurgent) de démonter le cube qu'ils viennent de réaliser et précise qu'il leur faut trouver un moyen de se rappeler comment le construire ; il s'agit pour eux de trouver un moyen de conserver la mémoire de la construction.

La première partie de l'atelier avait pour objectif de permettre aux participants de s'approprier deux situations sur les solides qui vont servir de support à l'élaboration d'une séance de formation des maîtres.

III – RÉFLEXION RELATIVE AUX TROIS ORIENTATIONS

Les animateurs proposent aux participants d'engager une réflexion autour de la question : comment peut-on exploiter ces deux situations en formation des maîtres pour faire intervenir les trois orientations en rapport avec l'enseignement des mathématiques à l'école (voir annexe 2) ?

Ils suggèrent d'utiliser ces deux situations en mettant en œuvre un processus « par homologie », en référence à l'un des modèles décrits par Alain Kuzniak dans le cadre de ses travaux sur l'étude des stratégies de formation (annexe 1).

Alain Kuzniak définit une stratégie d'homologie comme une situation dans laquelle le formateur cherche à « transmettre sa propre conception de l'enseignement des mathématiques, en la mettant en œuvre dans son enseignement, et des habiletés de gestion d'un groupe classe ; il construit des séances à visée mathématique ou didactique ; il attend que les étudiants utilisent dans leurs classes, des mises en œuvre proches de celles des séances qu'ils ont vécues comme élèves ».

Pour ce travail, les participants sont répartis en quatre groupes de trois personnes : G1, G2, G3 et G4.

La consigne suivante est alors donnée aux participants :

« Imaginez de quelle(s) manière(s) vous proposeriez ces deux situations en formation (initiale / continue), en essayant de définir des modalités qui fassent intervenir les trois grandes orientations et qui les mettent en évidence pour les personnes en formation ».

Il est précisé aux participants que les modalités qu'ils vont proposer doivent viser à faire apparaître les trois orientations comme un référent pour les maîtres en formation, qui leur

permettra d'organiser la situation pour leurs élèves de manière à favoriser certains apprentissages en rapport avec les trois orientations.

Après avoir pris connaissance des descriptifs complets des deux situations, distribuées sous la forme d'un document écrit (annexe 3), il était prévu que les groupes G1 et G2 travaillent à partir de la situation du solide caché et les groupes G3 et G4 à partir de la situation du cube Soma. Devant le manque de temps, afin d'étudier la question de manière suffisamment approfondie, il est décidé que tous les groupes travailleront seulement sur la situation du solide caché. Chaque groupe présentera le compte-rendu de ses réflexions à l'aide d'un transparent lors de la mise en commun.

De manière générale, dans leurs propositions, les divers groupes ont conservé certaines phases dans les scénarios des situations qui étaient fournis et en ont modifié certaines autres en relation avec les trois orientations repérées.

La plupart des suggestions faites visent à mettre en place, lors des différentes phases de la situation, des moyens d'observation et d'enregistrement afin de pouvoir faire remonter, lors d'une phase de retour sur la situation à prévoir en fin de séance, des éléments d'analyse et de questionnement sur les trois orientations.

Rapport du groupe G1

En s'appuyant sur le scénario décrit dans le document (annexe 3), les aménagements suivants sont proposés :

- lors de la phase 1 : une question concernant l'orientation « rationalité et raisonnement » pourrait être confiée au groupe-réponses, par exemple « Quelles connaissances seront mises en jeu dans le raisonnement ? ». Ce groupe aura pour tâche de reconstituer le raisonnement mis en œuvre au fil du questionnement et d'en rendre compte lors du moment de retour ;
- lors la phase 2 : pour chaque groupe-questions, un observateur est désigné dont le rôle est d'enregistrer les modifications qu'apportent les questions des autres groupes sur la position de son propre groupe.
Lors d'un moment de retour, chaque observateur pourra ainsi faire l'historique du cheminement du groupe ;
- concernant les phases 3 et 4 : lors du moment de retour, il est suggéré d'interroger les participants sur l'intérêt et la légitimité du travail de groupes. Pour illustrer l'orientation culturelle des mathématiques, on pourra questionner les participants sur les référents culturels, les méthodes et les instruments qui leur ont été utiles pour construire un patron d'un solide ;
- concernant la phase 5 : un débat pourra être engagé sur le choix du solide en rapport avec la dimension culturelle : pourquoi avoir choisi une pyramide ? pourquoi pas une pyramide régulière ?

Rapport du groupe G2

- Pour les phases 1 et 2 : Le groupe pense qu'il faut s'interroger sur la place que l'on peut donner à cette activité en formation des Professeurs des Écoles 2^e année, pour un groupe « standard » et sur les pré-requis nécessaires ?
A l'issue de la phase 2, il est possible, lors d'une pause, de susciter un échange pour savoir si le groupe-réponses a pu répondre à toutes les questions posées. Cela peut

permettre ensuite d'aborder la notion de référents culturels mathématiques communs à tous (vocabulaire, caractérisation...)

- Pour la phase 3 : il est proposé de demander la « réalisation du solide » au lieu de la « réalisation du patron ».
- Pour la phase 4 : lors du moment de validation, en cas d'échec, on peut demander à chaque groupe de débattre pour trouver les raisons de l'échec et pour identifier les manques.

Remarques : les orientations « raisonnement et méthodes » et « apprentissage de l'esprit critique et du discernement » peuvent – elles être abordées en même temps ?

Cela ne dépend-il pas de l'objectif choisi pour cette activité : est-il de faire construire le solide ou de se centrer sur le processus d'acquisition ?

Rapport du groupe G3

Le groupe met en avant la nécessité de faire vivre la situation aux maîtres en formation et simultanément, tout au long de son évolution, de ménager des temps de prise de recul pour analyser les moments vécus, en rapport avec les trois orientations. Il s'agit de développer chez les maîtres en formation une attitude réflexive afin qu'ils prennent conscience des aspects en jeu rattachés aux trois orientations, pour, à leur tour, les investir dans leur propre enseignement. Il est alors nécessaire que le formateur aborde la question de la transposition des éléments repérés dans une situation analogue proposée à des élèves. On retrouve le principe d'une stratégie de formation par homologie-transposition (annexe1).

Rapport du groupe G4

Le groupe ne propose pas de modalités nouvelles de la situation dans le cadre d'une formation des maîtres mais expose des questions en débat.

- 1) Est-ce qu'il est pertinent de donner la grille présentant les trois orientations aux maîtres en formation ? Peut-être pas, puisqu'il n'est pas concevable que les stagiaires, donnent à leur tour, la grille à leurs élèves !
- 2) Serait-il intéressant de faire échanger aux groupes leur codage, afin qu'ils en mesurent l'efficacité ?
- 3) Avec des stagiaires, comme on peut le faire avec des élèves, ne peut-on pas prévoir au terme de l'activité, un moment de bilan où on leur demandera ce qu'ils ont appris ? Cela pourra permettre d'aborder avec eux les trois dimensions, raisonnement, culture commune et esprit critique.
- 4) Peut-on choisir de mettre des stagiaires en retrait pour observer leurs collègues ? En les extrayant de l'action ne risque-t-on pas de provoquer chez eux une frustration ? De plus, un groupe qui se sait observé fonctionne-t-il comme un groupe non observé ?
- 5) Est-il raisonnable de viser les trois orientations en même temps ? Ne convient-il pas de privilégier l'un des aspects que l'on va développer lors du moment d'analyse réflexive ?

En conclusion, les animateurs soulignent la nécessité, évoquée par tous les participants dans leurs propositions, une fois que chaque situation a été proposée à des enseignants en formation, d'organiser un moment pour faire un « pas de côté » dans la logique d'un processus par homologie, tel qu'Alain Kuzniak l'a défini.

Ce moment sera d'abord l'occasion d'analyser et d'explicitier quels apprentissages, rattachés aux trois orientations repérées, cette situation favorise et met en œuvre. Il sera nécessaire

ensuite d'étudier avec les enseignants en formation, de quelle manière ces apprentissages peuvent être privilégiés chez les élèves en leur faisant vivre la même situation. Cela permettra d'aborder des questions relatives au contenu, aux modalités, à la gestion dans tous les aspects concernant ces apprentissages. Il sera nécessaire d'explicitier avec eux les conditions de la transposition de la situation dans une classe et de préciser que les trois orientations constituent, pour le maître, un référent qui lui permet de prévoir et de mettre en œuvre la situation avec les élèves, mais qu'il ne saurait être question d'aborder ces orientations directement avec les élèves.

BIBLIOGRAPHIE

AUBERTIN J-C., MAURIN C., GIRMENS Y., ROYE L. (2003) *A propos de l'enseignement des solides, quelles mathématiques faire vivre à l'école ?*, in Actes du Colloque COPIRELEM de Foix.

KUZNIAK A. (2003) *Les stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématique, 7-22*, in Carnet de route de la COPIRELEM, Concertum Tome 3, COPIRELEM.

CRDP de Lille (2000) *Travaux géométriques au Cycle 3*, Brochure de l'Irem de Lille.

ANNEXE 1

STRATÉGIES DE FORMATION REPÉRÉES PAR ALAIN KUZNIAK

- **Stratégies culturelles** : le formateur diffuse une information ; il veut accroître le savoir mathématique (ou éventuellement didactique) de l'étudiant, sans se préoccuper de la mise en œuvre ultérieure par l'étudiant dans les classes.
- **Stratégies de « monstration »** : le formateur cherche à transmettre une pratique d'enseignement, en montrant sa mise en œuvre effective dans les classes, soit in vivo, soit via une vidéo...L'étudiant regarde un maître qui fait la classe en visant un objectif mathématique.
- **Stratégies d'homologie** : le formateur cherche à transmettre sa propre conception de l'enseignement des mathématiques, en la mettant en œuvre dans son enseignement, et des habiletés de gestion d'un groupe classe ; il construit des séances à visée mathématique ou didactique ; il attend que les étudiants utilisent dans leurs classes, des mises en œuvres proches de celles des séances qu'ils ont vécues comme élèves.
- **Stratégies de transposition** : le formateur cherche à transmettre un savoir de référence sur l'enseignement et tente de maîtriser le phénomène d'adaptation opéré par les étudiants.

ANNEXE 2

« Quelles mathématiques faire vivre à l'école ? »

Réfèrent d'analyse

ORIENTATIONS	TYPES D'APPRENTISSAGES
1) Rationalité et Raisonnement	Apprentissage de raisonnement. Apprentissage de modèles. Apprentissages de méthodes.
2) Culture	Apprentissage de référents culturels mathématiques. Acquisition d'une culture commune. Acquisition d'une compréhension du monde. Développement du plaisir de chercher, de la capacité à produire des efforts.
3) Intégration sociale et formation du citoyen	Apprentissage de l'argumentation avec des pairs. Développement de l'esprit critique et apprentissage au discernement. Développement de compétences ouvrant des perspectives d'avenir. Construction d'outils. Acquisition de méthodes pragmatiques.

ANNEXE 3

Le Solide Caché (Situation proposée par Louis Roye)

1. Description de la situation

Un solide est caché dans une boîte. Afin de le reproduire à l'identique, il s'agit, par groupes de 4, d'en réaliser un patron par un jeu de questions fermées à destination d'un groupe auquel le solide a été préalablement remis. Les questions sont fermées dans le sens où les réponses ne peuvent être que "oui", "non" ou un nombre. Si les questions sont imprécises ou incompréhensibles, la réponse sera "on ne peut pas répondre". Il est convenu que l'enseignant écrit au tableau, en abrégé, les questions et les réponses pour une étude ultérieure... Quand les indications recueillies par le jeu "questions-réponses" sont jugées suffisantes, dans chaque groupe, chacun tente de construire un patron correspondant à ces indications afin de réaliser le solide envisagé. Les différentes productions sont d'abord comparées entre elles puis au solide modèle. On procède alors à l'examen critique du questionnaire : questions imprécises qui n'ont pas reçu de réponses, questions superflues...

2. Description du scénario

Première phase : préparation

Après la présentation de l'activité,

- un groupe de 4, que nous appellerons "groupe réponses", GR, reçoit le solide qui doit rester caché aux autres groupes. Un premier travail pour ce groupe va consister à étudier les propriétés du solide afin de savoir répondre aux questions qui vont être posées, (le solide n'est plus visible pendant le questionnement).
- Les autres groupes de quatre, que nous appellerons "groupes questions", GQ, préparent par écrit les questions qui vont être posées au GR afin d'obtenir les indications en vue de la production d'un patron du solide caché.

Deuxième phase : recherche d'informations

Le jeu des questions-réponses commence. Chaque GQ pose, à tour de rôle, une question au GR, afin d'obtenir des renseignements permettant de construire un patron du solide caché. Chacun des GQ profite donc des informations recueillies à partir des questions des autres groupes.

Des moments-bilan sont décidés par l'enseignant pour que chaque groupe puisse faire le point et éventuellement réajuster son questionnement.

Le rôle de l'enseignant est ici de gérer le déroulement du jeu, sans intervenir sur les contenus sauf en cas de litige. Il note au tableau dans un style télégraphique les questions et les réponses.

Troisième phase : résolution

L'avancée dans le questionnement amène l'enseignant à la question : "Pensez – vous avoir assez de renseignements ? ". Si un consensus se dégage, on passe à la construction du patron. Si un groupe est en difficulté, l'enseignant demande à ce groupe de désigner un représentant qui pourra aller voir le groupe GR et lui demander de le laisser regarder le solide dans la boîte pendant quelques instants. Le rôle de ce représentant sera alors de communiquer aux autres le fruit de sa brève observation et ce, afin de débloquer la situation.

Quatrième phase : communication et validation

Il s'agit d'abord d'obtenir le solide par pliage à partir du patron, puis de confronter sa réalisation à celles des autres au sein du groupe.

Il se peut qu'un seul patron ait été réalisé dans tel ou tel groupe car il a été produit collectivement par fabrication des différentes faces et collage selon une arête par essais successifs. Dans ce cas, la confrontation se fait avec un autre groupe.

Ces confrontations ont pour objectif de provoquer les justifications, de prendre en compte les erreurs : renseignements insuffisants, mauvaise interprétation des informations, erreurs dans les calculs de longueurs, tracés incorrects...

On compare alors les productions à l'un des patrons que le GR a pu réaliser du solide-modèle. (Plusieurs patrons sont possibles).

Cinquième phase : examen du questionnaire

Collectivement on procède à l'analyse critique du questionnaire relevé au tableau par l'enseignant : Pourquoi le GR n'a pu répondre à telle ou telle question ? Est-ce que toutes les questions posées étaient nécessaires ? On peut décider alors de rechercher un nombre minimal de questions.