

# PROBLÈMES ET ACTIVITÉS FINALISÉES DANS L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMETRIE À L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

**Jean-François FAVRAT**

Maître de conférences, IUFM, site de Nîmes  
favrat.jf@wanadoo.fr

**Sylvie MULLER - Béatrice BARBERO**

Professeurs des écoles, Montpellier

**Nicole BELLARD**

IREM de Montpellier

## Résumé

Le groupe IREM 1<sup>er</sup> degré de Montpellier s'est donné comme buts de mettre au point des séquences d'enseignement de la géométrie laissant une place importante à la résolution de problèmes et d'établir des continuités entre les divers cycles de l'école élémentaire.

L'atelier a rendu compte de la démarche suivie.

- La 1<sup>ère</sup> étape a consisté à proposer des tâches aux élèves, sans enseignement particulier préalable, pour recueillir leurs démarches. Trois ont été présentées, soumises à l'analyse des participants : une reconnaissance de carrés imbriqués dans une figure complexe (CP-CE1), deux reproductions de figures, l'une à l'aide d'une règle non graduée, sur un réseau de points (CP-CE1) et l'autre à l'aide d'une règle graduée et d'une équerre, sur papier uni (CM). Ces tâches nous ont permis d'explicitier quelques enjeux importants de l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire (coordination des analyses locale et globale d'une figure, articulation des connaissances géométriques et de la maîtrise des instruments).

- Durant la 2<sup>ème</sup> étape, des séquences d'enseignement en rapport avec les observations précédentes ont été construites, conduites et analysées. Cinq séquences ont été présentées : pliages (cycle 2), alignement (cycle 2), constructions de deux solides (cycle 3), rédaction de messages (cycle 3). Plusieurs questions ont ainsi été abordées, liées au développement de l'enfant (passage des activités manipulatoires sur des formes au travail sur les figures tracées sur papier), à la gestion des activités finalisées (place des activités « décrochées », « couverture » du programme), à la cohérence entre les cycles (la reconnaissance des formes et la propriété d'alignement tout particulièrement).

**Mots-clés :** Géométrie - instruments - alignement - situation-problème - projet.

L'atelier avait trois buts :

- illustrer la nature et le rôle des problèmes géométriques à l'école élémentaire par des exemples d'activités conduites dans les classes ;
- montrer comment ces activités avaient été articulées à des évaluations préalables permettant de pointer des enjeux essentiels de l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire ;
- rendre compte ainsi au plus près de la démarche suivie dans le groupe Mathématiques à l'école primaire de l'IREM de l'académie de Montpellier.

L'atelier s'est déroulé en cinq temps que ce compte-rendu s'efforce de respecter.

- Mise en situation des participants : nous leur avons demandé d'analyser des tâches proposées aux élèves en guise d'évaluation (cf. les annexes n°1 à n°7). Quelles sont les compétences géométriques en jeu ? Quelles peuvent être les difficultés des élèves ?
- présentation d'une séquence conduite au cycle 2 (CP, CE1) sur l'analyse des figures planes ;
- présentation d'une séquence conduite au cycle 2 (CP, CE1) sur l'utilisation de la règle et la propriété d'alignement ;
- présentation de deux séquences conduites au cycle 3 (CM) sur le tracé de patrons de solides ;
- présentation d'une séquence conduite au cycle 3 (CE2, CM) sur la rédaction de messages géométriques.

---

## I – EXEMPLES DE TÂCHES PROPOSÉES EN GUISE D'ÉVALUATION DIAGNOSTIQUE

---

### I – 1 Difficultés des jeunes élèves (CP, CE1) pour analyser des figures « emboîtées »

Les fiches présentées dans les annexes n°1, n°2 et n°3, obligent les élèves à adopter deux points de vue successifs et différents sur une même figure. D'une part, ils doivent observer que chaque figure est comme une mosaïque composée de plusieurs sous-figures élémentaires (respectivement quatre carrés, deux rectangles, un carré et un rectangle), et d'autre part, ils doivent remarquer que le contour global est aussi une figure élémentaire (respectivement un carré, un rectangle, un rectangle). Le but des consignes est bien de pousser les élèves à passer, à basculer, d'un point de vue à l'autre. Or les élèves en général ne réussissent pas la tâche demandée.

Dans la fiche de l'annexe n°1, les élèves colorient à chaque fois un des quatre carrés dans les deux figures, ne respectant pas de ce fait, la contrainte que le deuxième carré soit de taille différente du premier. De même dans la fiche de l'annexe n°2, ils colorient à chaque fois un des deux rectangles intérieurs dans les deux figures. Dans la fiche de l'annexe n°3, les élèves sont encore plus bloqués : en suivant leur démarche, ils pourraient colorier un carré dans la deuxième figure, et ce serait exact puisqu'un carré est bien un rectangle, mais assez peu s'y résolvent.

La difficulté ne vient pas du mot « taille » ; il a été expliqué quand cela s'est avéré nécessaire à l'aide de plaques carrées ou rectangulaires. En fait, tout se passe comme si les élèves ne pouvaient ou ne voulaient prendre en considération que les formes simples juxtaposées. Une réponse fréquente pour la fiche de l'annexe n°4 le confirme : beaucoup d'élèves ne colorient que les trois quarts d'un des grands carrés en laissant blanche la surface du petit carré central, comme si le grand carré était en partie masqué par le petit posé par-dessus. Plusieurs hypothèses peuvent être avancées pour expliquer ces observations.

- Les formes, à l'école maternelle, sont surtout présentées à l'aide de plaques unies, opaques ;
- dans les activités de coloriage, une règle souvent énoncée est de ne pas dépasser les lignes frontières ;
- plus probablement, nous sommes en présence de phénomènes liés à la perception qui n'ont pas totalement disparu chez les adultes même si bien sûr les adultes se montrent beaucoup plus capables de faire coexister deux points de vue sur une même figure.

Quelle que soit l'hypothèse, il nous a semblé intéressant d'amener les élèves à analyser, pour toute figure donnée, aussi bien son contour externe que les parties qui la composent en se juxtaposant, en s'imbriquant ou en se chevauchant.

## I – 2 Difficultés des élèves de CM à utiliser la propriété d'alignement

La fiche utilisée, en guise d'évaluation préalable, dans les classes de CM, est celle reproduite dans l'annexe n°5, à une différence près : les sommets des carrés n'étaient pas nommés. Ils le sont ici pour faciliter la formulation de remarques.

Les élèves devaient reproduire la figure sur du papier uni. A partir des productions montrées dans l'atelier, plusieurs observations ont pu être faites.

- Il y a peu de productions précises : les erreurs dans les mesures des longueurs sont encore fréquentes ;
- les élèves semblent pour la plupart avoir tracé chacun des trois carrés successivement sans avoir perçu ou utilisé le double réseau des droites (AB), (EH), (FI) d'une part et (EF), (GA), (JB), (IH) d'autre part, structurant l'ensemble de la figure ;
- s'il arrive parfois que le segment [ED] ait été tracé d'un seul trait, c'est beaucoup plus rare pour les segments [AG] ou [BC] ;
- les segments [FG] et [JI] ne sont jamais portés par la même droite ;
- aucun élève n'a tracé la droite (FI) qui pourtant aurait permis d'asseoir la reproduction avec plus de précision.

Tout comme les élèves de CP ou CE1 ne semblent voir dans une figure complexe qu'une juxtaposition de formes simples, les élèves de CM ne semblent pas penser à chercher, par une analyse préalable de la figure à reproduire, quels tracés auxiliaires ils pourraient avoir intérêt à effectuer. Les figures réunies dans l'annexe n°6 montrent qu'il y a plusieurs manières d'envisager ces tracés auxiliaires : un rectangle KLIF ou la droite (FI) coupée orthogonalement par les droites (EF), (GA), (JB) et (IH). Ces deux manières<sup>1</sup> supposent que les élèves n'en restent pas à ce qu'ils voient dans un premier abord, qu'ils sachent aller chercher ce qui est caché.

---

<sup>1</sup> Ce ne sont pas, insistons bien, les seuls tracés auxiliaires possibles.

### I – 3 Difficultés des élèves de CP/CE1 à utiliser la propriété d'alignement

Nous avons noté la mise en avant dans les nouveaux programmes de mathématiques (2002) de la propriété d'alignement pour le cycle 2. Nous avons cherché une situation-problème dans laquelle la notion mathématique en jeu soit l'alignement. Nous avons opté pour une tâche de reproduction de carrés sur un réseau de points. Voici de quoi il s'agit. Les fiches supports et des productions d'élèves sont reproduites dans l'annexe n°7.

Selon le niveau CP ou CE1, il a été demandé aux élèves de reproduire, à l'aide de leur seule règle, soit le premier carré soit le second, sur une feuille ne présentant que le réseau « O<sup>2</sup> ».

Les élèves ont été fortement déstabilisés. Nous avons pu relever plusieurs types de travaux (cf. l'annexe n°7). Certains élèves dessinent tout ou partie d'un octogone. D'autres, - c'est la démarche la plus fréquente - commencent par tracer un segment dont les extrémités sont données puis poursuivent de proche en proche, à vue ; cela les conduit à des polygones dont le nombre de côté dépasse quatre, ou à des lignes fermées dont certaines parties sont courbes. D'autres (les plus hardis ?) enfin dessinent un carré dont certains côtés passent par les points donnés et d'autres non.

Ils expriment leur désarroi de plusieurs manières : ils s'inquiètent du manque de certains points (comprendre sommets), se demandent combien ils peuvent en rajouter, critiquent ceux qui ont « dépassé les points » donnés.

En effet, tel est bien l'obstacle à la fois didactique et mathématique : la tâche exige que les élèves construisent les sommets en traçant des droites passant par des couples de points donnés. Or les élèves sont entraînés (presque exclusivement ?) à joindre des points à la règle. Ici, l'interdit de dépasser les points quand on trace des segments doit être levé.

Cette tâche<sup>3</sup> a fait l'objet dans l'atelier de discussions intéressantes.

- On peut noter que les points sont représentés par de petites taches rondes, au lieu des petites croix plus conventionnelles<sup>4</sup>. L'utilisation des petites taches rondes n'est-elle pas actuellement très répandue<sup>5</sup> ?
- La tâche a été donnée à réaliser sur le réseau O dans lequel les huit points utiles ne sont pas nommés. Il est apparu dans les classes que pour la discussion sur les erreurs, sur les démarches, il était commode de désigner ces points par des lettres comme sur le réseau « OL<sup>6</sup> ». Et même nous nous sommes demandé si ces lettres n'étaient pas intéressantes comme aides organisationnelles pendant la

2 O comme « octogone ».

3 Cette tâche et la précédente ont été construites dans le même esprit que celles proposées dans la revue Grand N, n°49, Tracés aux instruments et raisonnements géométriques : quelques exemples de consignes (J-F. Favrat, 1991).

4 C'est d'autant plus paradoxal dans ces fiches que dans nos manuels Maths CP et Maths CE1 (Delagrave, J-F. Favrat et al.) nous utilisons presque exclusivement des croix.

5 Comme par exemple dans les manuels Cap Maths CP et Cap Maths CE1 (Hatier, R. Charnay et al.).

6 OL comme « octogone avec lettres ».

reproduction. Raymond Duval<sup>7</sup>, qui était présent dans l'atelier, nous a invités à ne pas aller trop vite sur ce terrain-là. Il préfère que les élèves fassent des gestes pour traduire et visualiser l'action de prolonger.

---

## II – EXEMPLES D'ACTIVITÉS VISANT L'ANALYSE DE FIGURES COMPLEXES AVEC DE JEUNES ÉLÈVES (CP/CE1)

---

Nous avons pensé à diverses pistes de travail (planches à clous avec des élastiques, mosaïques ou Tangrams, pliages...). Nous présentons ici celle qui a suscité immédiatement l'adhésion des élèves parce qu'elle a été une succession de petits problèmes perçus comme des défis ; elle a été souvent l'occasion de mener les analyses externe (sur le contour) et interne (sur les parties) d'une même figure.

L'activité, directement inspirée de la brochure *Libres recherches en mathématiques* (n°30, ICEM) demande que chaque élève dispose d'un carré de papier (cf. l'annexe n°8), présentant quatre zones colorées en rouge, bleu, vert et jaune, zones également carrées. Le but est de réaliser, par pliage, d'autres figures colorées (cf. les annexes n°9 à n°11)<sup>8</sup>.

La séquence principale compte quatre séances de 45 minutes ; elle s'est poursuivie sous la forme de moments plus brefs tant les élèves étaient ravis de travailler avec leur carré coloré.

- 1<sup>ère</sup> séance : introduction du carré dans la classe.

Chaque élève reçoit un carré uni blanc de 21 cm de côté et doit le plier en deux, en superposant un côté contre un autre côté pour obtenir un rectangle. L'enseignant montre comment procéder. Le but de cette séance, essentiellement « technologique », est que les élèves parviennent à un pli bien net ; des carrés supplémentaires sont nécessaires pour les élèves parfois maladroits ou empressés.

Ce premier pli est ouvert. Les élèves doivent tourner leur feuille d'un quart de tour et effectuer un second pli semblable au premier, de manière à faire apparaître les quatre carrés à colorier selon le modèle affiché au tableau (cf. l'annexe n°8). On vérifie qu'il n'y a pas d'inversion gauche / droite dans les coloriages : il s'agit pour la suite que tous les élèves aient le même outil !

- 2<sup>ème</sup> séance : réalisation des premières figures par pliage.

Le maître montre une figure qu'il a obtenue en pliant une seule fois le carré coloré. Cette figure est affichée au tableau. Collectivement ou individuellement des élèves sont sollicités pour dire ce qu'ils voient, les formes qu'ils reconnaissent aussi bien sur le contour qu'à l'intérieur de la figure. Puis chacun doit réaliser une figure identique à

---

<sup>7</sup> Ses remarques nous ont poussés à relire le chapitre IV Figures géométriques et discours mathématique de son ouvrage *Sémiosis et pensée humaine* (R. Duval, 1995). Il y a beaucoup d'affinités entre nos travaux et ses réflexions sur l'articulation souvent problématique entre les registres figuraux et discursifs, sur les difficultés pour les élèves d'avoir une approche opératoire des figures, sur l'opération de reconfiguration.

<sup>8</sup> Avant d'entendre les témoignages des activités réalisées dans les classes, les participants ont pu aussi résoudre de tels problèmes.

celle qui est affichée à partir de son carré et grâce à un seul pliage. Ensuite quelques élèves expliquent (ou montrent s'ils ne parviennent pas à expliquer) comment ils s'y sont pris. La même activité est reprise plusieurs fois de suite en changeant la figure à reproduire. L'annexe n°9 présente trois des figures utilisées dans cette séance : le lecteur remarquera qu'elles peuvent toutes être réalisées à l'aide d'un seul pliage.

- 3<sup>ème</sup> séance : réalisation de nouvelles figures par pliage.

La séance est analogue à la précédente, toutefois les figures demandent deux plis pour être réalisées : l'annexe n°10 présente quatre des figures utilisées. Avec ces figures, les élèves se rendent compte que des figures peuvent être très ressemblantes sans être identiques (cf. les deux trapèzes de cette annexe, ou encore le recto et le verso du rectangle). Ils s'aperçoivent aussi que pendant la réalisation, il vaut mieux contrôler l'agencement des couleurs, sinon gare aux erreurs d'orientation à la fin !

- 4<sup>ème</sup> séance : réalisation de nouvelles figures par pliage (suite).

Cette séance est un approfondissement des précédentes : les figures nécessitent maintenant trois pliages consécutifs (cf. l'annexe n°11). Les élèves peuvent avoir besoin de s'entraider mutuellement.

- Prolongements : d'autres figures sont proposées par le maître en guise de « gymnastique » géométrique, non plus sur des séances complètes mais à l'occasion de brefs moments (10 à 15 minutes). Parfois ce sont les élèves qui inventent une figure pour leurs camarades.

Qu'avons-nous pu observer au fur et à mesure des séances ? D'abord, le carré initial s'enrichit de nouveaux plis, la connaissance du carré, de ses axes de symétrie, nous pouvons l'espérer, s'en trouve renforcée. Si ces plis ont été bien marqués, la manipulation ne pose plus de problèmes, les élèves peuvent ainsi se concentrer sur la recherche des solutions. De même les verbalisations s'étoffent de plus en plus : sommet, côté, centre, droite, gauche, carré, triangle, rectangle sont constamment réemployés. Par ailleurs les descriptions se diversifient : ainsi il devient « naturel » de voir, dans la figure située en bas à droite de l'annexe n°11, un rectangle, deux carrés, quatre petits triangles ou encore un grand triangle. Autrement dit, ce sont les prémisses de la capacité attendue à changer de point de vue dans l'analyse d'une figure. Ce n'est guère étonnant puisque pour réussir à reproduire une figure présentée sous la forme d'un pliage, il faut tout à la fois tenir compte du contour de cette figure et des formes des zones colorées visibles.

---

### III – ACTIVITÉS SUR L'ALIGNEMENT CONDUITES AU CYCLE 2

---

Le travail a été réalisé en trois étapes ; nous ne rendrons compte que de la première et la troisième, puisque la deuxième a déjà été décrite (cf. § I-3 et annexe n°7), elle a consisté à faire reproduire les figures Carré 1 et Carré 2, à analyser les erreurs produites, à mettre au point des procédés pour réaliser la tâche.

#### III – 1 Travaux préparatoires sur les lignes

Ces travaux ont été divers, les collègues impliqués dans la recherche, ne s'étant pas longuement concertés à leur propos ; nous nous contenterons de les énumérer sans que

l'ordre de présentation soit toujours l'ordre de réalisation retenu par les collègues. D'ailleurs chacun n'a conduit qu'une partie de ces activités.

- Mise en situation dans la cour de récréation (se mettre en ligne droite, aligner des plots, *etc.*) ;
- création d'un catalogue de lignes à partir de cartes postales reproduisant des œuvres de peintres (Matisse, Delaunay, Klee, Haring, Vasarely, Wharol, *etc.*) : les élèves ont décalqué des lignes, les ont analysées, les ont classées, ont réalisé des dessins à la manière de tel ou tel peintre ;
- inventaire de noms de lignes, après un travail à partir du poème *Il était une feuille* de Robert Desnos ;
- tracés libres à la règle, ou avec de légères contraintes : par exemple, que les droites passent par un même point, qu'elles partent d'un même point, *etc.* ;
- joindre, à la règle et dans l'ordre, des points numérotés ;
- travail avec une planche à clous (ils forment un réseau carré) et des élastiques (les élèves vont reproduire ou créer des figures en tendant ces élastiques autour de certains de ces clous) ;
- compléter des figures (échelles, barrières, frises, dessins sur un réseau régulier de points, *etc.*) : soit une figure est amorcée, il reste donc des tracés à réaliser en s'appuyant sur des points alignés, soit il s'agit de reproduire le modèle donné sur un autre réseau. L'objectif est proche de celui visé dans la reproduction des deux carrés de l'annexe n°7, mais il n'y a pas de point à construire par intersection de deux lignes droites (cf. *Maths CP*, Delagrave, pp. 61, 66 ; *Maths CE1*, Delagrave, pp. 20, 21, 32 ; *Cap maths CP*, Hatier, Ex 5 p. 43, p. 50 ; *Cap Maths CE1*, Hatier, pp. 50, 51, 55 ; *J'apprends la géométrie en dessinant CP*, pp. 41, 45, 46).

### III – 2 Travaux conduits après la reproduction des deux carrés

- Il s'est d'abord agi de renforcer les tracés par prolongement. Là encore il fallait compléter des figures (frises, rayons de soleil, étoiles...) non plus en joignant des points mais en prolongeant des segments donnés. Ainsi au croisement de certains prolongements, des points nouveaux apparaissent (des sommets d'étoiles par exemple). Les élèves avaient la possibilité bien sûr d'effacer les tracés dépassant les points nouvellement construits par intersection (cf. *Maths CE1*, Delagrave, p.11 et p. 32 du guide pédagogique, *J'apprends la géométrie en dessinant CP*, pp. 43, 51)<sup>9</sup> ;
- ensuite nous sommes revenus à des activités de reproduction de figures sur le réseau pointé OL, celles de l'annexe n°12. Elles contiennent moins de sommets à construire, un, deux ou trois au lieu de quatre comme dans les carrés n°1 et

---

<sup>9</sup> En repensant à ces activités, nous nous apercevons qu'elles sont essentiellement dirigées. Il y aurait sans doute intérêt à proposer des tâches plus ouvertes, plus créatrices aussi, à partir toujours de figures inachevées mais que les élèves complèteraient plus librement (cf. *Cap Maths CP*, pp. 37 Ex 3 ; 43 Ex 4) ou de manière à faire apparaître des figures connues (cf. *Maths CE1*, Delagrave, p. 116, ainsi que les situations Etoile, Carré, X, Barres dans l'article déjà cité, Favrat, 1991).

n°2. Leur nombre permet l'individualisation ainsi que l'entraînement sans la répétition. Leur utilisation fut étalée dans le temps.

---

## IV – EXEMPLES D'ACTIVITÉS VISANT L'AMÉLIORATION DES TRACÉS AUX INSTRUMENTS (CM)

---

Nous avons cherché des activités de reproduction qui aient du sens pour les élèves, qui soient finalisées, c'est-à-dire inscrites dans un projet. Nous pensons ainsi obtenir la motivation des élèves pour une production de qualité et donc aussi leur adhésion à des exigences de précision, pas toujours nécessaires à leurs yeux dans les activités non finalisées. Nous avons choisi des projets de fabrication.

### IV –1 Premier projet

L'objet à fabriquer est une boîte de chocolats (vide !). Elle ne tient que grâce à son couvercle. Quand on l'ôte, elle s'entrouvre, telle une fleur à la corolle dorée (même quand il n'y a plus de chocolats). Aplanie, elle a la forme d'un octogone (cf. les figures a, b et c de l'annexe n°13). On le comprend, les particularités géométriques et esthétiques de cette boîte nous ont bien intéressés.

Les intentions didactiques sont claires. La fabrication de cette boîte doit être l'occasion

- de retravailler les propriétés du cube et de construire quelques-uns de ses patrons ;
- de mieux maîtriser les instruments de tracé tels que la règle et l'équerre, cela sur papier uni ;
- de chercher les moyens géométriques de garantir la fidélité d'une reproduction par rapport à son modèle, et donc d'obtenir une bonne précision.

Pour réaliser l'octogone, compte tenu de ce qui a été observé lors de l'évaluation préalable, on peut prévoir que les élèves vont tracer les cinq carrés successivement. L'un des buts de la séquence sera donc d'amener les élèves à trouver d'autres manières de faire (cf. les figures d, e et f de l'annexe n°13) :

- soit construire le carré central IJKL de côté  $c$  ( $c$  est la mesure de l'arrête du cube), tracer les droites (IJ), (JK), (LK) et (IL) en prolongeant les côtés de ce carré, placer sur ces droites les huit sommets A, B, C, D, E, F, G et H de l'octogone, à la bonne distance des sommets I, J, K et L ;
- soit tracer un rectangle de largeur égale à  $c$  et de longueur égale à  $3c$ , par exemple ABEF, placer les points I et L sur [AF] et les points J et K sur [BE], tracer les droites (IJ) et (LK), placer les points H, C, D, G et H sur ces droites à la bonne distance des points I, J, K et L ;
- soit tracer un carré QRST dont le côté mesure  $3c$ , placer sur les côtés de ce carré les points A, B, C, D, E, F, G et H à la bonne distance des sommets Q, R, S et T.

La séquence au CM1 s'est déroulée sur sept séances ; elle peut être plus brève au CM2. Pour ne pas allonger le compte rendu, nous décrivons la succession des étapes sans rentrer dans le détail de l'organisation pédagogique de chaque séance.

- 1<sup>ère</sup> séance : observation de la boîte.

La boîte de chocolats est suspendue à une ficelle, une seule pour toute la classe. Les élèves doivent décrire la boîte individuellement puis à l'oral collectivement. Le but est de garder sur une affiche la trace des observations qui ont été vérifiées, en particulier que cette boîte a la forme d'un cube.

- 2<sup>ème</sup> séance : réalisation d'un patron de cube.

Après avoir résumé la liste des observations précédentes à ce qui est juste nécessaire pour construire un cube, les élèves sont invités à réaliser un patron de cube. L'observation des patrons spontanés conduit à éliminer ceux qui sont erronés, à remarquer qu'il y en a de plusieurs sortes (en fait les classiques en forme de T ou de croix sont les plus fréquents à ce niveau), à énoncer des exigences de qualité (précision dans les mesures des côtés et des angles droits), à rechercher des moyens de les construire plus fiables ou plus rapides que celui qui consiste à juxtaposer les six carrés (procédé systématiquement utilisé par les élèves).

- 3<sup>ème</sup> séance : activités décrochées sur les patrons de cubes.

Il s'est agi de consolider les connaissances sur les patrons de cubes (par exemple dire sur un patron si deux faces sont voisines ou non, opposées ou non, etc.) et de gagner en précision dans leurs tracés, la séance précédente en a parfois montré la nécessité pour les CM1 surtout.

- 4<sup>ème</sup> séance : réalisation du fond octogonal de la boîte.

Après que le maître a demandé, afin de créer la curiosité, comment le fond de la boîte peut tenir alors qu'il n'y a pas de colle, le couvercle de la boîte est enfin enlevé. Devant cette fleur dorée qui s'épanouit, la magie opère immédiatement : les élèves sont pressés de réaliser le patron du fond. Il en circule quelques-uns dans la classe pour observation, puis un exemplaire est fixé au tableau.

Comme dans la 2<sup>ème</sup> séance, les élèves construisent en général cinq carrés les uns après les autres et complètent la croix obtenue en traçant les hypoténuses des quatre triangles rectangles isocèles ; ils tâtonnent ensuite pour placer les pointillés de la figure c de l'annexe n°13.

Comme à la 2<sup>ème</sup> séance encore, l'examen collectif de ces productions spontanées vise essentiellement à rappeler la nécessaire précision dans la mesure des côtés et à trouver des procédés moins longs, plus économiques en manipulations de l'équerre, mais aussi à mettre au point un moyen sûr pour positionner correctement les pointillés : le maître doit indiquer qu'ils sont dans le prolongement des diagonales du carré central ou le confirmer, il se peut tout à fait que des élèves en fassent la remarque. Dans les classes observées les trois procédés cités plus haut ont été rencontrés, le troisième sans doute un peu fortuitement car dans une classe, le modèle s'est trouvé fixé sur un tableau quadrillé dont la maille était d'une taille proche de celle du carré central. Ainsi de leur place, lors de la phase collective, certains élèves ont évoqué la pertinence de construire le grand carré nommé QRST sur la figure f de l'annexe n°13.

Les élèves dessinent ensuite chacun un nouveau patron sur papier uni en s'essayant si possible à l'un des procédés décrits et après validation par le maître,<sup>10</sup> ils le réalisent sur du carton bristol coloré et le découpent.

- 5<sup>ème</sup> séance : réalisation du couvercle.

Il se trouve que le pliage du couvercle est relativement complexe à cause de la présence de plusieurs replis intérieurs garantissant la rigidité de l'emballage. Les élèves peuvent être simplement invités à réaliser le patron d'un pavé droit dont une face est carrée en faisant bien attention de prendre des dimensions adéquates : comme il faut que le couvercle s'ajuste sur le fond, les côtés du carré doivent être un peu plus grands que les arêtes du cube déjà construit. Certains élèves ont réalisé le classique patron d'un pavé droit (privé d'une face) complété par des languettes ; d'autres ont cherché à conserver le principe d'un patron octogonal semblable à celui du fond : ici un carré, quatre rectangles et quatre triangles sont nécessaires.

Après cela, il ne reste plus qu'à décorer l'objet et à le remplir.

- 6<sup>ème</sup> séance : activités décrochées sur les tracés de précision.

Après ces séances, les élèves ont sans doute encore besoin de s'entraîner à la maîtrise précise des instruments, de l'équerre en particulier. Ils en comprennent mieux la nécessité. Il s'agit de leur demander de reproduire des figures – carrés isolés dans diverses positions, carrés juxtaposés de mêmes dimensions ou non – d'analyser avec eux les sources d'erreurs, de rappeler les moyens de les éviter. Ces activités peuvent être différenciées.

- 7<sup>ème</sup> séance : évaluation.

Elle porte sur la maîtrise des tracés aux instruments (règle, équerre) sur papier uni et sur les patrons de cubes (tracés et relations entre les faces). Nous avons projeté dans l'atelier des productions d'élèves, la comparaison avec les travaux initiaux a bien montré les progrès réalisés. Ils sont dus tout à la fois aux nombreuses occasions que les élèves ont eues, non seulement d'effectuer des tracés, mais aussi d'affiner leurs analyses en vue de les améliorer (cf. les séances n°2, n°4, n°5), ainsi qu'à la bonne acceptation par les élèves des activités décrochées. L'on voit ainsi que l'enseignement basé sur des projets n'exclut pas la systématisation, ne s'y oppose pas.

## IV – 2 Deuxième projet

Le travail précédent privilégie certains contenus d'enseignement : la maîtrise de la règle et de l'équerre, les carrés, les cubes. L'année suivante nous nous sommes intéressés au compas comme instrument de report de longueurs et de construction de triangles. Cela nous a conduits à proposer la fabrication d'un lampion octaédrique (cf. la figure a de l'annexe n°14) au CM2.

Les huit faces sont des triangles équilatéraux de même taille, réalisés en papier Canson noir ; le patron est d'un seul tenant (cf. la figure b). Huit formes géométriques (une par face : deux disques, deux triangles, deux trapèzes isocèles, deux rectangles) ont été

---

<sup>10</sup> Pour qu'un tel patron tienne dans une feuille de papier de format A4, on peut prendre 6 cm comme mesure des côtés des carrés. Il faut discuter aussi avec les élèves des questions de mise en page.

découpées dans les faces. Elles ont été obturées avec du papier vitrail de diverses couleurs.

Le canevas de la séquence est assez proche de celui qui a été suivi pour le projet précédent.

- 1<sup>ère</sup> séance : présentation de l'objet, description écrite sans possibilité de manipulation, vérification collective des observations, tri des informations à caractère géométrique. Les élèves décrivent souvent ce solide comme un « losange à huit faces ».

- 2<sup>ème</sup> séance : recherche de patrons sur papier uni ou sur papier pointé (les points forment un réseau triangulaire équilatéral (cf. la figure c). Les élèves peuvent découper. Cette recherche crée bien des surprises aux élèves (ils s'en sortent grâce au papier pointé), et à nous aussi. Certains élèves en effet proposent des bi-pyramides (cf. la figure d) ou des losanges simplement réunis par des sommets (cf. les figures e et f).

- 3<sup>ème</sup> séance : tracé de triangles équilatéraux à l'aide d'un compas.

- 4<sup>ème</sup> séance : nouvelle recherche de patrons sur papier uni. Les élèves recherchent des patrons à main levée, ils peuvent découper s'ils le souhaitent pour contrôler. Ensuite, par groupes, ils conservent ceux qui sont différents. Chaque élève en choisit un à redessiner au propre sur papier uni. Cinq patrons différents ont été produits (cf. les figures g, h, i, j et k de l'annexe n°14). Pour les construire au propre, les élèves procèdent souvent de proche en proche ; ils n'exploitent qu'occasionnellement les propriétés géométriques de ces patrons comme l'alignement de certains côtés ou le parallélisme.

- 5<sup>ème</sup> séance : analyse géométrique des patrons trouvés par la classe. Les élèves disposent d'une fiche sur laquelle sont reproduits les cinq patrons cités ci-dessus. Ils doivent colorier des figures géométriques connues, une par patron, autre qu'un triangle élémentaire correspondant à une face de l'octaèdre, et donner son nom. Cette séance est l'occasion d'apporter le lexique relatif aux quadrilatères particuliers : losange, trapèze, parallélogramme.

- 6<sup>ème</sup> séance : tracés de parallèles, de parallélogrammes, de trapèzes au compas et à la règle sur papier uni.

- 7<sup>ème</sup> séance : affinement des procédures de reproduction de patrons. Les élèves reçoivent à nouveau la fiche avec les cinq patrons. Ils doivent choisir celui qu'ils estiment le plus commode à reproduire et expliquer pourquoi par écrit. C'est le patron g qui est majoritairement retenu par les élèves. Certains dessinent les deux grands triangles ABC et DEF puis les triangles intérieurs ; d'autres dessinent le parallélogramme GHIJ qu'ils pavent de triangles en utilisant le compas pour reporter la longueur de l'arête, ils complètent en prenant l'intersection de la droite (LK) avec les droites (IJ) et (HG).

- 8<sup>ème</sup> séance : production terminale. Les élèves la réalisent d'abord sur une feuille de papier et passent au canson après validation. Selon la mesure de l'arête donnée aux élèves, il se peut que le patron choisi par l'élève ne tienne pas dans la feuille. Le maître alors aide cet élève pour la mise en page et/ou l'invite à changer de modèle de patron. Il ne reste plus que la décoration.

- 9<sup>ème</sup> séance : évaluation.

Celle-ci a porté sur les quadrilatères et les triangles particuliers (reconnaissance, vocabulaire, dessin), sur les patrons d'octaèdres (reconnaissance, tracé), sur la construction de deux droites parallèles et de deux droites perpendiculaires.

---

## V – ECHANGES INTER-CLASSES À PROPOS DE PUZZLES GÉOMÉTRIQUES AU CYCLE 3

---

On connaît tout l'intérêt des puzzles géométriques comme le tangram pour l'entraînement à l'analyse de figures et la mobilisation d'images mentales géométriques : pour réussir à reconstituer une silhouette donnée avec les pièces imposées, il faut en analyser le contour, les proportions, il faut aussi avoir mémorisé quelques assemblages de base. Mais nous visions également la maîtrise des instruments et du langage géométrique. L'idée est alors venue de plusieurs projets de communication inter-classes. Nous rendons compte de deux tels projets, l'un adapté au CE2, l'autre pour les CM.

Nous n'avons pas utilisé le tangram carré classique car nous voulions pouvoir travailler sur les arcs de cercle et le compas. Notre choix s'est donc porté pour les CM sur le « Cœur brisé » et le « Cercle problématique » (cf. la brochure APMEP Jeux n°6, p. 73), pour les CE2 sur le Cœur brisé et la « Goutte d'eau », puzzle que nous avons créé pour l'occasion (cf. l'annexe n°16). Voici les deux démarches succinctement présentées en parallèle.

Au CE2 : la Goutte d'eau, le Cœur brisé	Au CM : le Cercle problématique, le Cœur brisé
<p>1<sup>ère</sup> étape : découverte du puzzle. Observation et analyse géométrique du puzzle (reconnaissance de figures, vocabulaire). Présentation du projet. Découpage des différentes parties du puzzle ; reconstitution. Jeu : invention de silhouettes.</p>	<p>1<sup>ère</sup> étape : découverte du puzzle. Donner le modèle, faire nommer les figures géométriques reconnaissables. Découper les différentes parties. Assembler les pièces pour obtenir un dessin, une silhouette.</p>
<p>2<sup>ème</sup> étape : reconstitution de silhouettes en utilisant toutes les pièces du puzzle. Donner des silhouettes à l'échelle 1 (cf. l'annexe n°16) sur papier uni ; les faire reconstituer sans la superposition. NB : pour aider certains, autoriser la superposition ou donner quelques traits de séparation entre les pièces.</p>	<p>2<sup>ème</sup> étape : composer d'autres figures géométriques. Défi : trouver toutes les figures géométriques connues qui soient l'assemblage de deux (ou plus) pièces du puzzle. Réalisation d'affiches collectives récapitulatives. Reconstitution d'un puzzle complet sans modèle.</p>
<p>3<sup>ème</sup> étape : composer des figures géométriques à partir de quelques pièces du puzzle. Composer des figures connues ( carré,</p>	<p>3<sup>ème</sup> étape : fabrication d'un puzzle sur papier uni. Les élèves disposent du modèle reconstitué, ils doivent le reproduire sur</p>

<p>rectangle, triangle, trapèze) à partir d'au moins deux pièces élémentaires ; reproduire les figures obtenues sur une feuille (contour) et les nommer ; dresser un catalogue collectif (affiche) des figures obtenues.</p>	<p>papier uni. Premier travail au brouillon, et après discussion, travail sur bristol.</p>
<p>4<sup>ème</sup> étape : activités décrochées sur le cercle. Manipulation du compas, introduction du vocabulaire lié au cercle, tracés.</p>	<p>4<sup>ème</sup> étape : jeux avec le puzzle. Les élèves ont leur puzzle, une silhouette leur est proposée. S'ils ne trouvent pas, le maître leur montre la solution pendant dix secondes puis ils retournent à leur place.</p>
<p>5<sup>ème</sup> étape : reproduction du puzzle sur papier quadrillé. Pour que cette tâche ne soit pas trop complexe, le puzzle est disposé sur le quadrillage de telle manière que les côtés du grand carré soient portés par les lignes du quadrillage et d'autre part, le côté de la maille du quadrillage a la même mesure que le rayon des arcs de cercle (4 cm au moins).</p>	<p>5<sup>ème</sup> étape : rédaction de textes géométriques. Rédaction de textes (programmes de construction) à partir de figures assez simples (cf. l'annexe n°15) dans lesquelles on retrouve des configurations présentes aussi dans les puzzles travaillés. Rédaction individuelle, échange, discussion sur les difficultés, rédaction d'un nouveau texte (à partir d'une figure semblable aux précédentes).</p>
<p>6<sup>ème</sup> étape : échange inter-classe. Dans un premier temps les élèves disposent d'une silhouette et la reproduisent (traits de séparation apparents) sur du papier quadrillé (cf. ci-dessus), à main levée puis aux instruments. Le maître fait attention de ne pas donner n'importe quelle silhouette, certaines sont plus faciles que d'autres à reproduire (ne pas chercher la difficulté). Une fois au propre, les élèves décalquent la silhouette (contour uniquement) sur du papier uni. Le modèle du puzzle et ces silhouettes sont envoyés à l'autre classe.</p>	<p>6<sup>ème</sup> étape : échange inter-classe. Classe émettrice : rédiger le programme de construction du puzzle pour l'autre classe ; choisir quelques silhouettes décalquées par les élèves (contours uniquement) ; les envoyer à la classe destinataire avec le texte (avec le modèle pour la vérification). Classe réceptrice : réaliser le puzzle à partir d'une dictée du texte reçu (à main levée, vérification tracé au propre) ; reconstituer les silhouettes.</p>
<p>7<sup>ème</sup> étape : évaluation. Elle porte sur le vocabulaire géométrique (carré, rectangle, centre, cercle, rayon, sur la reconnaissance de figures, sur le tracé de cercles, sur la reproduction de figures sur quadrillage.</p>	<p>7<sup>ème</sup> étape : évaluation. Elle porte sur le vocabulaire géométrique (triangles particuliers, segment, diagonale, centre, cercle, rayon, parallélogramme), sur la reconnaissance de figures, sur la lecture et la rédaction de programmes de construction de figures.</p>

### EN GUISE DE CONCLUSION

Nous voudrions lister les points de convergence entre les diverses séquences présentées ici, aussi bien au niveau des démarches pédagogiques :

- utilisation d'évaluations préalables ;
- obligation pour les élèves de résoudre des problèmes répétés et variés ;
- va et vient constant entre les actions, la réflexion, la verbalisation,

qu'au niveau des finalités de l'enseignement de la géométrie à l'école primaire : s'il est classique d'affirmer que la géométrie de l'école primaire est celle de l'observation, ces travaux montrent que l'observation n'est pas le simple enregistrement de ce qui perçu spontanément, elle consiste à aller chercher au delà, elle est bien l'engagement de savoirs à des fins de résolution de problème.

Pour reprendre le titre de l'ouvrage de Roger N. SHEPARD, n'est-elle pas plutôt « l'œil qui pense ? »

---

## BIBLIOGRAPHIE

---

APMEP (2002) *Jeux 6 ; des activités mathématiques pour la classe*, brochure n°144, Paris.

CHARNAY R., DUSSUC M-P. & MADIER P. (2000) *Cap maths CP*, Hatier, Paris.

CHARNAY R., DUSSUC M-P. & MADIER P. (2001) *Cap maths CE1*, Hatier, Paris.

DESNOS R. (1975, réédition) *Fortunes*, **42**, p. 134, *Poésie/Gallimard*, Paris.

DUVAL R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine ; registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Peter Lang, Berne.

FAVRAT J-F. (1991) *Tracés aux instruments et raisonnements géométriques : quelques exemples de consignes*, Grand N, **49**, IREM de Grenoble, 11-35.

FAVRAT J-F. & LAGANNE J. (1999) *Maths CP*, Delagrave, Paris.

FAVRAT J-F. & VASSELON J. (1999) *Maths CE1*, Delagrave, Paris.

FAVRAT J-F. & VASSELON J. (2000) *Maths CE1, guide pédagogique*, Delagrave, Paris.

ICEM, *Libres recherches en mathématiques*, **30**, PEMF, Mouans Sartoux.

Ministère de la jeunesse, de l'éducation, de la recherche (2002) *Documents d'application des programmes ; mathématiques, cycle 2*, Direction de l'enseignement scolaire, SCEREN/CNDP, Paris.

PAPADOPOULOS J. (1993) *J'apprends la géométrie en dessinant, CP*, CDDP de Perpignan.

SHEPARD R-N. (1992) *L'œil qui pense. Visions, illusions, perceptions*, Collection *Science ouverte*, Seuil, Paris.

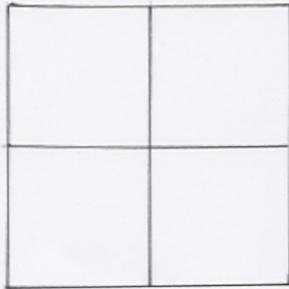
---

**ANNEXES**

---

**Atelier de géométrie**

Reconnaissance de formes

Matériel : feutres ou crayons de couleur

1. Colorie un carré.

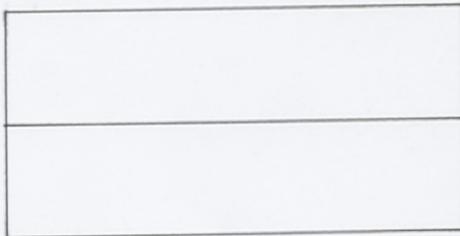


2. Colorie un autre carré de taille différente.

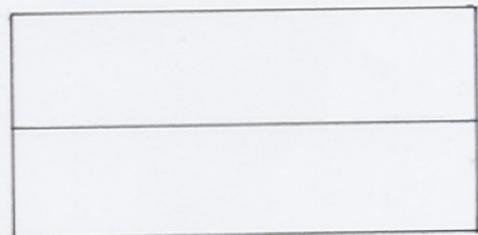
Annexe n°1

**Atelier de géométrie**

Reconnaissance de formes

Matériel : feutres ou crayons de couleur

1. Colorie un rectangle.



2. Colorie un autre rectangle de taille différente.

Annexe n°2

**Atelier de géométrie**

Reconnaissance de formes

Matériel : feutres ou crayons de couleur

1. Colorie un rectangle.



2. Colorie un autre rectangle de taille différente.

Annexe n°3

**Atelier de géométrie**

Reconnaissance de formes

Matériel : feutres ou crayons de couleur

1. Colorie un carré.



2. Colorie un autre carré de taille différente.

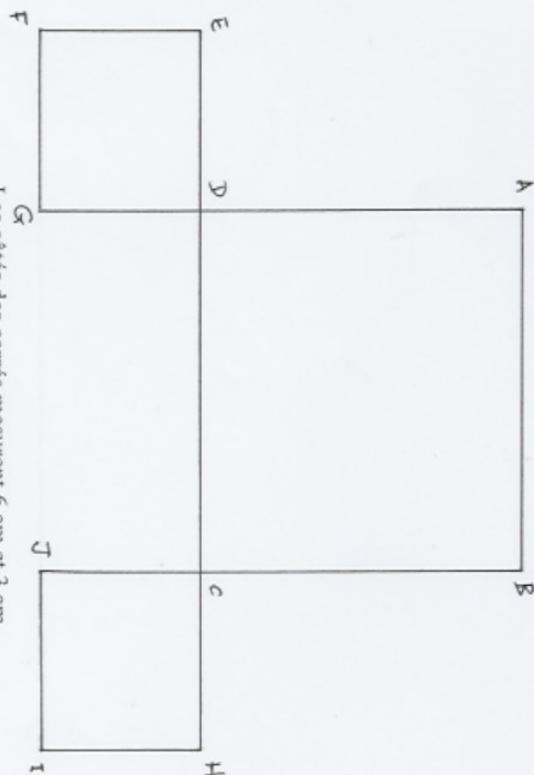
Annexe n°4

**Atelier de géométrie**

Reproduction de figures

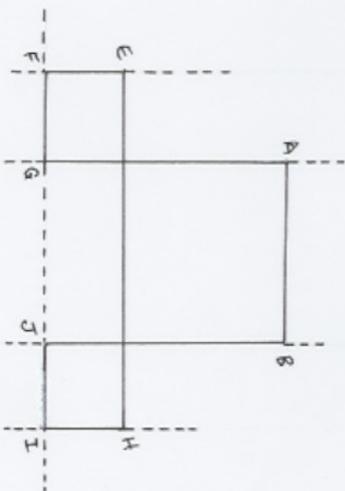
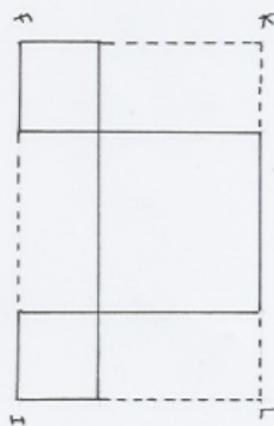
Matériel : règle, équerre, papier blanc

Reproduis cette figure.



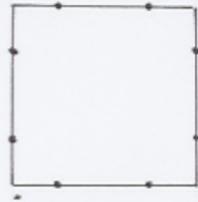
Les côtés des carrés mesurent 6 cm et 3 cm.

Annexe n° 5

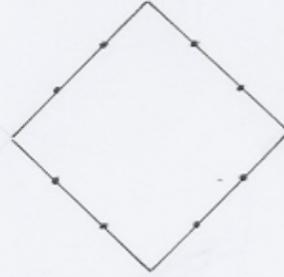


Deux exemples de tracés auxiliaires, en pointillés, permettant de reproduire plus facilement la figure de l'annexe n° 5

Annexe n° 6



Carré 1



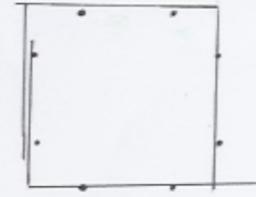
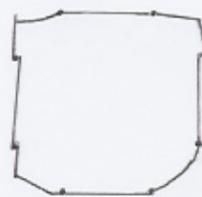
Carré 2



Réseau O



Réseau OL

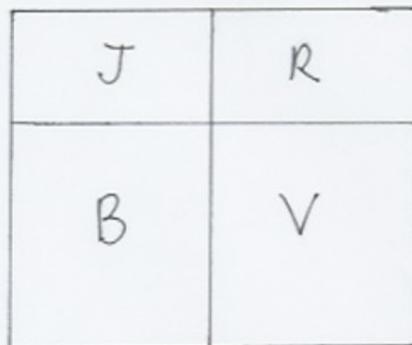
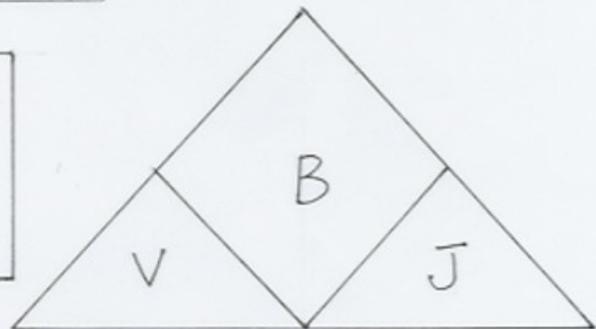
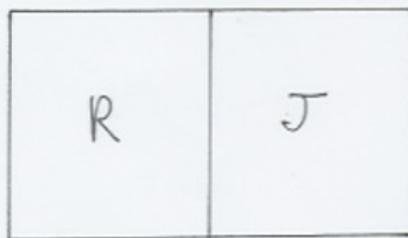


Reproduction de trois travaux d'élèves (CP)



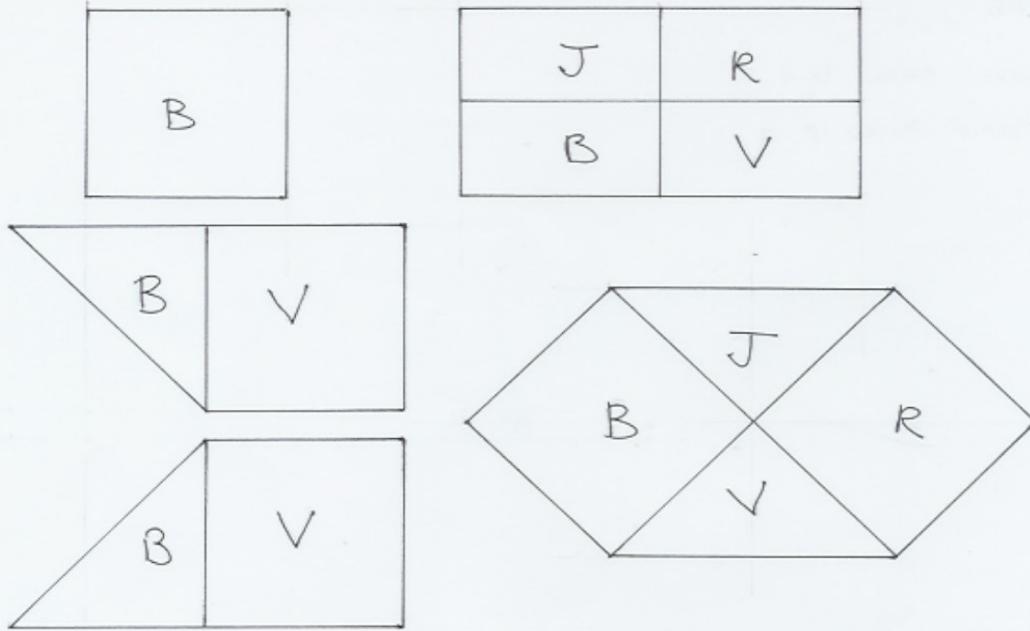
Les quatre zones colorées ont été délimitées par pliage puis coloriées par les élèves (R est mis pour rouge, V pour vert, J pour jaune, B pour bleu). Le côté du carré utilisé en classe mesure 21 cm ; l'échelle prise ici est égale à  $\frac{1}{3}$ .

Annexe n°8



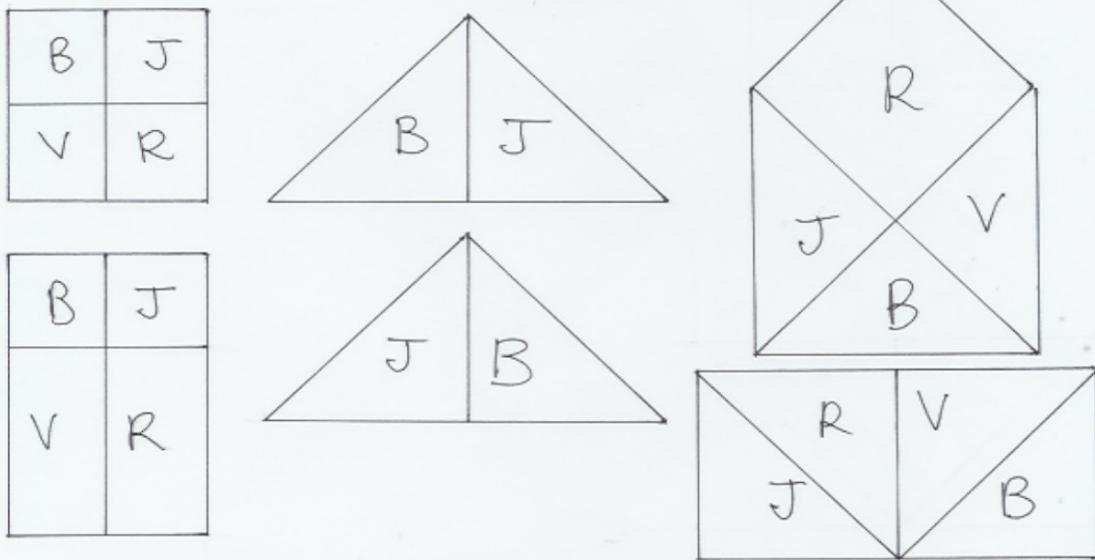
Première série de figures à réaliser par pliage à partir du carré initial. (Echelle  $\frac{1}{3}$ ).

Annexe n°9



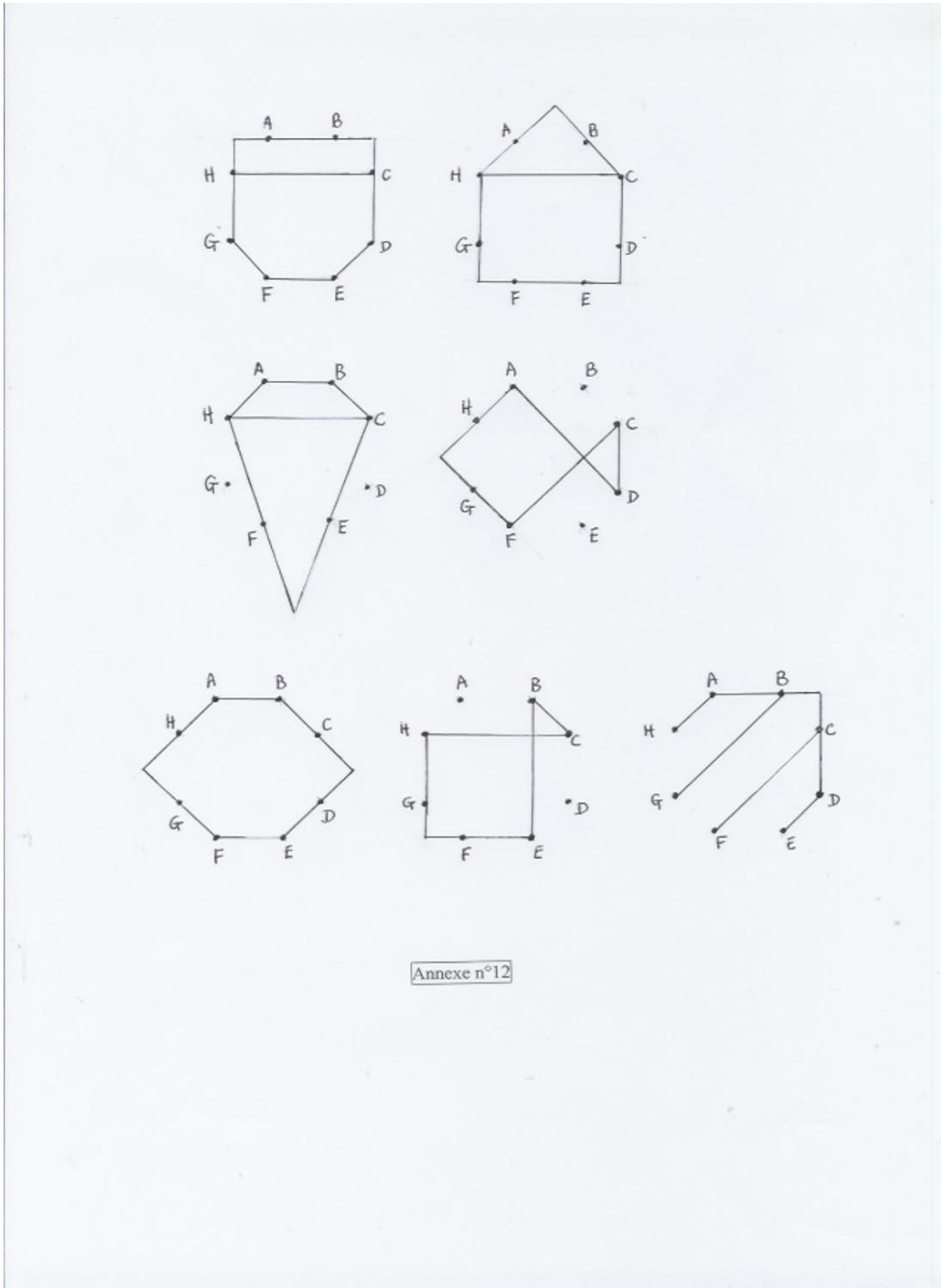
Deuxième série de figures à réaliser par pliage à partir du carré initial. (Echelle  $\frac{1}{3}$ ).

Annexe n°40



Troisième série de figures à réaliser par pliage à partir du carré initial. (Echelle  $\frac{1}{3}$ ).

Annexe n°41



Annexe n°12



Figure a

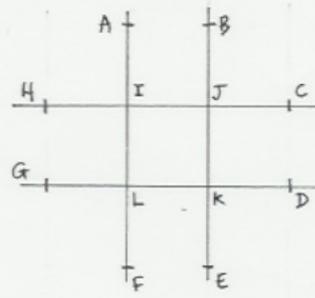


Figure d



Figure b

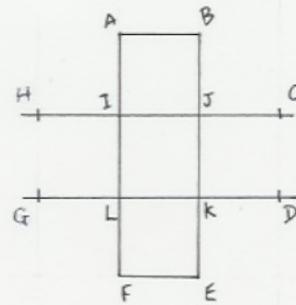


Figure e

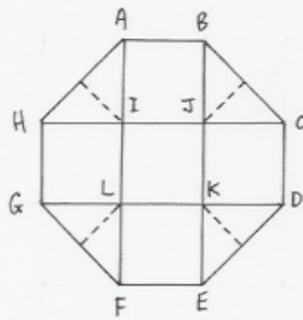


Figure c

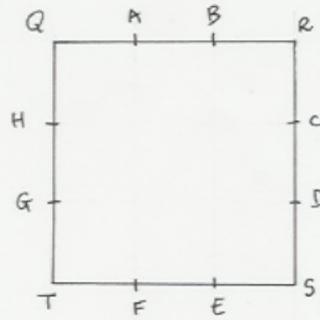
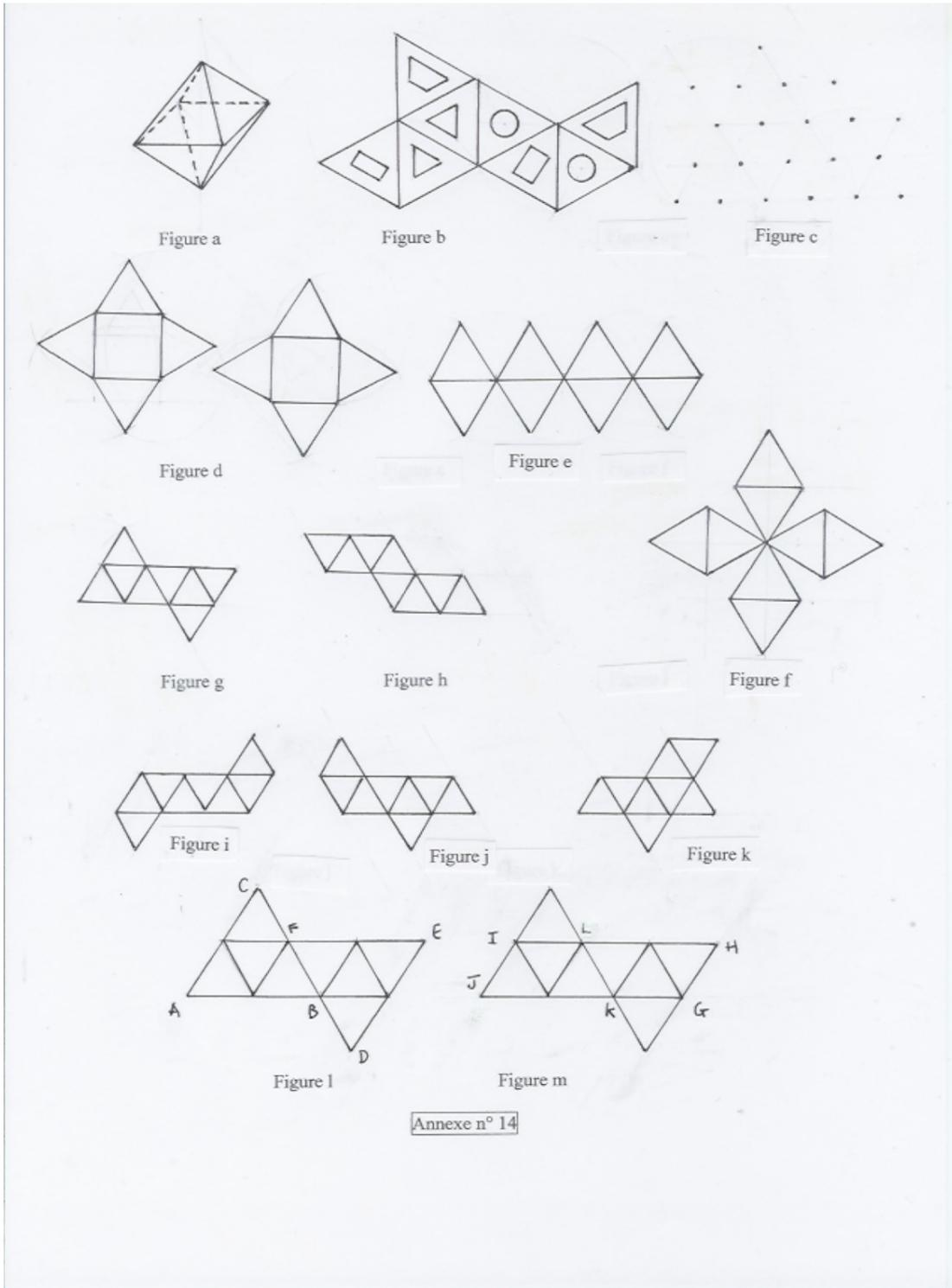


Figure f



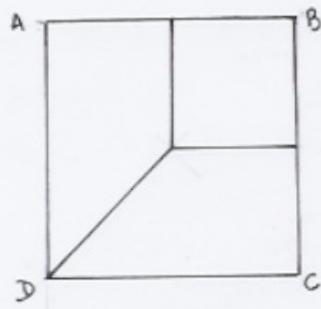


Figure a

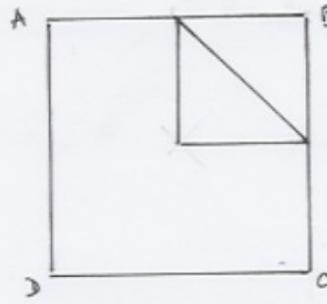


Figure b

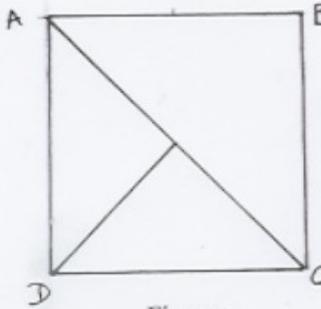


Figure c

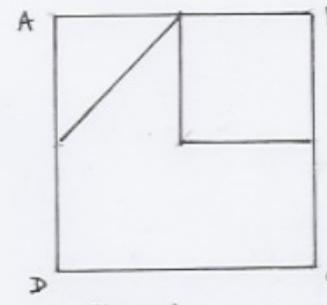


Figure d

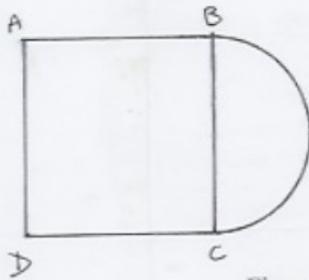


Figure e

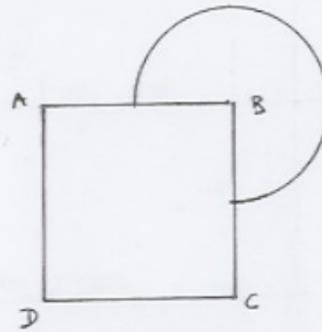


Figure f

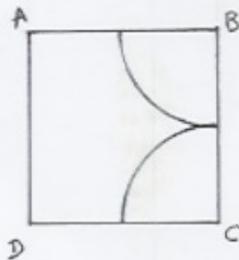


Figure g

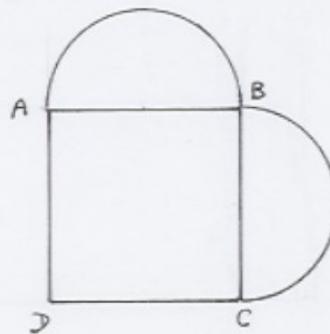
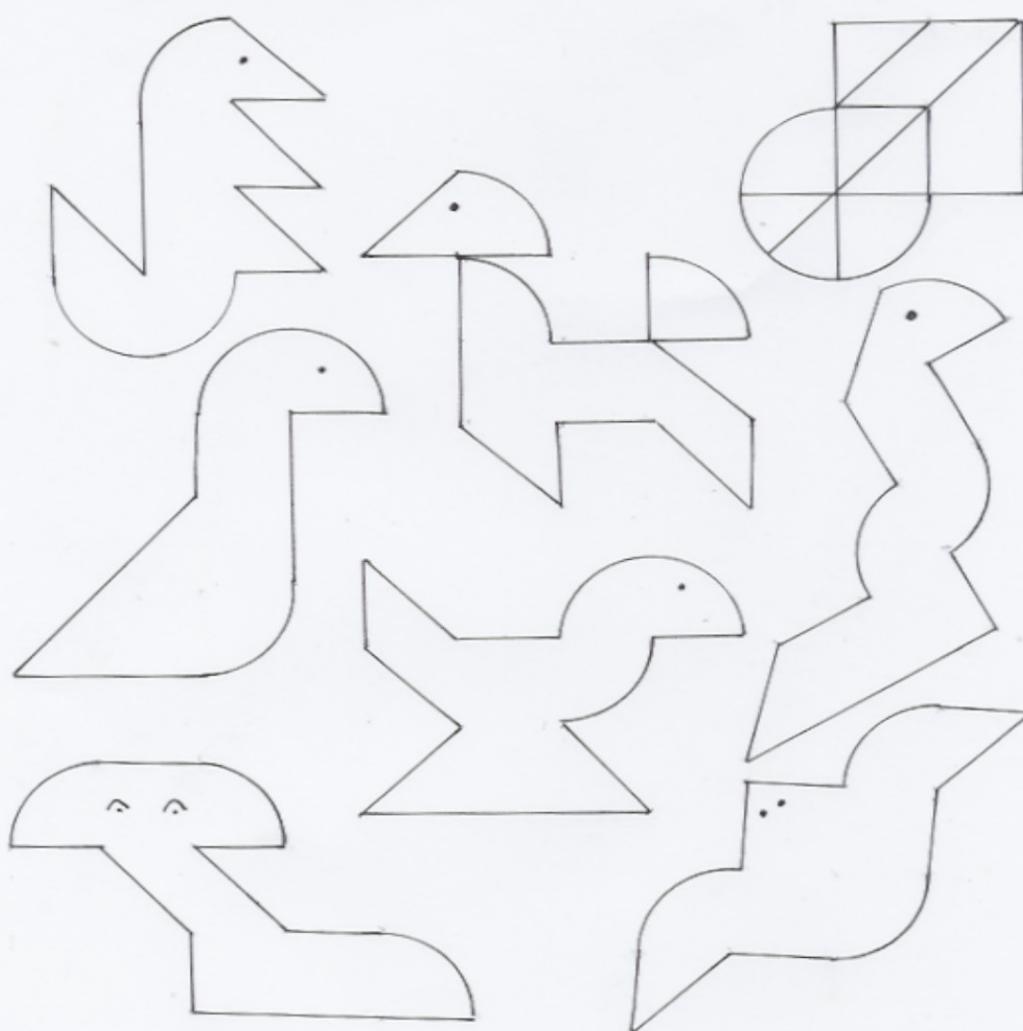


Figure h



Puzzle géométrique « La goutte d'eau » et quelques silhouettes à reconstituer

Annexe n° 16