MATÉRIEL ET MANIPULATION COMME AIDE À LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Lucia GRUGNETTI
Unité de recherche en didactique des mathématiques de l'Université de Parma
lucia.grugnetti@unipr.it

François JAQUET
Ancien chercheur à l'Institut romand de recherche et documentation pédagogique (IRDP)
Rédacteur de la revue *Math-École*
fr.jaquet@wanadoo.fr

Résumé
Ce texte est le compte rendu d'un atelier, au cours duquel les participants, adultes, ont résolu eux-mêmes une dizaine de problèmes par manipulations, sans papier ni crayon, en se demandant dans quelle mesure le matériel proposé facilite ou modifie la tâche de résolution pour les élèves.
Les commentaires et remarques des participants, jointes aux nombreuses observations d'enseignants et de formateurs qui ont déjà expérimenté ce mode de résolution avec des enfants, font l'objet d'une synthèse pour quelques-uns de ces problèmes, et de propositions de gestion en classe pour l'un d'entre eux : « L'escalier des différences ». D'autres commentaires figurent pour trois autres activités.
Le travail de rédaction de notes méthodologiques pour chacun de ces problèmes est en cours, ainsi que la mise au point de nouveaux sujets. Toutes les suggestions de participants ou lecteurs seront les bienvenues (à l'adresse ci-dessus des animateurs) pour l'élaboration d'un ensemble d'activités comprenant les énoncés, le matériel et les commentaires didactiques correspondants.

I – INTRODUCTION

La manipulation ou le recours à des matériels peuvent-ils faciliter la tâche de résolution d'un problème et, par conséquent, la construction des savoirs mathématiques qui y sont liés ?

La réponse à cette question est le plus souvent affirmative lorsqu'on évoque les élèves pour lesquels le geste est nécessaire avant le passage à l'écriture, ceux qui ont besoin d'objets concrets pour se représenter les objets mathématiques, ceux qui doivent « agir pour abstraire »…

Il n'est cependant pas inutile d'examiner plus en détails les effets produits par l'apport de matériels de manipulations à un énoncé de problème sous forme de texte et d'éventuelles illustrations.

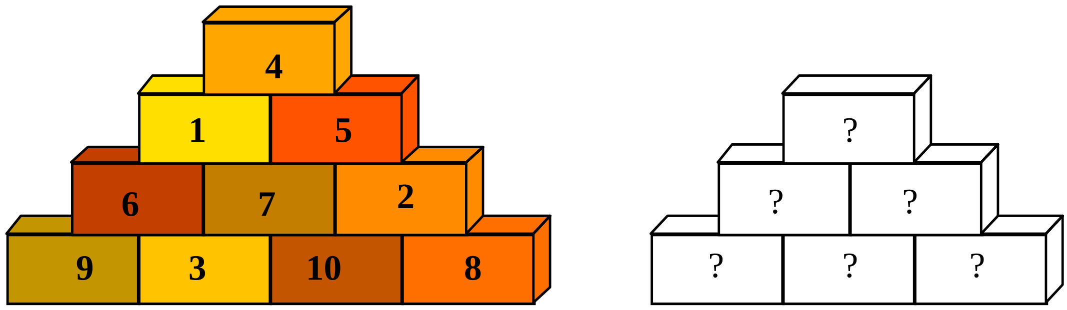
Les problèmes proposés, destinés à des classes de CE2, CM, 6^{e}, 5^{e} et 4^{e}, ont été très largement expérimentés (par des centaines ou des milliers de groupes d'élèves, dans plusieurs pays) et analysés dans le cadre du « Rallye Mathématique Transalpin ». Ils ont été ensuite transformés en « manipulations », pratiquées à leur tour par de nombreux enfants et adultes lors d'expositions, salons et autres manifestations publiques (ex. Grugnetti, Jaquet, 2005).

Voici, pour introduire le thème de l'atelier, un ensemble de questions qu'un enseignant pourrait se poser à propos de l'une de ces activités :

J'enseigne dans une classe d'élèves de 7 - 8 ans (CE1), j'ai trouvé un problème, « L'escalier des différences », qui me paraît à priori intéressant pour mon cours de mathématiques car, j'y vois :

- *une consolidation des opérations dans le champ conceptuel de l'addition ;*
- *la conduite d'une recherche individuelle ou par groupes de deux élèves, autovalidante ;*
- *un défi, susceptible de motiver mes élèves ;*
- *une activité facile à gérer et à évaluer.*

L'escalier des différences



L'escalier de gauche, de quatre étages, est construit ainsi :

Règle 1 : Chaque brique porte un nombre naturel qui est la différence des nombres des deux briques sur lesquelles elle repose.

Règle 2 : Tous les nombres de l'escalier sont différents.

Avec les mêmes règles, construisez des escaliers de trois étages, (comme celui de droite), en utilisant les nombres de 1 à 6.

Combien en trouverez-vous de différents ?

Matériel

Six jeux (au moins) de 6 briques numérotées de 1 à 6.

Solutions

Il y a **4 solutions** (constructions) différentes, en tenant compte que les dispositions symétriques se retrouvent sur l'autre face de chaque pyramide :

1	**2**	**3**	**3**
4 3	**5 3**	**5 2**	**4 1**
6 2 5	**6 1 4**	**1 6 4**	**2 6 5**

Niveaux

Dès le CE1.

On propose du matériel pour cette activité, mais je ne vois pas trop ce que ça peut apporter.
Peut-être pour les élèves en difficulté ?
Pour les plus lents ?
Pour permettre une plus grande autonomie ?
Essayons tout de même et regardons d'un peu plus près.
Tout d'abord, y a- t- il un peu de mathématiques derrière cette manipulation ?
Quelle durée vais-je accorder ?
Comment organiser le travail ? Par groupes, individuellement ?
Comment vais-je savoir ce que les élèves ont fait ? Vais-je demander une trace écrite ?
Que vais-je en faire plus tard ?

II – DE LA RÉSOLUTION « PAPIER-CRAYON » À LA MANIPULATION

L'énoncé et le matériel étant donnés à l'élève, celui-ci va se lancer dans la recherche de la solution qui se décompose en plusieurs étapes :

II – 1 Phase 1. La lecture et l'appropriation

Il n'y a pas, à ce moment-là, de grande différence entre le problème et la manipulation puisque le support écrit est le même. Toutefois, le matériel permet de fixer les représentations. Dans l'exemple de « l'escalier des différences », la « brique » du texte est immédiatement concrétisée par un parallélépipède en bois avec ses caractéristiques physiques.

II – 2 Phase 2. La recherche de la solution

Le matériel permet un gain de temps considérable dans les essais et offre une représentation concrète de l'escalier. Il faut toutefois relever que la disposition verticale des briques incite à commencer par la base, alors que, sur le papier (avec les figures des escaliers à compléter), on peut aussi bien commencer par le sommet.

Les trois pièces de base placées, les suivantes sont testées très rapidement et, en cas d'insuccès, les modifications de la base sont rapides aussi.

Il arrive souvent que les élèves travaillent par triplets de briques tenues dans une main : deux dans la base et la troisième, par-dessus, correspondant à la différence. Ils cherchent à combiner ces triplets avec les trois pièces restantes.
La correspondance des gestes avec les contenus mathématiques du problème relevés lors de l'analyse a priori est évidente :

- la maîtrise de l'addition et la soustraction sur les premiers nombres naturels s'observe dans la formation des triplets, dans les contrôles permanents amenant aux changements de briques… ;
- les conjectures et leurs vérifications sont visibles dès le moment où les essais ne se font plus au hasard et qu'on voit apparaître une recherche systématique ou que des résultats intermédiaires sont atteints comme la présence obligatoire de la brique « 6 » dans la base, mais non voisine de « 3 », … ;
- l'organisation d'un inventaire et la validation s'observent au fur et à mesure que les pyramides trouvées s'alignent devant l'élève.

Au cours de l'activité, l'élève élabore donc des « règles de construction » par exemple :

a) Le « 6 » ne peut pas être une différence parmi les nombres de 1 à 6, par conséquent, il doit figurer dans la base de l'escalier ; et le « 5 » ne peut par conséquent pas figurer au sommet de l'escalier puisqu'il ne peut s'exprimer que comme la différence de 6 et 1 qui devraient se trouver au premier étage ;
b) Le « 6 » et le « 3 », comme le « 4 » et le « 2 » ou encore le « 1 » et le « 2 », ne peuvent être placés l'un à côté de l'autre ;
c) Si « 4 » était au sommet, il ne pourrait être que la différence entre 5 et 1 (car 6 est dans la base), qui seraient alors placés au premier étage, mais alors 5 ne pouvant être que la différence entre 6 et 1 placés dans la base, on arrive à une contradiction car la pièce « 1 » est déjà au premier étage ; on en conclut ainsi que le « 4 » ne peut être au sommet de la pyramide et que, vu le point a) seules les pièces « 1 », « 2 » et « 3 » peuvent y être.

Ces « règles de construction » sont des petits « théorèmes locaux » dont la validité est limitée à l'escalier mais dont certains participent à la construction de connaissances mathématiques plus générales, comme, en particulier, à prise de conscience que la différence de deux nombres naturels différents est toujours un nombre inférieur au plus grand des deux, qui peut être égal au plus petit des deux, ou inférieur…

II – 3 Phase 3. La validation

Ces règles doivent peu à peu permettre à l'élève de former tous les escaliers possibles. Le matériel a été conçu pour que la quantité des pièces à disposition ne suggère pas le nombre de solutions (Les briques permettent de construire 6 escaliers alors que 4 seulement sont différents).

La position verticale des pièces permet de voir l'escalier des deux côtés. Si les élèves trouvent deux dispositions symétriques des faces visibles, il leur suffit de tourner l'une des constructions d'un demi-tour pour s'apercevoir qu'il s'agit du même escalier.

Mais le matériel ne garantit pas l'exhaustivité des solutions, ni la formulation des règles découvertes et mises en œuvre pour y arriver.

C'est à ce moment-là qu'intervient le maître, pour organiser, s'il le souhaite, une exploitation de l'activité à des fins didactiques.

III – LA GESTION DE L'ACTIVITÉ

Pendant ou après l'atelier, le maître va devoir choisir ses types d'intervention et les développements qui lui semblent favoriser les apprentissages de ses élèves. On entre ici dans la gestion et l'exploitation de l'activité, avec une très grande variété de possibilités :

III – 1 Variante « pour occuper les élèves »

Le matériel est libre d'accès, à destination des élèves qui ont terminé le travail ordinaire de la classe et qui ont un moment à occuper. Ils s'engagent dans la recherche de la solution, créent un escalier ou deux ou abandonnent en cas d'obstacle trop important, puis remettent le matériel dans sa boîte et passent à une autre occupation.

En travaillant sur cet atelier, ils n'ont « pas fait de mal ». Ils ont peut-être : fait un peu de mathématiques, vérifié leur(s) solution(s), éprouvé du plaisir ou de l'ennui, modifié leur rapport affectif avec la discipline, toutes choses que le maître ne peut pas évaluer.

III – 2 Variante d'occupation avec « contrat » minimum

Comme dans la variante précédente, les élèves choisissent l'atelier de « L'escalier des différences » mais avec l'obligation de conserver une trace écrite de leur activité : les solutions trouvées, la date, l'heure, la durée et quelques explications éventuelles sur leur démarche.

L'examen des protocoles va permettre au maître, s'il en a le temps et l'envie, de contrôler les solutions et de demander à l'élève des compléments d'information sur ses démarches.

III – 3 Variante avec « contrat » collectif

Les élèves doivent travailler par deux au minimum, fournir un compte rendu de leurs recherches avec solutions et explications après que le maître leur ait expressément demandé de trouver toutes les solutions.

Le maître pourra alors, apprécier les solutions et provoquer une confrontation entre les membres du groupe sur les solutions et leurs explications.

III – 4 Variante « la totale »

Toute la classe est organisée en groupes qui travaillent par rotation, sur plusieurs ateliers, avec rédaction d'un rapport, comme précédemment.
Une mise en commun est organisée, sur la base des rapports de chaque groupe.
Le maître prévoit ensuite une phase d'institutionnalisation des connaissances mathématiques mises en œuvre (sur les différences, sur la certitude qu'il n'y a pas d'autre solution, sur la reconnaissance de solutions équivalentes par symétrie ainsi que le permet le matériel) et des activités complémentaires (escaliers de 4 étages).

IV – AUTRES EXEMPLES

Voici quelques autres exemples de « problèmes-manipulations » présentés lors de l'atelier, qui ont particulièrement montré l'intérêt d'une résolution par matériel et pour lesquels les participants ont formulé des remarques. (L'ensemble de ces activités, et une brochure d'accompagnement contenant des notes méthodologiques et didactiques en préparation, peuvent être obtenues, sur demande, auprès des animateurs).

IV – 1 Exemple 1

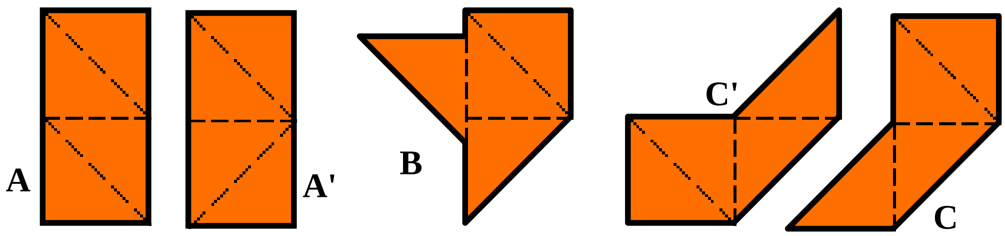
Miss Troispointe

Miss Troispointe est une passionnée de puzzles.

- Avec quatre triangles, rectangles, isocèles, égaux, elle arrive à former des polygones différents.
- Dans les polygones qu'elle forme, les quatre triangles ne se recouvrent pas et ont chacun au moins un côté commun avec l'un des autres triangles.

Dessinez les polygones différents que vous avez trouvés et classez-les selon le nombre de leurs côtés.

Exemples : A est une solution acceptable, c'est la même que **A'** car les deux rectangles sont égaux même si les triangles n'y sont pas disposés de la même manière. **B** n'est pas une solution acceptable pas car le triangle de gauche n'a pas de côté commun (sommets compris) avec celui d'un autre triangle. **C** et **C'** sont égaux car on peut les superposer exactement, ils ne représentent donc qu'une seule et même solution.



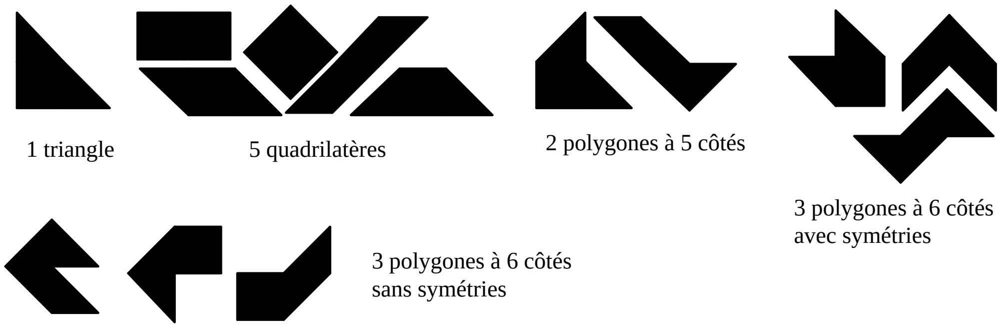
Dans « Miss Troispointe », le matériel (une centaine de triangles rectangles isocèles en bois : demi-carrés de 4 cm de côté) permet un gain de temps considérable dans les essais et simplifie la recherche en remplaçant les constructions géométriques sur papier (éventuellement quadrillé) par des déplacements d'objets.

Cette simplification est aussi une « perte » au niveau géométrique puisque la manipulation permet de rester dans l'espace des objets physiques sans passer aux « figures ». Mais la « perte » n'est que momentanée si l'on exige, après l'inventaire des constructions concrètes, de les transcrire sur papier par des figures géométriques.

Les contenus mathématiques du problème sont du domaine de la géométrie (pour autant qu'on ne se limite pas à la manipulation) :

- isométries : déplacements dans l'espace physique puis leur transcription dans le plan de l'espace géométrique par des translations, rotations et symétries axiales (retournements) ?
- reconnaissance de figures isométriques, avec analyse de leurs caractéristiques (nombres de côtés, axes de symétrie, orientation), pour éviter les répétitions dans l'inventaire ?
- construction de figures :
  - sur papier blanc, avec prise en compte des dimensions et des angles,
  - sur papier quadrillé, après la reconnaissance de la position de la figure de base (triangle isocèle rectangle) et de sa position sur le quadrillage.

L'inventaire des solutions fait encore apparaître des pistes d'exploitations pour aborder ou rappeler d'autres connaissances sur les polygones que celles qui ont été évoquées ci-dessus.

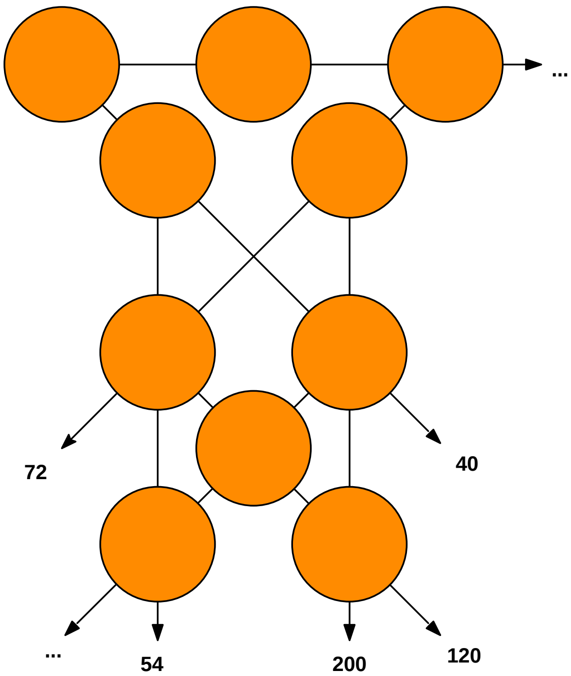


L’observation des reports de l’inventaire des objets de l’espace physique sur papier (espace géométrique du plan) donne de précieuses indications sur la maîtrise, par l’élève, de toutes les connaissances évoquées précédemment :

- si deux figures isométriques apparaissent dans l’inventaire, c’est que la capacité de les tourner ou de les retourner mentalement n’est pas mobilisable ;
- s’il manque un type de figures, les « non convexes » par exemple, c’est la notion de « polygone » qu’il s’agira d’étendre ;
- si l’inventaire est incomplet, on entre dans le domaine de la combinatoire et des méthodes permettant d’assurer l’exhaustivité ;
- …

IV – 2 Exemple 2

Produits en ligne



Disposez les dix nombres de 1 à 10 dans les cercles de cette figure, de telle manière que le produit de trois nombres alignés soit le nombre indiqué en fin de ligne.

Calculez les deux produits manquants.

Combien y a-t-il de manières de disposer ces dix nombres ?

Voici l'analyse de la tâche de « Produits en ligne » rédigée lors de l'élaboration du problème du RMT :

« …

- Vérifier qu'il y a bien dix cercles, et que chaque produit indiqué ou manquant correspond à un alignement de trois cercles, constater que chaque produit donné peut être celui de trois nombres de 1 à 10, mais qu'il y a en général plusieurs solutions;
- Commencer à placer trois nombres d'un alignement et vérifier si le choix et les emplacements des trois nombres sont compatibles avec les autres alignements, puis continuer ainsi par essais successifs jusqu'à la disposition complète (ce qui ne permet pas de déterminer le nombre de solutions).
- Travailler par décomposition des nombres en facteurs et par déductions successives sur les emplacements de certains d'entre eux. Par exemple, comme aucun des nombres donnés ne contient 7 dans sa décomposition, celui-ci est obligatoirement dans le cercle du centre de la ligne supérieure, le 9 doit être dans la ligne « 54 » qui contient trois facteurs « 3 » (3 et 6 ne suffiraient pas) et, ne pouvant être dans la ligne « 120 » ni dans la ligne « 40 », il est obligatoirement dans le cercle du bas à gauche, … »

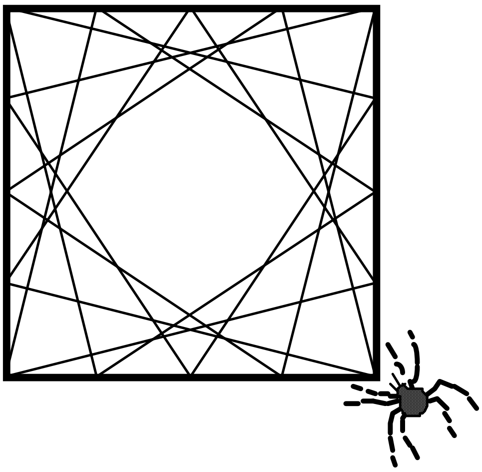
Dans cet exemple, le matériel (10 jetons numérotés de 1 à 10) n'apporte pas une grande aide à la résolution du point de vue des notions mathématiques en jeu : multiples et diviseurs, critères de divisibilité, déductions et organisation logique. Mais on a remarqué qu'il incite les élèves à essayer ou à s'engager dans le problème. Il évite aussi les répétitions de nombres puisque les 10 jetons ont déjà pris en charge la partie de la consigne : « Disposez les dix nombres de 1 à 10 … ». Il permet aussi de gagner un temps précieux dans les essais : plutôt que de dessiner des grilles et de les compléter, on déplace les jetons, mais, en contrepartie, on n'aura pas de mémoire des essais pour les phases de validation ou d'exploitation des recherches.

IV – 3 Exemple 3

Toile d'araignée

L'araignée Tipsy est très contente car sa toile est très régulière et elle n'a utilisé qu'un seul fil pour la tisser (voir figure ci-dessous).

Construisez la toile de Tipsy, de la même forme, sur le cadre.



Le matériel de « Toile d'araignée » est une plaquette de bois avec des clous disposés en carré, 17 sur chaque côté, et un long fil légèrement élastique dont l'une des extrémités est nouée sur le clou du sommet inférieur droit. La manipulation exige un peu d'habilité pour passer le fil sur les clous sans l'emmêler, mais la plupart des enfants y parviennent, dès l'âge de 7 à 8 ans.

Le même problème, sur papier, dans un cadre purement géométrique, fait intervenir la règle et la mesure. La construction de l'objet « toile d'araignée » réduit la mesure ou le mesurage à un comptage, qui n'est cependant pas facile puisqu'il y a un conflit entre le numéro d'ordre des clous sur un côté et les intervalles (le milieu d'un côté sur lequel sont plantés 17 clous est situé au 9^{e} ! et le quart au 5^{e} ! ce qui provoque un « détour » intéressant par le cadre numérique). Le modèle de la toile d'araignée est constitué d'un seul fil, il diffère en cela de la figure géométrique constituée de segments indépendants.

Il y a donc, dans le passage de la manipulation au dessin sur papier, une opportunité à exploiter pour la construction de connaissances numériques (pré-mesure) et géométriques dans les premières années de l'école élémentaire.

V – CONCLUSION

Les manipulations proposées poursuivent les mêmes objectifs que les problèmes dont ils sont tirés.

Même si la présence du matériel facilite parfois la recherche, il est toutefois nécessaire d'aller au-delà des mots et des phrases notées pour en approfondir la signification :

Les phrases « faire des mathématiques en résolvant des problèmes » et « promouvoir la résolution de problèmes pour améliorer l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques » mettent en relation directe les mots « problème » et « mathématiques » et peuvent faire croire à une inférence logique entre « résoudre des problèmes » et « faire, comprendre ou construire des mathématiques ».

Il faudrait plutôt dire : « en résolvant des problèmes, il est plus probable que l'élève construise des connaissances mathématiques qu'en regardant la TV » ou « une part des mathématiques se construit à partir de la résolution de problèmes ».

Les mots « problème » et « résolution de problème » ne sont pas des formules magiques qu'il suffit d'invoquer pour que s'opère la construction des notions mathématiques sous-jacentes. La théorie des situations didactiques l'explique largement : il y a un jeu subtil et complexe entre l'activité de l'élève en résolution de problème et l'élaboration de ses connaissances, régi par le milieu et orchestré par le maître (Grugnetti et al., 2005).

Il faut être conscient que l'élève qui se lance dans l'une de ces manipulations va chercher, tenter de surmonter ou de contourner quelques obstacles, arriver à une solution (juste, fausse, complète ou incomplète) ou encore abandonner en cours de route. Dans un cas comme dans l'autre, il y a tout un travail à développer, où le maître a un rôle essentiel : relance en cas d'obstacle trop important, validation, évaluation, généralisation, institutionnalisation, pour s'assurer que l'activité participe à la construction d'une connaissance mathématique.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

GRUGNETTI L., JAQUET F., TIÈCHE CHRISTINAT C. (2005) Enjeux didactiques des concours mathématiques, in M.H. Salin, P. Clanché, B. Sarrazy (Eds), *Sur la théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage, Editions, 243-248.

GRUGNETTI L., JAQUET F. (2005) Problemi da risolvere con materiale manipolativo/ Problèmes a résoudre par manipulations, *L'educazione Matematica*, Anno XXVI-Serie VIII-Vol. 1, n. 1, Ed. CRSEM, 36-48.