

CRÉATION D'UN ATELIER DE DÉCOUVERTE MATHÉMATIQUE SUR LE THÈME DES PONTS DE KOENIGSBERG

Bénédicte AUTIER

Professeur, Collège Kleber, Strasbourg
autiernegrier.benedicte@wanadoo.fr

Muriel CRON

Professeur des écoles, Ecole primaire d'Andlau
cron@wanadoo.fr

Anne-Céline MITTELBRONN

Professeur, La Providence, Strasbourg
anne-ce@noos.fr

Nathalie WACH

Maître de conférences, Département de mathématiques
Université Louis Pasteur, Strasbourg
wach@math.u-strasbg.fr

Marc WAMBST

Maître de conférences, Département de mathématiques
Université Louis Pasteur, Strasbourg
wambst@math.u-strasbg.fr

Résumé

Sur un thème important tant par son aspect historique que mathématique (les ponts de Koenigsberg et les graphes), il s'agit de réfléchir à la conception d'une activité de vulgarisation scientifique destinée à des enfants de huit à douze ans, de préférence en intégrant une partie ou tout d'un théorème avec sa démonstration.

La Mission Culture Scientifique et Technique (M.C.S.T.) de l'Université Louis Pasteur de Strasbourg propose des activités de découverte scientifique à destination d'enfants de huit à douze ans. Nous avons créé un groupe I.R.E.M. «atelier mathématique» qui s'est donné pour tâche de concevoir de telles activités sur des thèmes mathématiques. Il est composé d'enseignants-chercheurs de l'université, d'enseignants du second degré et d'une professeur des écoles. Ce groupe a pour l'instant conçu quatre activités mathématiques et les a testées dans le cadre scolaire et dans celui des activités de l'Université. Les thèmes abordés sont les suites de Fibonacci (cf. [1]), le théorème d'Euler-Poincaré (cf. [3]), la combinatoire des dominos (cf. [2]) et les systèmes de numération (cf. [3]).

Le but de l'atelier animé par notre groupe IREM lors du colloque de la COPIRELEM est de concevoir une activité mathématique avec les contraintes que nous nous sommes fixées ou qui sont imposées par le public auquel elle est destinée sur le thème des Ponts de Koenigsberg. Nous espérons, par cet atelier, faire part de notre expérience quant à la réalisation de telles activités et recueillir les remarques des participants.

I – EXPOSÉ DES CONTRAINTES ET DU PROBLÈME

I – 1 Contraintes

Notre ambition est de présenter des thèmes historiques et scientifiquement importants dans l'esprit de ce qui peut être fait dans le domaine des sciences expérimentales par *La main à la pâte*. Dans le cadre de la M.C.S.T., nos ateliers doivent s'adresser à des enfants de huit à douze ans sans pré-requis particuliers.

Ils doivent se dérouler en un temps imposé de quatre heures, éventuellement fractionné en deux séances de deux heures. Il est nécessaire que les ateliers soient clos dans le sens qu'une solution au problème étudié est donnée à la fin des quatre heures et nous souhaitons que les enfants emportent avec eux une réalisation matérielle. Ces dernières contraintes nous éloignent des expériences dites de *narration de recherche* où des problèmes ouverts sont traités sur une longue période.

Nous essayons de présenter des problèmes de manière relativement approfondie faisant appel à la notion de démonstration plus qu'à celle de résolution. Ces problèmes sont généralement issus de notions fondamentales des mathématiques et sont par là même d'un intérêt culturel et historique. Nous ne nous situons pas dans une démarche d'apprentissage à long terme, qui s'inscrirait dans un programme, cependant le programme scolaire est notre outil de référence pour préjuger du niveau de connaissance et de compétence des enfants. Ceci nous permet de proposer nos ateliers au plus grand nombre. De plus, ce type d'activité se place dans le fil du document d'application des programmes (cf. [4]) où la résolution des problèmes est mise au centre des activités mathématiques du cycle 3 de l'école primaire.

Nous avons essayé de donner aux activités un aspect ludique afin de pouvoir les proposer dans des cadres différents de celui de l'école, mais aussi pour qu'ils soient perçus dans les classes comme une activité différente du travail scolaire habituel.

I – 2 Déroulement pratique des activités

Nos activités sont toutes régies par le schéma général suivant. Nous commençons par faire observer un phénomène ou posons une question simple. Dans l'atelier sur les suites de Fibonacci (cf. [1]), nous faisons observer des pommes de pins, dans l'atelier sur le théorème d'Euler-Poincaré (cf. [3]), nous faisons faire des comptages d'éléments de figures, dans l'atelier dont le thème est les dominos (cf. [2]), nous posons la question « *combien y a-t-il de dominos dans une boîte ?* ».

Après cela, nous demandons aux enfants d'énoncer des conjectures. Au cours d'un même atelier, il peut arriver qu'il y ait plusieurs stades où les enfants soient amenés à en faire. Nous proposons ensuite une activité permettant de valider ou d'invalidier les conjectures émises. Celle-ci est suivie par une autre qui ébauche la démonstration de la proposition qui a été reconnue par tous ou au moins explique un phénomène.

Nous avons organisé les ateliers par petits groupes d'enfants. Nous alternons les activités personnelles, les discussions au sein de binômes, au sein des petits groupes et les mises en commun et confrontation des résultats avec l'ensemble des enfants. Le travail reste guidé, les enfants sont placés face aux difficultés pas à pas. En fin d'atelier, nous proposons de réinvestir le résultat dans une activité annexe, comme la réalisation de devinettes, de dessins, d'un jeu ou la résolution d'un problème pratique.

I – 3 Le problème mathématique proposé à l'atelier de la COPIRELEM

Le thème que nous avons choisi est celui des ponts de Koenigsberg.

Rappelons le problème historique.

Dans la ville de Koenigsberg en Prusse orientale, un jeu consistait à chercher un chemin de promenade qui passe une et une seule fois par chacun des sept ponts de la ville. On dispose d'une carte relief de la ville (figure 1) qui peut se simplifier en une carte schématique (figure 2).

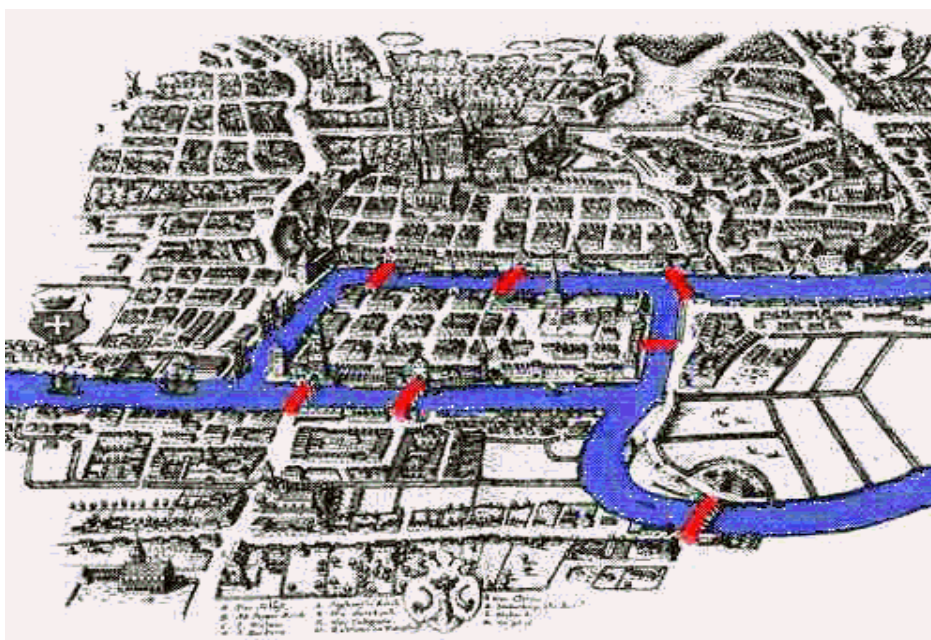


Figure 1

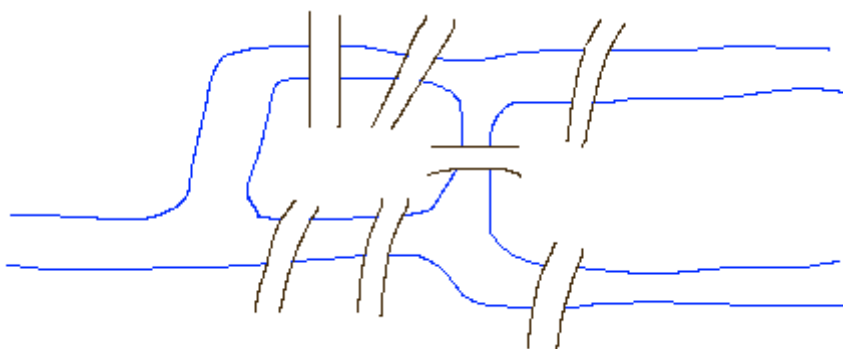


Figure 2

Le problème a été résolu au XVIII^e siècle par Leonhard Euler qui montra qu'un tel chemin n'existe pas. Il s'agit en fait d'un problème de théorie des graphes.

Le chemin cherché est un chemin eulérien dans le sens suivant : une **chaîne eulérienne** est un chemin parcourant un graphe et passant une et une seule fois par chacune des arêtes du graphe. Lorsque le sommet d'arrivée se confond avec le sommet de départ, on parle de **cycle eulérien**.

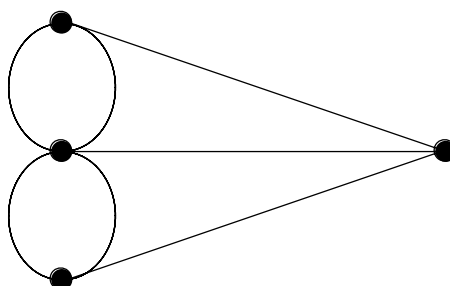
Un théorème permet de décider si un graphe possède ou non des chaînes ou des cycles eulériens (on trouvera plus de détails dans [5]). Pour l'énoncer, il faut encore introduire la notion de degré d'un sommet.

Le **degré** d'un sommet d'un graphe est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet.

Théorème : *Un graphe admet une chaîne eulérienne si et seulement s'il est connexe à des points isolés près et le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.*

La démonstration du sens direct est simple. Si l'on considère le parcours du graphe par le chemin eulérien, chaque fois que l'on arrive à un sommet on doit obligatoirement en repartir et donc le degré du sommet est pair à l'exception près, s'il ne sont pas confondus, des sommets de départ et d'arrivée, dont les degrés sont donc impairs.

Par exemple le graphe associé au problème des ponts est celui-ci :



Il y a trois sommets de degré trois et un sommet de degré cinq. Il n'existe donc pas de chemin eulérien pour ce graphe.

La démonstration de la réciproque se fait par récurrence sur le nombre d'arêtes. On parcourt le graphe en choisissant un sommet de degré impair, s'il y en a deux, ou un sommet quelconque s'il n'y en a aucun. Comme tous les sommets intermédiaires sont de degré pair, le parcours doit obligatoirement s'arrêter à l'autre sommet impair ou au point de départ. On considère alors les composantes connexes du graphe obtenu en enlevant les arêtes parcourues du graphe de départ. Par hypothèse de récurrence, chacune de ses composantes peut être parcourue par un cycle eulérien. Ces cycles complètent le chemin déjà tracé donnant ainsi une chaîne eulérienne.

II – DÉROULEMENT DE LA DISCUSSION

L'atelier proposé lors du colloque de la COPIRELEM consistait à réfléchir à la conception d'une activité satisfaisant aux contraintes citées ci-dessus, de préférence en intégrant une partie ou tout le théorème avec sa démonstration. Nous rendons compte ici du travail de réflexion du groupe. Il va de soi que nous n'avons eu le temps que d'ébaucher les grandes lignes et différentes options possibles d'une activité pour les

enfants. Le fait de réfléchir sur un thème concret a permis de mettre en évidence les problématiques inhérentes à la conception de ce type d'activités.

Il a rapidement été convenu qu'il serait raisonnable de n'aborder le théorème que dans le sens direct : si un chemin existe, alors le graphe ne possède que des sommets de degré pair sauf éventuellement deux d'entre eux. Cet énoncé est la forme contraposée de celui qu'il faut utiliser pour répondre au problème des Ponts de Koenigsberg.

Nous nous sommes également mis d'accord sur le fait de proposer au moins deux séances de deux heures : la première consistant à étudier le problème non modélisé avec émission de conjectures sur la possibilité de trouver un chemin, de manière à énoncer le théorème en fin de séance, la deuxième se concentrant sur le problème modélisé avec la démonstration de la partie directe du théorème. L'activité se terminerait par l'application du théorème à des situations pratiques, soit à la fin de la deuxième séance, soit éventuellement au cours d'une troisième séance.

II – 1 Comment introduire le problème aux enfants ?

Le principal sujet de discussion a été de savoir quel support présenter aux enfants et quelle question leur poser, l'objectif clairement défini étant que ceux-ci doivent parvenir à dessiner un graphe à partir du document fourni et en compter les degrés des sommets.

II – 1.1 Choix de la question à poser

Au fil de la discussion, plusieurs points ont été soulevés.

A quel moment introduire le plan de Koenigsberg ?

Il s'agit du problème historique qui apporte la dimension culturelle à l'atelier et il faut le mettre en valeur, sans le noyer parmi d'autres exemples, par ailleurs nécessaires à l'émission de conjectures. S'il est présenté avant d'autres figures, il risque de perdre de son intérêt et les enfants n'auront pas nécessairement l'envie d'y revenir au moment de la conclusion de l'atelier. Il est envisageable de ne le présenter qu'au moment de la conclusion, comme application de l'activité à un problème historique.

Quel plan faut-il présenter ? Et combien ?

Les enfants doivent s'approprier le problème. Pour cela, il paraît préférable de leur distribuer le plan d'une ville qu'ils connaissent.

On a évoqué le fait qu'une question dont la réponse est ou « oui » ou « non » n'a plus d'intérêt une fois qu'on y a répondu. Même si l'atelier commence par la distribution d'un seul plan, pour lequel il n'y a pas de chemin possible, il faut induire le besoin d'explications en proposant d'autres situations où la réponse est différente une fois que les enfants sont d'accord sur la réponse. On peut prévoir de présenter des plans où la chose est possible, pour que la réponse « on n'y arrive pas » ne ferme pas la discussion. Une possibilité consisterait à présenter d'abord une situation possible puis le problème de Koenigsberg en précisant son intérêt historique.

II – 1.2 La modélisation

La seconde étape consiste à modéliser le problème et à passer du schéma ou du plan de ville à un graphe.

La façon de procéder à cette étape a donné lieu à une longue discussion. Nous sommes confrontés à un choix : soit axer l'atelier sur la modélisation et le problème des ponts de Königsberg n'est plus qu'un habillage, soit construire un outil qui sera appliqué par la suite. Dans les deux cas, la difficulté est d'inciter à modéliser la situation par un graphe sans l'imposer d'emblée.

Le plan de la figure 1 peut présenter de réelles difficultés de lecture : il comporte beaucoup trop d'informations et incitera vraisemblablement les enfants à sillonner des rues différentes ce qui éloignerait du problème de départ. De nombreuses idées ont surgi à ce moment : par exemple, certains ont proposé d'introduire la contrainte de passer par une maison particulière sur chaque îlot de la ville, d'autres de faire colorier ces îlots, de les nommer. Il s'agit de faire apparaître les sommets du graphe. D'autres ont proposé d'assumer complètement l'imposition du modèle aux enfants, en l'introduisant par exemple à l'aide d'un papier calque.

Nous n'avons pas obtenu de consensus satisfaisant sur ce point : si l'on respecte la contrainte de temps *énoncer une conjecture en deux heures*, malgré tous les efforts fournis par l'animateur pour faire induire le graphe aux enfants, il y aura certainement de l'arbitraire à ce moment.

II – 2 Emissions de conjectures

Dans un second temps il faut aborder l'énoncé du théorème. Là encore tout le jeu consiste à inciter à la découverte sans en déposséder l'enfant. Il faut que les enfants fassent le maximum d'expériences pour parvenir à conjecturer le théorème, c'est-à-dire qu'ils observent de nombreux graphes, certains « impossibles » et d'autres « possibles » afin de les comparer.

Là encore les propositions ont été nombreuses :

- leur distribuer des graphes déjà préparés à étudier ;
- leur faire dessiner des graphes : le côté aléatoire peut être contenu en imposant un nombre réduit de sommets et d'arêtes ou en distribuant des feuilles où seuls les sommets sont tracés. Si l'une de ces deux options est choisie, se posera très certainement le problème du statut des intersections des chemins que les enfants auront tracés ;
- leur proposer de soumettre des graphes inventés à leurs camarades sous forme de jeu.

La question qui se pose au cours de la phase de comparaison est de savoir si les enfants vont compter naturellement le nombre de chemins partant de chaque sommet ou s'il va falloir l'induire. On peut leur proposer de nommer les sommets par des lettres A, B, C. et de faire écrire les parcours sous forme de chaînes du type (AB) (BC)... Le nombre d'apparitions des différentes lettres étant le degré des sommets.

A partir du moment où les degrés des sommets sont connus, il ressort de la discussion que l'idée d'étudier la parité devrait émerger assez vite. Les enfants sont rapidement en

moyen de dégager le fait que les points de passage sont de degré pair et les points de départ et d'arrivée de degré impair.

Nous n'avons pas eu le temps d'aborder la démonstration du théorème. Il a simplement été rappelé que la nécessité de la démonstration générale apparaît naturellement lorsque l'on veut se convaincre qu'il est impossible de trouver un chemin répondant aux conditions : le « oui » est une réponse qui est sûre, alors que le « non » est une réponse qu'on est obligé de nuancer par un « peut-être ». De plus, l'enfant est confronté à énoncer une contraposée.

III – CONCLUSION

Au cours de cet atelier, même si nous ne sommes pas parvenus, faute de temps, à l'élaboration d'une activité mathématique, nous avons esquissé diverses pistes pour la construire. Les difficultés de réalisation de ce type d'activité ont bien été mises en évidence. Il s'agit du jeu constant et subtil entre les activités induites ou non, et l'importance des supports matériels pour le mener à bien. C'est pourquoi, il faut proposer une démarche pas-à-pas. En toile de fond transparaît la question de comment les enfants se forment eux-mêmes leur savoir.

L'importance du côté culturel de ces activités a également été largement évoquée tout au long de la discussion. Le thème choisi doit permettre d'aborder des notions ou un théorème fondamental en mathématiques et l'élaboration de l'activité est un processus de vulgarisation de la culture mathématique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AUTIER B., MITTELBRONN A.C., CRON M., WACH N. & WAMBST M. (2004) *Spirales végétales et suite de Fibonacci : un atelier mathématique pour les enfants*, Bulletin de l'APMEP, **455**, 759-778.
- [1'] AUTIER B., MITTELBRONN A.C., CRON M., WACH N. & WAMBST M. (2004) *Un atelier mathématique : Spirales Végétales et suite de Fibonacci*, Cahiers de la Mission Laïque Française.
- [2] AUTIER B., MITTELBRONN A.C., CRON M., WACH N. & WAMBST M. (2004) *Combinatoire des dominos, un atelier mathématique pour les enfants*, L'Ouvert, **110**, 57-74, IREM de Strasbourg.
- [3] AUTIER B., MITTELBRONN A.C., CRON M., WACH N. & WAMBST M. (en préparation) *Des ateliers mathématiques pour les enfants*, Brochure, IREM de Strasbourg.
- [4] Document d'application des programmes (2003) Mathématique, Cycle 3, *Collection Ecole, SCEREN (CNDP)*.
- [5] BERGE C. (2000) *La théorie des graphes*, Birkhäuser, Bâle.