UTILISATION DE LA THÉORIE ANTHROPOLOGIQUE DU DIDACTIQUE EN FORMATION PE1 ET PE2

Yves MATHERON
Maître de conférences, IUFM Midi-Pyrénées
GRIDIFE ERTe 46 & UMR ADEF
yves.matheron@toulouse.iufm.fr

Annie NOIRFALISE
Retraitée. IREM de Clermont Ferrand
Université B. Pascal
Annie.Noirfalise@math.univ-bpclermont.fr

Résumé
L'approche anthropologique en didactique constitue un outil intéressant pour l'analyse des organisations mathématiques et didactiques effectives, et donc des différents matériaux mis à la disposition des professeurs d'écoles.
Après la présentation de certains concepts de la théorie anthropologique et de leur usage possible en formation PE, les participants ont été invités à les faire fonctionner dans deux situations différentes.

On trouvera ci-dessous, dans le paragraphe I, la présentation des concepts utilisés, (paragraphes I – 1 et 1 – 2), suivis, pour chaque partie de cet apport, d'un exemple illustrant son usage dans le cadre d'une formation de professeurs d'école. Dans les paragraphes suivants, (paragraphe II et paragraphe III), un compte rendu est fait du travail avec les participants sur les deux situations qui leur ont été soumises.

I – DEUX CONCEPTS DE L'APPROCHE ANTHROPOLOGIQUE

Dans cet atelier, nous souhaitons montrer que l'approche anthropologique en didactique constitue un excellent outil pour les futurs professeurs d'écoles : elle permet, d'une part, de préciser et d'enrichir les réponses aux questions posées au CRPE, d'autre part, de conduire un travail d'analyse sur lequel peut s'appuyer l'évaluation et le développement de la pratique enseignante.

Nous utiliserons deux notions fondamentales, qui seront présentées et exemplifiées ci-dessous, les notions d'organisation mathématique et d'organisation didactique.

I – 1 Organisation mathématique

I – 1.1 Notion de « praxéologie » mathématique ou d'« Organisation mathématique »

Un premier examen des épreuves du CRPE (jusqu'en 2005) permet de les décrire en les termes suivants :

1) La seconde partie du premier volet : **analyse de productions d'élèves**. (sur 4 points) Des productions d'élèves sont proposées, portant sur une notion enseignée à l'école primaire. Il pourra s'agir : - de préciser la notion étudiée, - de préciser le niveau auquel se situe l'étude, - de préciser les procédures utilisées par les différents élèves pour accomplir le travail demandé, - de repérer les erreurs ou les difficultés rencontrées, les compétences mises en œuvre.	Notion mathématique étudiée Procédures
2) Le second volet : **étude de documents**. (Sur 8 points) Des extraits d'ouvrages scolaires, des documents présentant des séquences ou des comportements d'enfants sont fournis aux candidats, portant sur une notion enseignée à l'école primaire. Il pourra s'agir de : - repérer la notion étudiée, - faire des hypothèses sur les raisons ayant guidé les choix faits en matière de contenus et de gestion de la classe, - apprécier la pertinence de ces choix, - procéder à une analyse et une interprétation des productions d'élèves, - imaginer une suite à la séquence présentées, voire faire sur certains points une proposition alternative	Notion mathématique étudiée et Organisation de l'étude Analyse de séquence Evaluation de séquence Développement de séquence

La plupart des questions posées portent sur « la notion mathématique étudiée » dans les documents fournis et sur « les compétences mises en œuvre », or, en général, ceci est difficile à déterminer sans ambiguïté, comme nous allons l'illustrer ci-dessous.

Considérant que l'activité mathématique est une activité humaine comme les autres, qu'il s'agit d'étudier, la théorie anthropologique du didactique, (TAD), nous offrira des outils pour décrire certains aspects de cette complexité.

Différents visages d'une même notion

Imaginons que vous rentriez dans des classes d'une école primaire et que vous voyiez au tableau **:**

- dans la première classe **:**

13 + 13 = 26

26 + 13 = 39

…

143 + 13 = 156

156 + 13 = 169

162 – 156 = 6

Chaque enfant recevra 12 bonbons et il en restera 6.

- dans la seconde classe :

Part de chaque élève	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Nombre de bonbons distribués	13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169

162 – 156 = 6

Chaque enfant recevra 12 bonbons et il en restera 6.

- dans la troisième classe **:**

$$\begin{array}{r|l} 162 & 13 \\ \cline{2-2} -\ 130 & \ \ 10 \\ \cline{1-1} 032 & +\ 2 \\ \cline{2-2} -\ 26 & \ \ 12 \\ \cline{1-1} 06 & \end{array}$$

ou :

$$\begin{array}{r|l} 162 & 13 \\ \cline{2-2} 32 & 12 \\ 6 & \end{array} \qquad 162 = 12 \times 13 + 6$$

Chaque enfant recevra 12 bonbons et il en restera 6.

Vous pourriez aussi rentrer dans une classe de grande section de maternelle et voir des enfants devant un gros tas de bonbons (la maîtresse nous dit qu'il y en a 162, nombre qu'ils ne connaissent pas), avec comme consigne : combien les 13 enfants de la section auront de bonbons, si on en donne la même chose à chacun, et combien il en restera pour la maîtresse.

Sans familiarité avec l'enseignement primaire et les mathématiques, en première approche, vous seriez tenté de dire que, la conclusion mise à part, ce qui se passe dans ces quatre classes est bien différent d'une classe à l'autre : la disposition des calculs, les opérations mobilisées sur les trois tableaux, la nature des activités dans les trois premières et dans la dernière,… ne sont pas du tout les mêmes.

Après un minimum d'explications, ou si vous êtes par exemple un « matheux », vous reconnaîtrez, sans doute, que les quatre classes traitent de la même notion mathématique, à partir d'un même problème de partage : la division euclidienne.

Si vous êtes professeur d'école, vous y verrez sûrement des activités très différentes, pratiquées dans des cycles différents, nécessitant des pré-requis différents,… mais traitant toutes de la même notion : la division de nombres entiers avec reste.

Mais alors qu'est-ce que c'est que « La notion de division euclidienne » ?

On pourrait évoquer de nombreuses autres situations où on pense rencontrer « la division euclidienne » . Ce que nous allons trouver ce n'est jamais l'objet lui-même, mais des pratiques humaines où est mis en jeu cet objet avec d'autres objets.

On trouvera des déclarations sur la division que l'on rangera sous la rubrique définition : « on appelle division de l'entier a par l'entier b … », déclaration qui est une activité consistant à donner une définition. On pourra calculer, d'une façon ou d'une autre, le reste et le quotient d'un entier par un autre, étudier ou utiliser les propriétés du reste et du quotient. Mais on ne « mettra jamais la main sur l'objet lui-même ». Tout seul il n'existe pas, il n'existe qu'inséré dans des activités. Ce que nous appellerons division est, en fait, l'ensemble de toutes ces pratiques, dont on ne saurait, toutefois, faire un répertoire exhaustif.

L'étude d'une notion mathématique se fera donc à l'aide de différents types d'activités associées à cette notion, au cours desquelles on se conduira de différentes façons ; nous dirons différents types de tâches accomplies avec différents types de techniques.

Dans l'exemple précédent, on a à accomplir une tâche du type : dans une situation de partage équitable d'une quantité donnée en un nombre de parts données, trouver la valeur de chaque part et ce qu'il reste. Pour accomplir cette tâche on est amené à déterminer le quotient et le reste de la division de 162 par 13. En GS, on utilise une technique de distribution effective du gros tas de bonbons dans 13 boîtes, par exemple, jusqu'à ce qu'on ne puisse plus le faire, et l'on compte ce qu'il y a dans chaque boîte et ce qu'il reste. Dans les trois autres classes, on utilise une technique numérique, mais différente d'une classe à l'autre : additions successives dans la première, multiplications successives dans la seconde, division posée avec la potence dans la troisième (technique dite « experte »).

Mais alors qu'est-ce que c'est que connaître « La division euclidienne » ou être « compétent en division euclidienne » ?

Si j'observe quelqu'un en train de repasser du linge, je peux être conduit à dire qu' « il s'y connaît en repassage, ou qu'il est compétent en repassage », ou qu' « il ne s'y connaît pas » : c'est en ce sens que nous parlerons de connaissance, qu'en est-il en matière de division euclidienne ? En fait, la pratique sociale observée, dans une institution donnée, met en jeu certains objets, matériels ou immatériels, visibles ou invisibles, et le fait de « s'y connaître » revient à entretenir avec ces objets des rapports conformes à ce que l'institution attend. Donc « s'y connaître » dans une pratique donnée dépend de l'institution dans laquelle on se trouve.

Pour « s'y connaître » dans la pratique observée, y a-t-il quelque chose à savoir, des compétences à mettre en œuvre ? Ou pour le dire autrement : l'exercice réussi de cette pratique suppose-t-il des savoirs, des savoirs pertinents au regard de la pratique *sociale considérée ? Y a-t-il quelque chose à savoir pour pousser une brouette ? Pour repasser du linge ? Pour faire la vaisselle ? Pour faire la cuisine ? Quels sont les savoirs nécessaires aux élèves pour faire une division ?*

> Les réponses à de telles questions sont diverses, et elles dépendent bien sûr de l'institution dans laquelle on la pose. Si on admet en général que pour pousser une brouette il n'y a rien à savoir, encore que !, et qu'il suffit de le faire, s'il en est peut-être de même, de nos jours, pour la vaisselle ou le repassage, pour la cuisine, les professionnels reconnaissent depuis longtemps le besoin en savoirs, mais on peut très bien savoir faire la cuisine chez « Trois Gros » et ne pas savoir la faire à la cantine du lycée.

On peut dire que dans des conditions données (en G.S., en CE2, en CM2, en DEUG math, …), connaître telle notion mathématique, c'est, au moins, savoir accomplir un certain type de tâches avec une technique ou une procédure reconnue comme pertinente dans ces conditions, on parlera de savoir-faire.

> Si on se trouve en préparation au CRPE, connaître la division euclidienne, c'est connaître les différents types de tâches de division et pouvoir les accomplir avec les différentes procédures mises en œuvre tout au cours de la scolarité primaire, mais c'est aussi savoir expliquer comment ces procédures marchent, pourquoi elles sont pertinentes, c'est aussi savoir que le couple (q ,r) tel que $a = b\,q + r$, est unique dans certaines conditions, et quelles sont les théories qui rendent ces procédures légitimes.

Compte tenu de ce qui précède, on voit déjà que la définition d'une « notion mathématique » recouvre de multiples éléments dont la nature dépend du lieu où l'on se trouve. Pour rendre compte de cette complexité, nous allons parler d'organisation mathématique et distinguer **quatre éléments constitutifs** de chaque organisation mathématique que nous serons amenés à étudier :

1^er^ élément

Toute activité humaine peut être repérée comme correspondant à une *tâche* ou un *type de tâches*. Dans la plupart des cas, une tâche (et le type de tâches auquel elle appartient), s'expriment par un verbe d'action : *balayer* la pièce, *monter* l'escalier, « *déterminer* le montant de chaque part ou le nombre de parts dans des situations de partage ou de distribution équitables », « *calculer* le quotient et le reste de la division euclidienne d'un nombre entier (d'au plus 4 chiffres) par un nombre entier (d'au plus 2 chiffres),… par un calcul posé ».

Remarque : une tâche, ou plutôt un type de tâches, suppose un objet relativement précis : « calculer », « dessiner », « démontrer », *etc*., sont des genres de tâches qui demandent à être précisées pour être étudiées.

2^ème^ élément

Une activité suppose une manière d'accomplir, de réaliser la tâche ou le type de tâches, à cette manière de faire on donne le nom de *technique*. Contrairement à ce que beaucoup croient, une technique ne se réduit pas nécessairement à un algorithme, bien que l'existence éventuelle d'un algorithme pour un type de tâches donné simplifie considérablement sa réalisation. Le terme de technique renvoie directement à la notion de *technè*, d'où il tire son étymologie. Pour les Anciens Grecs, elle désignait l'ingéniosité du sens pratique, évoquait l'art, l'habileté, la compétence impliquée dans la production délibérée de quelque chose ; contrairement à ce qui dérive purement et simplement de la nature ou du hasard. Ainsi, dira-t-on encore de nos jours d'un artiste qui maîtrise son art, qu'il « maîtrise sa technique » ; ce qui est loin de signifier qu'il se contente de la mise en œuvre d'algorithmes pour les tâches de son domaine. Dans les textes officiels qui utilisent à la place de « technique », et trop souvent le terme de *procédure* (« *procédure experte* », « *procédure personnelle* »), beaucoup moins pertinent pour rendre compte de l'activité mathématique, ce sens est perdu. On peut à juste raison se demander pourquoi le terme de « procédure », directement issu du droit, est mentionné pour désigner la réalisation d'une tâche ***mathématique*** ; dans un sens courant, une procédure désigne encore un ensemble de règles d'organisation à suivre, et a donné naissance au terme, plutôt péjoratif, de « procédurier ». Un certain type de tâches et une technique, c'est-à-dire une certaine manière de faire, d'accomplir les tâches de ce type, constituent ce que l'on nomme couramment un *savoir-faire*.

Remarques :

- une technique ne réussit, en général, que sur une partie des tâches du type auquel elle est relative, partie qui délimite la *portée de la technique*. Une technique peut être supérieure à une autre car couvrant un ensemble plus important de tâches d'un type donné, (avec la technique de partage évoquée en G. S., on ne réussirait pas à partager les gains du loto entre les parieurs gagnants) ;
- une technique, à propos d'un type de tâches donné, dépend de l'institution dans laquelle se déroule la pratique. Dans une institution donnée, il existe en général une seule ou un petit nombre de techniques institutionnellement reconnues pour accomplir un type de tâches, d'autres techniques peuvent exister dans d'autres institutions et seront considérées comme étranges voire contestables ou inacceptables par les sujets de cette institution (il existe plusieurs techniques de division posées).

3ème élément

Dans une institution donnée on va généralement tenir un discours rationnel sur la technique : description de celle-ci, justification du fait qu'elle permet bien d'accomplir les tâches du type concerné. Ce discours est appelé *discours technologique*. La fonction de la technologie est aussi d'expliquer, de rendre intelligible, d'éclairer la technique, et de la produire.

Remarques :

- dans toutes les institutions, pour un type de tâches institutionnellement reconnu, il y au moins un embryon de technologie, bien souvent intégré à la technique : par exemple quand on dit « Si 8 sucettes coûtent 10 francs, 24 sucettes soit 3 fois 8 sucettes coûteront *3 fois plus*, soit 3 fois 10 francs. », le discours tenu permet à la fois de trouver le résultat demandé (fonction technique) et de justifier que c'est bien là le résultat attendu. Mais comme souvent les techniques utilisées sont naturalisées dans les institutions où on les utilise la justification disparaît, la technique est la « bonne manière de faire » ;
- au-delà de s'assurer que la technique donne bien ce qu'on attend, la technologie doit permettre de préciser pourquoi il en est bien ainsi. En mathématiques, l'exigence démonstrative entraîne souvent à ce que la fonction de justification l'emporte sur la fonction d'explication ; c'est un reproche que tant Descartes que Pascal adressaient déjà à Euclide.

$4^{ème}$ *élément*

Au-delà, en général, une *théorie* permet de justifier la technologie : si le discours théorique est majoritaire dans un enseignement universitaire, il est très peu présent dans l'enseignement secondaire, et totalement absent dans l'enseignement primaire. A propos d'un certain type de tâches, le bloc technologie – théorie est souvent nommé un *savoir*.

Remarques :

- en général une même théorie justifie plusieurs technologies, dont chacune à son tour justifie et rend intelligibles plusieurs techniques correspondant à autant de type de tâches. Ceci conduit souvent à minorer les savoir-faire (plus ponctuel) par rapport aux savoirs (plus globaux) ;
- une *organisation mathématique* construite autour d'un type de tâches est constituée des quatre éléments décrits précédemment : type de tâches, technique, technologie, théorie. En général certains de ces éléments sont absents et cette absence correspond à des questions à étudier : tâches nouvelles, problématiques, à la recherche de techniques pour les accomplir ; tâches anciennes pour lesquelles les techniques classiques paraissent obsolètes ; tâches routinières, correspondant à des techniques parfaitement adaptées pour lesquelles le bloc théorique est complètement ignoré…

I – 1.2 Utilisation de la modélisation précédente à propos d'un sujet de CRPE

On trouvera en **ANNEXE 1** le texte du sujet de la deuxième épreuve du volet 1 du CRPE Aix-Marseille, Corse, Montpellier, Nice – mai 2000, sur lequel porte le travail de ce paragraphe.

Le candidat au CRPE doit, à travers cet énoncé et comme c'est très souvent le cas pour d'autres sujets du CRPE, se livrer tout d'abord à un travail d'identification, afin d'être précis et complet dans ses réponses et éviter les contresens. Tentons de suivre en quoi le modèle didactique précédemment exposé peut l'aider dans cette tâche.

Le candidat rencontre tout d'abord la question formulée en ces termes : « Quelle compétence, en termes de connaissance des nombres, est mise en jeu ? »

Les compétences citées ici se construisent pour une large part à travers la résolution de problèmes et les types de tâches qu'ils contiennent. Il s'agit donc de décrire (éventuellement d'évaluer) le rapport aux nombres dont on est raisonnablement en droit d'attendre l'établissement pour des élèves du CE2 ; donc le rapport institutionnel « aux pratiques à nombres ». Pour plus de précision, il faut donc retourner à la consultation des programmes des cycles 2 et 3, puisque le CE2 est la première classe du cycle 3.

Le terme de « connaissances » semble beaucoup plus flou et difficile à définir, même si en philosophie et en didactique des mathématiques de langue française (car la distinction n'existe pas en anglais, ce qui pose divers problèmes), il adopte un sens très précis : les connaissances sont essentiellement attachées aux personnes (rapports personnels), éventuellement aux groupes, mais ne peuvent être facilement détachées des personnes et des contextes, à l'inverse des savoirs (rapports institutionnels). Dans des expressions comme « les connaissances des élèves », « connaissances maîtrisées ou non maîtrisées » le terme de « connaissances » semble plutôt renvoyer à un savoir-faire, donc à un couple (type de tâches, technique), que l'élève possèderait ou non en propre.

Mais en même temps, on ne peut s'empêcher d'y voir certains éléments technologiques, comme c'est le cas dans l'expression « connaissance d'une notion ». Ainsi lorsque cette dernière expression est accolée à, par exemple, décimal, fraction, proportionnalité, l'expression renvoie-t-elle sans doute aux décimaux, aux fractions, à la proportionnalité qui sont certes des « notions » rencontrées à travers l'accomplissement d'activités, mais aussi grâce à des définitions et des propriétés ; c'est-à-dire grâce à des éléments technologiques. Le terme de « connaissance » utilisé dans ce genre d'énoncé est donc particulièrement riche de confusions.

La deuxième question demande : « Classez ces productions en fonction de la procédure utilisée… »

Le terme « productions » renvoie sans doute à ce qui est donné à voir lorsque a eu lieu l'accomplissement d'une ou plusieurs tâches d'un type donné. Mais lorsqu'elles sont qualifiées « d'expertes » ou de « rudimentaires », ce terme contient sans doute un sens qui renvoie à la prise en compte de la technique utilisée par l'élève pour accomplir la tâche. Quant aux termes de « procédures » ou de « démarches », ils peuvent sans doute être associés aux techniques.

Comme on l'a déjà mentionné, le terme de « procédure », qui vient de procéder (en latin *pro cedere* qui signifie « s'avancer »), est issu du droit. Ce terme juridique apparaît vers le milieu du XIV^{e} siècle. Il est associé aux termes de « formalités » à remplir, ou de « règles d'organisation judiciaire » à suivre. On voit donc qu'il est déjà particulièrement mal adapté pour la description d'une pratique relevant d'un savoir, comme le sont les mathématiques. Importé du droit par la psychologie, le terme de « procédure » a ensuite été exporté sans plus de réflexion vers l'enseignement… Il ne permet de rendre compte, ni de la complexité d'un savoir telle qu'elle a été décrite en termes d'organisation praxéologique, ni de la réalisation des tâches relevant de ce savoir par quiconque, et notamment par les élèves.

Voici par exemple ce que l'on trouve dans un glossaire de psychologie de l'Université Pierre Mendès-France de Grenoble : « Les activités de résolution de problème relèvent d'un niveau de contrôle plus élevé de l'activité, celui nécessité par l'élaboration de procédures. Elles sont dirigées par une stratégie, grâce à la mise en œuvre des méta-opérations d'élaboration d'une procédure ». Tout le problème, qui demeure entier depuis la psychologie parce qu'elle ne s'intéresse ni aux savoirs, ni aux institutions au sein desquelles on les rencontre, est de parvenir à décrire le bien mystérieux « méta »…

Ce même glossaire fournit une définition du terme de procédure : « Suite organisée d'actions permettant de réaliser un but. Dans l'analyse des procédures, il est opportun d'envisager deux distinctions. La première oppose une procédure en voie de constitution (il s'agit alors d'une situation de résolution de problème) à une procédure déjà constituée, ou savoir-faire (on parle alors de connaissances procédurales). L'organisation interne et la gestion de l'exécution varient avec le degré d'apprentissage. La seconde concerne la description que fait un individu de la procédure qu'il emploie et la réalisation effective de celle-ci... » (Grand Dictionnaire de Psychologie, Larousse). Dans ce deuxième cas encore, la description de la procédure ne peut être envisagée que relativement à l'individu qui la suit. On oublie ainsi qu'elle est portée d'une part par les communautés historiques qui ont conçu le savoir mathématique, d'autre part par la communauté sociale qui s'est chargée de sa transposition au niveau du cursus considéré, et enfin par la « communauté-classe » à laquelle appartient l'élève et où se déploient les pratiques relatives au savoir. C'est son plus ou moins grand assujettissement au contrat didactique qui garantit la mise en œuvre d'un technique plus ou moins idoine à ce que l'on attend de lui.

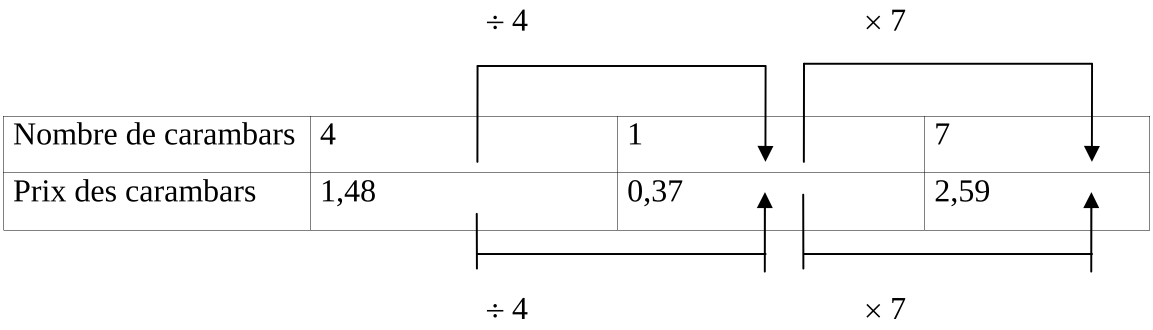
On voit donc que l'entrée par le *logos* d'où vient le terme de « technologie », et qui est le discours raisonné qui, dans une institution donnée, justifie, rend compréhensible et produit les « procédures », est absent de cette définition venue de la psychologie, alors qu'il constitue le cœur de l'activité mathématique. Cette activité est un construit humain chargé d'histoire, et non une activité propre à un sujet indépendamment des institutions qui lui ont fait rencontrer cette pratique sociale ; institutions au premier titre desquelles se trouve l'École. Et il en est de même de bien d'autres activités intellectuelles, et / ou scolaires, qui sont, elles aussi et avant toutes choses, des pratiques sociales dans lesquelles l'élève est convié d'entrer.

Ce détour technologique étant accompli, on pourrait donc croire que le terme de « procédure » renvoie en général, et comme on l'a déjà mentionné, au terme de « technique » utilisé en didactique des mathématiques. Ici cependant il faut discriminer plus finement car, pour s'engager dans la technique de groupement que les élèves utilisent tous, les élèves recourent à des systèmes de signes (systèmes sémiotiques) différents. Certains de ces systèmes sont de nature « strictement mathématique », d'autres relèvent de systèmes de représentation sémiotique sans doute rencontrés dans les classes précédentes, mais qui ne font pas partie de la panoplie des écritures mathématiques canoniques.

Ainsi, le terme de « procédure » utilisé dans ce sujet de CRPE doit-il encore être compris, dans ce contexte, comme signifiant « outil » ; ce qui est tout autre chose que le sens donné par la définition psychologique de « procédure » en tant que « suite organisée d'actions ». C'est effectivement grâce à des outils que l'on peut s'engager dans l'accomplissement de techniques. Ainsi, au type de tâches non mathématique consistant à « verser dans un verre le contenu d'une bouteille fermée par une capsule », est traditionnellement associée la technique consistant à commencer par la décapsuler ! L'engagement dans cette technique requiert l'usage d'outils qui peuvent être très divers : du décapsuleur lorsqu'on en a un, en passant par le tournevis, le choc sur le bord d'une table, *etc*.,… en allant pour certains jusqu'aux dents, lorsqu'ils ne disposent de rien d'autre ! On voit donc que l'engagement dans une seule et même technique qui, précisons-le une fois de plus, est loin d'être un algorithme !, peut se faire grâce à une multitude d'objets qui deviennent alors, pour le coup, des outils. Si c'est le cas dans cet exemple trivial, c'est aussi le cas en mathématiques, comme c'est encore le cas des mains du sculpteur qui « maîtrise sa technique ».

Il en est ainsi, par exemple, si l'on envisage le type de tâches contenu dans l'énoncé du problème suivant : « Sachant que 4 carambars coûtent 1,48 €, combien coûtent 7 carambars ? ». On peut, pour réaliser ce type de tâches, recourir à la technique dite du « retour à l'unité », en supposant que les prix et les nombres de carambars sont proportionnels. Pour mettre en œuvre cette technique, on dispose de plusieurs outils ; on en retiendra trois, sans prétendre pour autant qu'ils aillent du « rudimentaire » au « sophistiqué »,… sans parler de « l'expert ».

Le premier outil utilisé peut être, par exemple, le « tableau de proportionnalité » accompagné de divers autres signes ostensifs (flèches, symboles opératoires, *etc*.). On l'utilise ainsi :



Nombre de carambars	4	1	7
Prix des carambars	1,48	0,37	2,59

Le second outil est la « petite comptine » que l'on apprenait autrefois à l'école élémentaire, et sa récitation appropriée aux données du problème :

« Si 4 carambars coûtent 1,48 €, alors 1 carambar, soit 4 fois moins, coûtera 4 fois moins cher, soit 1,48 € divisé par 4, et 7 carambars, soit 7 fois plus, coûteront 7 fois plus cher, soit finalement 1,48 ¤ divisé par 4 multiplié par 7 qui font 2,59 € »

Le troisième outil est celui que fournit l'écriture fonctionnelle *f* d'une application linéaire modélisant une situation de proportionnalité :

Ainsi :

$$f(7)=f(7\times 1)=7\times f(1)=7\times f(\frac{4}{4})=7\times f(4\times \frac{1}{4})=7\times \frac{1}{4}\times f(4)=\frac{7}{4}\times 1{,}48=2{,}59.$$

On laisse chacun libre de juger de quel qualificatif, entre « rudimentaire » et « expert », on peut affubler les outils mobilisés dans ces trois exemples. Tout simplement, l'usage de certains outils existe à certaines époques et à certains niveaux dans le système éducatif, puis peut disparaître ; de même que d'autres usages et les outils qui leur sont associés ne vivent jamais, *etc.* Enfin, certains outils sont considérés comme plus ou moins performants que d'autres, plus ou moins ergonomiques, rapides pour l'accomplissement de la technique, *etc.* ; ce qui explique que le progrès en termes d'outils occasionne la substitution de certains outils par d'autres jugés plus efficaces, même si leur maniement est plus délicat. La transposition didactique et les choix faits au sein de la noosphère se chargent de les faire vivre ou non à certains niveaux du cursus scolaire.

Revenant à la solution du problème posé et à la question « Rangez leurs productions de la plus rudimentaire vers la plus experte », les termes de « rudimentaires » et « expertes », pour qualifier les « productions », c'est-à-dire les écrits des élèves, renvoient ici à ce qui a été dit dans la question précédente relativement aux systèmes sémiotiques dont l'écrit conserve la trace. Sans doute certains élèves ne sont-ils pas encore suffisamment à l'aise avec les systèmes sémiotiques étudiés dans des périodes récentes, dans des classes proches du niveau du CE2 ou en CE2. Aussi usent-ils des systèmes qui étaient en vigueur dans certaines classes antérieures, ou qui étaient admis « au brouillon », *etc.*, en se référant, pour légitimer cet usage, à des clauses du contrat didactique qui stipulent que ce qui a été validé par l'enseignant une fois, dans le système éducatif, est valable ultérieurement, avec d'autres enseignants. Peut-être un jour, un enseignant leur fera-t-il entendre que certains usages « font bébé », que l'on attend d'eux qu'ils deviennent « grands » désormais, en adoptant l'usage en vigueur dans la classe où ils se trouvent maintenant ; c'est-à-dire qu'ils se plient à certains des termes du nouveau contrat didactique. Ces qualificatifs de « rudimentaire et experte » accolés à « production » renvoient donc à la distance au rapport institutionnel généralement attendu au CE2.

Ayant « décodé » l'énoncé, le candidat peut se lancer dans la résolution du problème,… et rencontrer peut-être alors l'incompréhension du correcteur qui ne dispose quasiment jamais de ce moyen d'analyse ! Ce qui pose le problème, non négligeable, de l'équité devant le concours et sa correction ; problème dont un début de réponse devrait passer par l'écriture de sujets rédigés dans un langage compréhensible par des candidats, au-delà du niveau de subjectivité du rédacteur de l'énoncé, c'est-à-dire un langage qui soit sous-tendu par la recherche minimale d'une certaine rigueur didactique.

I – 2 Organisation didactique

I – 2.1 Notion d'organisation didactique

Dans ce qui suit, on présente la modélisation en termes de moments didactiques, apportée par le didacticien des mathématiques Yves Chevallard. Si elle semble actuellement ignorée d'un certain nombre d'institutions qui forment à l'enseignement des mathématiques ou prescrivent, elle pourrait néanmoins devenir un outil utile pour les enseignants afin de concevoir, analyser, évaluer et développer l'enseignement des mathématiques dans leurs propres classes.

La question de départ est la suivante. Soit un type de tâches dont l'étude est programmée. Par exemple : « Compléter une figure par symétrie axiale en utilisant des techniques telles que pliage, papier calque, miroir » ou « Tracer, sur papier quadrillé, la figure symétrique d'une figure donnée par rapport à une droite donnée », deux types de tâches qui figurent explicitement au programme du cycle III. Comment faire pour motiver ce ou ces types de tâches ? Par « motiver », il ne faut pas entendre un vague concept qui aurait à voir avec la « motivation de l'élève », dont régulièrement les enseignants se plaignent de la faiblesse, voire de l'absence ! Il s'agit plutôt de faire rencontrer comme une nécessité, pour l'accomplissement d'une tâche problématique donnée, des raisons qui motivent le type de tâches dont l'enseignement est visé. On voit par là qu'en se préoccupant des raisons d'être de la notion mathématique à enseigner, et en les faisant vivre, à leur niveau, par les élèves d'une classe, on a ainsi de plus grandes chances de rencontrer… la motivation des élèves.

Cette question est centrale, car c'est d'elle que découlera en grande partie la qualité de l'enseignement et de l'apprentissage. C'est sans doute la question fondamentale que devrait se poser tout professionnel de l'enseignement. C'est en tout cas la problématique derrière laquelle se rangent les travaux d'« ingénierie didactique » depuis leur inauguration par Guy Brousseau.

Pour répondre à cette question, il va falloir faire rencontrer par les élèves l'une au moins des raisons d'être de ce type de tâches ; puis se bâtira, comme une nécessité, l'organisation mathématique à enseigner. Sinon l'enseignement est purement gratuit, dénué de sens, et un savoir immotivé ne résiste guère que le temps que les élèves veulent bien consacrer, par gentillesse ou soumission, à son étude. C'est-à-dire qu'il est rapidement perçu comme inutile une fois sorti de l'école. C'est ce qu'on peut relever à travers des questions telles que : « les mathématiques, ça sert à quoi au juste ? » Remarquons que ce qui est dit pour les mathématiques se transpose très facilement à d'autres disciplines scolaires : sciences, histoire, géographie, français dans toutes les déclinaisons de cette discipline (poésie, lecture expliquée, rédaction, dictée, *etc.*), éducation physique, *etc*., également menacées par une absence de visibilité des élèves des raisons d'être de ces savoirs enseignés.

Le schéma général permettant cette motivation est le suivant : on choisit une tâche d'un type familier à l'élève, mais dont l'accomplissement selon une certaine technique conduit ce dernier à rencontrer une difficulté déterminée, une tâche problématique que l'accomplissement d'une nouvelle tâche permettrait de dépasser. C'est par exemple le cas des situations désormais célèbres et élaborées par Guy Brousseau : mesurer l'épaisseur d'une feuille de papier, agrandir un puzzle, *etc*.

Le type de tâches apparaît ainsi comme permettant d'accomplir les tâches du type qui le motivent, et dont il apparaît alors comme une raison d'être. Dans l'exemple de la symétrie axiale, il est donc nécessaire de trouver une tâche qui paraît familière aux élèves, mais dont l'accomplissement nécessite de disposer d'une technique qui demeure encore problématique à ce moment.

La levée de cette problématicité amènera le savoir dont on vise l'enseignement. Néanmoins, il ne faut pas perdre de vue que se retrouver face à une situation problématique est toujours déstabilisant pour la personne, que le dépassement de cette problématicité nécessite un grand effort, personnel ou collectif, que la situation de déconcertation cognitive est coûteuse. On a alors sans doute intérêt à faire en sorte que cette recherche s'appuie sur la mobilisation de toutes les forces et les ressources disponibles dans le « collectif classe ». Pour s'engager dans cet effort, on comprend qu'il soit donc nécessaire qu'existe une forte motivation à la résolution de cette tâche problématique. Une tâche immotivée ne résiste pas à cette première épreuve : les élèves s'ennuient rapidement ou se découragent devant l'ampleur de la tâche, négligent de s'affronter à l'effort, attendent plus ou moins que le professeur, ou l'un des bons élèves, proposent la solution, *etc*.

Face à ces situations, les motivations sont alors parfois trouvées par l'enseignant ailleurs que dans le savoir mathématique proprement dit : bonbons, bons points, gratifications par des remarques encourageantes, *etc*. Cette remarque ne signifie pas que ces « techniques » soient à proscrire ! Le premier travail du professeur, peut-être un des plus difficiles, consiste donc à trouver une bonne raison de motiver le tracé d'une figure symétrique d'une figure donnée, de compléter une figure par symétrie, de déterminer si une figure possède ou non un ou des axes de symétrie. Précisons que trouver une bonne raison porte sur le savoir mais est dirigé évidemment vers l'élève : car il est nécessaire que les élèves trouvent, eux, une bonne raison de s'engager dans une activité problématique. C'est dire que le professeur a pour tâche de trouver une situation réellement motivante pour les élèves !

Il y a donc ainsi, quelle que soit l'organisation didactique adoptée (motivante et motivée, ou non), un moment où, par exemple, les élèves vont rencontrer tel ou tel type de problèmes pour la première fois. Et encore un moment où le professeur va conduire l'institutionnalisation des ingrédients techniques, technologiques et théoriques (s'ils existent) de l'organisation mathématique dans laquelle les élèves devront être entrés ; car sans cela l'apprentissage est fortement compromis. On peut ainsi distinguer six moments de l'étude :

- le moment de ***la première rencontre*** avec le type de tâches, qui doit conduire à l'émergence d'un *embryon* de technique ;

- le moment de ***l'exploration du type de tâches mathématiques*** (à l'aide d'un corpus adéquat de spécimens de ces tâches), et de l'élaboration d'une technique relative à ce type de tâches ;
- le moment de ***l'élaboration de l'environnement technologico-théorique*** de la technique ; c'est le moment où l'on va s'intéresser aux raisons pour lesquelles la technique que l'on a ébauchée « fonctionne ». Ces raisons seront, évidemment, de natures différentes, selon le niveau scolaire auquel on se place ;
- le moment du ***travail de la technique***, qui doit permettre à la fois de « faire travailler » la technique de manière à étendre sa portée, à accroître sa fiabilité, *etc*., et de faire que les élèves puissent travailler leur maîtrise de cette technique ;
- le moment de ***l'évaluatio****n* où l'on évalue la maîtrise que l'on acquise de l'organisation mathématique ;
- le moment de ***l'institutionnalisation de l'organisation mathématique*** ainsi élaborée.

La notion de moment ne renvoie qu'en apparence à la structure temporelle du processus d'étude. Un moment, au sens donné à ce mot ici, est une dimension dans un espace multidimensionnel ; on voit donc qu'il n'y a pas, de façon abstraite et hors enseignement, d'ordre total à rechercher dans l'ensemble des moments. Bien entendu, une saine gestion de l'étude exige que chacun des moments didactiques se réalise au bon moment, ou, plus exactement, aux bons moments : car un moment de l'étude se réalise généralement en plusieurs fois, sous la forme d'une multiplicité d'épisodes éclatés dans le temps.

Ainsi, si l'on cherche à classifier ces divers moments, on arrive au schéma suivant :

Groupe I (Activités d'étude et de recherche [AER])

1. Moment ***de la (première) rencontre*** avec le type de tâches ;

2. Moment de l'***exploration*** du type de tâches et ***de l'émergence de la technique*** associée ;

3. Moment de la construction ***du bloc technologico-théorique***.

Groupe II (Synthèses)

4. Moment ***de l'institutionnalisation*** de l'organisation mathématique qui a émergé de l'activité.

Groupe III (Exercices & problèmes)

5. Moment ***du travail*** de l'organisation mathématique (et en particulier ***de la technique***).

Groupe IV (Contrôles)

6. Moment de l'évaluation.

I – 2.2 Utilisation de la modélisation précédente à propos d’un sujet de CRPE

On trouvera en **ANNEXE 2** le texte du sujet de CRPE de Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Nantes, Orléans-Tours, Poitiers, La Réunion**,** 2000, sur lequel porte ce paragraphe, ainsi qu’une reproduction d’un chapitre de l’ouvrage d’où est extrait le document sur lequel s’appuie l’ensemble des questions de cette épreuve, (extrait du livre du maître et extrait du livre de l’élève, « Pour comprendre les mathématiques », CM1, éd Hachette)**.**

L’analyse des organisations didactique et mathématique sera d’abord faite à partir des éléments mis à la disposition des candidats lors de l’épreuve, puis à partir de la fiche élève, (p. 60), et des éléments de mise en œuvre de la séquence donnés dans le guide pédagogique correspondant, (p. 82 et 83 pour cette leçon). On se centre essentiellement sur la description d’un moment de première rencontre d’une organisation mathématique.

Analyse à partir des documents donnés aux candidats

La première question porte sur l’organisation mathématique, les questions 2, 3 et 4 portent essentiellement sur l’organisation didactique.

L’étude évoque, pour trois activités sur quatre, des tâches du type : (1) dans une situation où on répartit une quantité totale connue, en tas identiques de valeur connue, déterminer le nombre de tas et ce qu’il reste après répartition. Pour l’exercice 3, il s’agit d’une tâche du type : (2) dans une situation où on répartit une quantité totale connue, en un nombre connu de tas identiques, déterminer la valeur de chaque tas et ce qu’il reste après répartition.

L’extrait que l’on a du livre élève débute par un paragraphe « Piste de recherche », contenant une narration : on évoque une tâche accomplie ailleurs, par des acteurs auxquels les élèves de la classe peuvent s’identifier – Cyril, Dorothée et Éric -, et on donne des traces de la technique utilisée par ces acteurs pour accomplir cette tâche, (représentation effective de la collection (peut-être par lignes de 10, on ne sait pas comment la représentation graphique est élaborée), et de la répartition ; soustractions réitérée ; multiplications réitérées). Ce type de tâches et les techniques évoquées ne sont pas des nouveautés à ce niveau, en revanche ce qui est certainement nouveau, c’est ce que l’on trouve dans les cinq dernières lignes du §1 de la piste de recherche et le contenu de l’encadré correspondant. Ici une nouvelle tâche est évoquée : « diviser 47 par 11 ». On peut faire l’hypothèse qu’il s’agit donc, dans ce §1, d’une première rencontre avec la division ; le vocabulaire utilisé : « *Quand on divise 47 par 11, le quotient est 4, le reste est 3* » « *dividende, diviseur, quotient, reste* » et l’écriture numérique correspondante : « *47 = (11 x 4) + 3* », sont introduits. Toutefois comment l’élève rencontre-t-il ici une tâche du type « diviser un entier par un autre » et une technique pour accomplir ce type de tâches : quand et comment sait-il que le travail fait permet d’accomplir la tâche : « diviser 47 par 11 » ? Il est écrit « *Quand on divise 47 par 11, le quotient est 4, le reste est 3* » , mais que signifie « diviser », on a ici une tâche qui est évoquée et le résultat final une fois la tâche accomplie qui est donné, qu’y avait-il précisément à faire et qu’en est-il du moyen pour arriver au résultat ? Si faire la division de 47 par 11 c’est trouver deux nombres, q et r, tels que 47 = 11 x q + r, ce que laisse supposer le texte mais n’est pas dit dans ce qui est à notre disposition, seule la technique d’Eric est réellement appropriée pour accomplir une tâche ainsi spécifiée, (éventuellement celle de Cyril), la technique de Dorothée ne permet pas de justifier simplement que 47 c'est 11 fois 4 plus 3.

En ce qui concerne la gestion de ce moment, on ne sait pas comment les élèves prennent connaissance de cette narration : individuellement, en lecture silencieuse ? , leur dévolue-t-on le problème résolu par les trois enfants fictifs avant de leur demander de prendre connaissance de ce qui est écrit sur le livret ? On peut penser que les cinq dernières lignes du §1 de la piste de recherche et le contenu de l'encadré correspondant, est le résumé d'un discours du maître tenu à la suite de la prise de connaissance de cette narration par les élèves et d'un échange collectif, mais on ne sait rien du contenu de cet éventuel échange, donc de ce qui est dit de la division au cours du travail correspondant au §1. Dans les paragraphes 2 et 3 on va proposer aux élèves d'accomplir des tâches du même type (1) et très proches de celle accomplie par les enfants fictifs. Dans ce que nous avons à notre disposition, il n'est pas question de division : on ne demande pas d'accomplir la division de 49 par 11 ou de 49 par 15, peut-être le vocabulaire et l'écriture numérique correspondante sont-ils apportés lors d'une phase collective de correction, mais il n'en n'est pas fait état.

Les éléments qui se trouvent dans le 1° paragraphe de la piste de recherche sont des éléments technologiques pouvant participer à l'élaboration d'une technique pour effectuer la division de deux entiers, on trouve aussi trace de ce qui peut être une institutionnalisation partielle, à la fin de ce paragraphe, mais la tâche et la technique ne sont pas explicitement précisés dans le document mis à disposition.

Dans les trois exercices du paragraphe « Applications » qui suit, on demande aux élèves d'accomplir des tâches du type (1) puis (2). Il n'est pas question de division ici non plus, toutefois dans les exercices 2 et 3 on demande d'écrire le résultat sous la forme emblématique a = b x q + r. On ne peut pas considérer que ces moment permettent de poursuivre l'élaboration de la technique de calcul du quotient et du reste, ou de l'entraîner puisque la tâche elle-même n'est pas évoquée.

Analyse à partir des extraits du livret élève et du guide pédagogique

La lecture des documents correspondants, montre que :

- dans l'épreuve du CRPE, seule la première page du livre élève a été reproduite, sans le titre : « Division (1) » ;

- le document élève, reproduit dans l'épreuve, correspond à la « première journée » consacrée à cette leçon, décrite dans le guide pédagogique ;

- d'après les auteurs, il s'agit de : « *reconnaître une situation de division* » et de « *Calculer empiriquement le quotient et le reste* » ;

- l'organisation didactique proposée par le guide pédagogique introduit des éléments dont on ne trouve pas trace dans le document du CRPE, que nous préciserons ci-dessous.

Les auteurs de l’ouvrage annoncent donc bien un travail participant à l’étude de la division.

La gestion de la première activité est précisée : avant de prendre connaissance du contenu du §1 de la piste de recherche, le problème, « En avant la musique », ou un problème analogue, est confié aux élèves de la classe répartis en groupes, une restitution du travail de chaque groupe est faite par un rapporteur, différentes techniques pour accomplir la tâche sont attendues, les auteurs précisent que *« l’écriture de la réponse devra être examiné collectivement. La formulation 47 = (11 x 4) + 3 peut être utilisée dans tout les cas. L’enseignant précise le vocabulaire : diviseur, quotient, reste.* »

Ceci nous permet de donner un sens à ce que les auteurs entendent par : « Calculer empiriquement le quotient et le reste ». D’après le Larousse, est empirique « ce qui ne s’appuie que sur l’expérience, l’observation », on pourrait donc comprendre qu’à travers l’activité d’introduction proposée, les élèves fictifs ou réels, vont réaliser des calculs permettant d’accomplir la tâche qui leur est explicitement dévolue (chercher combien de groupes seront formés et combien d’enfants recevront un tambourin), et qui leur est familière. Ce travail fait, ils seront amenés sous la conduite du maître, à observer les résultats comme étant le quotient et le reste de ce que l’on appellera division. Il s’agit de la rencontre d’un premier exemplaire de quotient et de reste que le professeur montre et nomme, ceci à l’occasion de la résolution d’un problème de répartition en tas identiques. Que l’ont délègue ou non aux élèves réels de la classe la résolution du problème de chorale, ils seront observateurs de ce que le maître leur montre concernant la division.

L’activité « En avant la musique » est suivie d’une autre activité, une nouvelle tâche de type (1) est confiée aux élèves, là encore, la tâche accomplie, les résultats seront observés sous la conduite du maître, en particulier pour constater que le reste est plus petit que l’effectif d’un groupe, sinon « on peut encore faire un groupe ». Le maître fera remarquer aux élèves qu’il s’agit d’une propriété générale du diviseur et du reste : « *Le reste est toujours plus petit que le diviseur* ». Cette remarque sera institutionnalisée en fin de leçon, (en bas de la page 61 du livre élève). C’est sans doute elle qui permettra d’élaborer une technique, (non explicitée, du reste), pour retrouver le quotient et le reste dans une égalité numérique du type a = (b x q) + r ou disqualifier des couples de nombres comme quotient et reste de deux entiers donnés dans les exercices 4 et 5 qui suivent.

On débute, de cette façon, une étude qui sera poursuivie dans d’autres leçons, et même au-delà du primaire, sur la division euclidienne. La division euclidienne de deux nombres entiers, la recherche du quotient et du reste par la technique de la division posée, sont explicitement au programme du cycle 3. Toutefois, l’étude de la division euclidienne est, au niveau primaire liée de façon forte à l’étude des situations qui pourront se résoudre, et ceci pas nécessairement en primaire, à l’aide d’une division euclidienne : les élèves traitent, à ce niveau les situations dites de division, sans utiliser la division, et bien avant qu’ils n’entendent parler de la division et la division reste, tout au cours du primaire, une technique parmi d’autres pour accomplir ce type de tâches**,** comme le confirment les instructions officielles : *« A l’école primaire, les situations dites de « division » sont traitées par des procédures diverses selon la représentation que s’en fait l’élève : addition ou soustraction réitérée, …, suite de multiplications, divisions. L’étude de cette opération étant programmée sur plusieurs années, cet apprentissage se poursuit donc en sixième, le recours directe à la division devant* *devenir plus systématique.* », (extrait du document d'accompagnement des nouveaux programmes de l'école primaire : « Articulation école collège »).

Néanmoins, la division d'un nombre par un autre est un type de tâche qui devra prendre son indépendance ne serait-ce que pour élaborer une technique s'appuyant sur les propriétés des nombres et des autres opérations, (une technique de la division posée, par exemple), comme le préconisent les textes officiels. Il sera indispensable, tôt ou tard, de considérer la division comme une opération qui à deux nombres fait correspondre deux autres nombres. Quand cet objet mathématique sera-t-il présenté de cette façon ? Dans l'ouvrage de référence, dans les exercices 4 et 5, p. 61 du livret, la tâche à accomplir porte sur des nombres entiers et non sur des répartitions en tas identiques, mais ici la technique à mettre en œuvre n'est pas une technique de division mais une technique élaborée à partir de l'égalité numérique associée à la division et le résultat concernant le reste et le diviseur.

Enfin, il est étonnant de voir figurer parmi les objectifs des auteurs de l'ouvrage : « *Reconnaître une situation de division* », alors même que les élèves n'ont pas abordé l'étude de la division.

II – TRAVAIL EN ATELIER SUR LE THÈME DU CALCUL RÉFLÉCHI

II – 1 Présentation de la situation

Les étudiants de PE2, au cours de leurs stages, se trouvent en général contraints d'utiliser le fichier de la classe où ils sont nommés, et ceci à l'endroit où le maître titulaire s'est arrêté. Cette situation pose de nombreux problèmes aux débutants et nous pensons que les apports précédents peuvent leur permettre de rassembler, sur le matériel qui est à leur disposition, des informations pouvant faciliter les prises de décisions nécessaires.

Nous avons donc proposé aux participants de cet atelier, à partir d'une fiche élève et de la fiche maître correspondante, extraites d'un ouvrage de C.P., (« Place aux Maths », édition Bordas, fiche n° 38), de faire une analyse de ces documents à l'aide des outils théoriques proposés. On trouvera en **ANNEXE 3** une reproduction des documents correspondants.

Le but du travail est de voir quels types de connaissances ces outils théoriques permettent de produire, et à partir de là, quelles questions peuvent être induites et quelles décisions peuvent être prises.

II – 2 Éléments de l'analyse faite

Dans ce paragraphe, nous avons rassemblé des éléments qui participe à l'analyse, sans tenir compte de la chronologie de l'atelier.

Dans cette fiche, intitulée « Calcul réfléchi » (1) il s'agit de participer à l'étude du thème « *organiser et traiter, mentalement ou avec l'aide de l'écrit, des calculs additifs, …, en s'appuyant sur des résultats mémorisés et en utilisant de façon implicite les propriétés des nombres et des opérations* ».

Quand les élèves abordent la fiche 38 de cet ouvrage, où en sont-ils, en terme de techniques, pour accomplir une tâche du type : « organiser et traiter, mentalement ou avec l'aide de l'écrit, des calculs additifs » ?

RAPPEL RAPIDE DU CONTENU DES FICHES PRECEDENTES

Dans les leçons précédentes l'addition a été introduite et la somme de deux nombres a été présentée comme étant le nombre d'objets de la collection obtenue par réunion de deux collections ayant ces nombres comme cardinal. Jusqu'à la fiche 38, les <u>*techniques pour trouver la somme de deux nombres*</u> *sont les suivantes :*

- <u>dénombrer un à un, en récitant la comptine numérique</u>, les objets de la collection réunion, quand effectivement on a les collections de départ ou une représentation de celles-ci ;
- <u>utiliser la file numérique</u> quand on a les deux nombres : on repère le premier et on avance d'un nombre de cases égal au second, cases que l'on pointe une à une.

Ces deux techniques semblent introduites dès la première leçon sur le signe + et le signe =, (fiche 11), mais les informations apportées par le fichier élève et le livre du maître dans le domaine des techniques utilisées sont peu explicites. La seconde est reprise explicitement dans la fiche 25, pour des nombres inférieurs à 10, et des sommes de deux ou trois chiffres.

Parallèlement à ces leçons, on trouve 5 leçons intitulées « <u>Décomposer les nombres</u> », (entre la fiche 12 et la fiche 27). Les premières travaillent sur les décompositions additives des nombres de 1 à 9, à partir de situations de répartition en deux tas, voire trois, d'une collection dont on connaît le nombre d'objets. A cette occasion l'attention des enfants est attirée sur la commutativité de l'addition, on écrit dans un tableau les décompositions, (aucun modèle de tel tableau n'est donné), que l'on a effectuées des nombres de 1 à 9. Les <u>techniques</u> utilisées <u>pour trouver les nombres intervenant dans la décomposition d'un autre nombre</u> sont là aussi peu explicitées par les auteurs, toutefois en plus et sans doute avec les techniques évoquées précédemment, on utilise, dès la fiche 12, <u>les boîtes à compter</u>, (boîtes avec, à droite 10 cases pour mettre des jetons et à gauche un espace pouvant recevoir jusqu'à 10 barres, cet espace est pour le moment masqué par un couvercle), pour représenter les collections totales et décomposer celles-ci en sous-collections. Ensuite on travaille sur les décompositions de 10, la boîte à compter étant ici un outil privilégié ; de nombreuses activités conduisent à trouver des compléments à 10, les décompositions additives de 10 sont écrites dans le tableau évoqué précédemment. La décomposition des nombres de 11 à 19 est amorcée par des décompositions utilisant 10, le travail s'appuyant semble-t-il sur les boîtes à compter, (on utilise deux boîtes), puis sur la file numérique et les tableaux de décompositions élaborés dans les leçons précédentes. A cette occasion l'attention est attirée sur l'écriture en chiffres de nombres comme 17, 18 et 19, leur décomposition additive utilisant 10 et leur écriture en lettres ou leur expression orale. Les activités proposées conduisent à la fois à décomposer les nombres jusqu'à 19 et à trouver le résultat de sommes de 2, 3 voire 4 chiffres, « en faisant prendre conscience de l'utilité du passage par dix chaque fois que c'est possible », (les nombres choisis facilitent ce passage par 10 : les additions à effectuer sont du type : 9 + 1 + 3 + 5 = où on fait d'abord 9 + 1, les décompositions proposées sont du type : décomposer 18 en trois nombres dont un est 8, …). Entre la fiche 27, (« Décomposer les nombres (5) »), et la fiche 38 le travail numérique porte sur les nombres de 1 à 50 : échanges un contre 10, les dizaines successives sur la file numérique, comprendre l'écriture chiffrée et le nom des nombres.

ANALYSE DU TRAVAIL CORRESPONDANT À LA FICHE 38

Le travail correspondant à la fiche 38 débute par un jeu dont le support est une file numérique, (« Le cache-nombre », phase 1, première séance), au cours duquel les élèves doivent, pour gagner, effectuer correctement le plus possible de calculs de la somme de deux entiers inférieurs à 10, tâches du type sur lequel porte l'étude. Le choix de la technique semble laissé aux élèves qui, dans cette phase, ont, à leur disposition deux boîtes à compter et la file numérique sur laquelle ils posent des jetons. Précédemment la bande numérique a été utilisée pour faire des calculs de somme, (fiche 25), mais, si les boîtes à compter ont été utilisées, (dès la fiche 12), pour faire des décompositions additives de nombres, elles n'ont pas été explicitement utilisées pour faire des calculs de sommes, les élèves ne sont pas nécessairement très performants dans un tel jeu. La synthèse doit « *mettre en évidence l'intérêt d'avoir mémorisé ces différents calculs pour retrouver l'écriture canonique d'un nombre* ». On peut donc comprendre que cette activité vise à motiver comme technique pour faire rapidement la somme de deux entiers inférieurs à 10, la mémorisation d'un maximum de décompositions.

Dans la phase 2, première séance, un seul calcul est à effectuer : 9 + 8 avec pour consigne d'utiliser deux boîtes à compter, d'utiliser le passage par 10 et de traduire sur l'ardoise les étapes du calcul. Les enfants ont des jetons à leur disposition, on peut penser que, par exemple, ils comptent 9 jetons pour faire un premier tas, puis 8 pour faire un second tas, ils remplissent une première boîte avec les 9 jetons, il reste une place, ils comblent cette place avec un jeton du tas de 8, puis logent les jetons restant dans la deuxième boite, ils comptent alors dans cette deuxième boite 7 jetons et en déduisent que ça fait 10 + 7 donc 17. Ils doivent alors, sur leur ardoise, écrire les étapes de ce calcul. On peut penser que ce qui est attendu sont des écritures du type : 9 + 8 = 9 + 1 + 7 = 10 + 7 = 17. L'exploitation collective ne donne aucun exemple d'écriture valorisée, « *toutes les procédures mises en place par les élèves sont exposées* », toutefois on relève que, au cours de ce moment, le maître doit « *faire apparaître notamment ce qui manque à 9 pour faire 10, et donc ce qu'on prend à 8 pour le donner à 9* ». On a ici un morceau de discours technologique sur la technique dont l'étude sera poursuivie dans la seconde séance correspondant à cette fiche, mais cette technique n'est pas décrite, (elle pourrait être décrite de la façon suivante : quand on a la somme de deux nombres inférieurs à 10 à calculer, on cherche ce qu'il faut ajouter au premier pour avoir 10, (le complément à 10 du premier), on retire du second cette quantité et on ajoute ce qui reste du second à 10). En fait, on fait deux sous tâches successivement : chercher un complément à 10, puis décomposer additivement un nombre en deux, un des deux nombres étant imposé.

La seconde séance débute par l'activité du fichier intitulée « *Je cherche* ». En groupe les élèves doivent relier Max ou Lola ou Maya et leurs boîtes à compter respectives, (chaque groupe se centre sur un personnage), à un arbre représentant le calcul fait par ce personnage avec ses boîtes à compter, puis finir de remplir le graphe. Pour chaque personnage des boîtes à compter sont représentées, l'une avec 9 l'autre avec 8 jetons, des flèches indiquent des mouvements de jetons de l'une à l'autre, voire de ces deux boîtes vers une troisième. En dessous trois arbres sont débutés : la première ligne est identique (9 + 8) ; dans les trois, la seconde ligne est partiellement remplie (quand il y a décomposition de 8 ou/et de 9 un seul des deux chiffres est donné, les emplacements sont prévus, ainsi que les signes +) ; dans les deux lignes suivantes, seuls les signes et les emplacements sont prévus, toutes les branches des arbres sont données. La tâche à accomplir dans chaque groupe est de :

- comprendre ce que le personnage dont il s'occupe a fait avec ses boîtes à compter, (ceci devrait être familier aux enfants) ;
- trouver dans les trois arbres celui qui correspond aux manipulations de jetons ;
- compléter la deuxième ligne du graphe ;
- remplir les deux dernières lignes du graphe.

Cela suppose, pour les trois dernières sous tâches, que les élèves comprennent comment fonctionnent les arbres. C'est, semble-t-il la première fois que les élèves rencontrent une telle représentation des opérations et on imagine mal donner un tel exercice en laissant les enfants chercher en groupe et en temps limité, sans montrer au préalable comment ça fonctionne. Pour choisir le graphe correspondant au travail de leur personnage, on ne voit pas comment les élèves peuvent faire sans cette compréhension et une certaine familiarisation avec ce mode d'organisation.

La synthèse portant sur cet exercice ne prévoit rien sur la représentation en graphe mais la reprise des « *différentes façons de décomposer un calcul en sous calculs plus abordables* », sans que d'autres détails sur la description de ces « façons » ne soient donnés. On peut donc penser que, pour les auteurs, c'est à l'occasion de cette activité que se poursuit l'élaboration de la ou les techniques à étudier. Ce sont des extensions de la technique étudiée dans la phase 2 de la séance précédente, (par exemple : quand on a la somme de deux nombres dont un est supérieur à 10 à calculer, on décompose celui-ci en 10 plus les unités, on cherche ce qu'il faut ajouter aux unités pour avoir 10, (le complément à 10 des unités), on retire de l'autre nombre cette quantité et on ajoute ce qui reste du second à 10 plus 10). Ici aussi on a dans tous les cas envisagés deux sous tâches à faire successivement : soit chercher le complément à 10 d'un des deux nombres, puis décomposer additivement un nombre en deux, un des deux nombres étant imposé, (ce qui a été fait dans la phase 2 de la première séance), soit faire la décomposition additive des deux nombres en faisant apparaître un même nombre, puis calculer le double et la somme des deux restes. On reviendra sur ces phases « d'élaboration » des techniques.

Dans la phase 2 de cette deuxième séance, deux exercices sont proposés. Dans le premier exercice, dans chaque item, l'un des deux nombres dont on doit calculer la somme est un nombre déjà utilisé dans l'activité précédente, certes à une place différente dans la somme à calculer, mais les élèves peuvent utiliser soit le complément à 10 soit une décomposition déjà utilisée précédemment. La place est prévue pour faire un arbre ou dessiner des boîtes à compter, le recours à la mémoire voire aux tableaux de décomposition n'est pas exclu puisque la méthode est laissée au choix de l'élève. Une correction collective est prévue, mais on ne sait pas si l'enseignant doit insister sur certains points. Pour le second, on ne sait pas si c'est un travail totalement individuel, rien n'est dit de la méthode attendue, seule la place du résultat est laissée ; dans le choix fait des nombres à additionner on retrouve 9 ou 8 sauf dans un des items.

Dans la fiche intitulée « Pause 7 » qui suit et clôt le travail sur les fiches de 37 à 42, on trouve un paragraphe « *Je retiens* » où le calcul du résultat de 8 + 7, sous forme d'arbres, avec trois décompositions différentes est effectué, il n'y a aucun commentaire verbal.

QUELQUES QUESTIONS À LA SUITE DE CETTE ANALYSE

Nous avions fait l’hypothèse qu’il s’agissait de participer à l’étude du thème « *organiser et traiter, mentalement ou avec l’aide de l’écrit, des calculs additifs, …, en s’appuyant sur des résultats mémorisés et en utilisant de façon implicite les propriétés des nombres et des opérations* »

On travaille bien sur l’organisation et le traitement de calculs additifs, à effectuer mentalement ou à l’aide de l’écrit, dans le champ numérique limité aux sommes de deux nombres dont l’un est inférieur à 20 et l’autre à 10.

Les techniques dont l’apprentissage semble visé sont les suivantes :

- quand on a la somme de deux nombres inférieurs à 10 à calculer, on cherche ce qu’il faut ajouter au premier pour avoir 10, (le complément à 10 du premier), on retire du second cette quantité et on ajoute ce qui reste du second à 10 ;
- quand on a la somme d’un nombre compris entre 10 et 20 et d’un nombre inférieur à 10 à calculer, on décompose le premier nombre en dizaines et unités, on pratique avec le nombre des unités du premier nombre et le second nombre comme précédemment, enfin on ajoute 10 au résultat obtenu ;
- quand on a la somme d’un nombre compris entre 10 et 20 et d’un nombre inférieur à 10 à calculer, on décompose le plus grand nombre en dizaines et unités, on décompose additivement le second en la somme de deux nombres l’un étant ce nombre des unités, on calcule le double des unités, on ajoute 10 puis ce qui reste dans le second ;
- quand on a la somme d’un nombre compris entre 10 et 20 et d’un nombre inférieur à 10 à calculer, on cherche la quantité qu’il faut ajouter au premier pour aller à 20, on décompose le second additivement en la somme de deux nombres l’un étant cette quantité et on additionne 20 et ce qui reste dans le second.

Les éléments technologiques sur lesquels on s’appuie sont les boîtes à compter qui rendent visible le rôle de 10 (le complément à 10 apparaît en cases vides dans une boîte quand on y a rangé le premier tas, et ce qu’il reste au second quand on a retiré ce complément est ce qu’il reste de jetons dans le deuxième tas quand on a rempli ces cases vides), la connaissance de certains résultats additifs. On évoque à plusieurs moments l’intérêt d’avoir mémorisé certains résultats, mais on ne sait pas précisément à ces moments quels sont les résultats dont il est question. Les résultats numériques sur lesquels s’appuient les techniques étudiées sont : les compléments à 10 puis à 20, les doubles des nombres de 1 à 9, les décompositions additives des nombres de 2 à 9 puis les décompositions additives de 10 et les décompositions des nombres de 1 à 20 en unités et dizaine. En dehors de la dernière décomposition, on ne voit pas dans cet ouvrage d’injonction à retenir tel ou tel type de résultats, on peut penser que la fréquentation et l’utilisation de ces résultats conduit progressivement à leur mémorisation. Les résultats mémorisés sont, à ce moment de l’étude, nécessairement lacunaires et les élèves doivent avoir un technique fiable pour les retrouver. Les tableaux de décomposition des nombres de 2 à 10, élaborés progressivement, ne sont pas décrits précisément : permettent-ils, connaissant un nombre de trouver simplement le deuxième nombre de sa décomposition additive faisant intervenir un nombre donné ? Les élèves se sont-ils entraînés à les utiliser ainsi ?

Plus généralement on a noté précédemment plusieurs lacunes en ce qui concerne la description des techniques utilisées, attendues ou dont on vise l’apprentissage. Les éléments technologiques sont aussi peu présents. Non seulement il n’existe pas de moments d’institutionnalisation, mais dans ce que l’on peut repérer comme moment d’élaboration des techniques la gestion didactique est telle qu’il y a grand risque que les élèves ni ne participent à l’élaboration ni ne voient les techniques en cours d’élaboration.

Revenons, par exemple, sur la phase où les auteurs introduisent des arbres dans la seconde séance correspondant à la fiche 38 : certes les arbres montrent, comme les dessins des boîtes avec des flèches dans les bulles, la technique utilisée par Théo, Lola et Max, la chronologie des gestes ou des calculs est traduite par la direction des flèches ou la succession des différentes lignes mais ce que l’on veut que les enfants voient, c’est pourquoi ces calculs sont faits dans cet ordre, en quoi ils rendent plus accessibles des calculs de sommes difficiles en s’appuyant sur des résultats qu’ils connaissent ou auxquels ils ont accès. On peut faire l’hypothèse que le manque de familiarité avec les arbres fera que, dans cette activité la plupart des enfants se laisseront guider par la structure qui leur est proposée (voire imposée), et qui est partiellement informée, sans possibilité d’attitude réflexive sur ce qui vient d’être fait, (comme quand on découvre un lieu étranger sous la conduite d’une personne d’autorité). Rien n’assure que, dans l’exercice 1 de la partie « Je m’exerce », la technique étudiée soit travaillée ni même que cet exercice participe à son élaboration. Quand à l’exercice 2, on ne sait pas comment il est prévu de le gérer. On peut se demander si la plupart des enfants ne vont travailler sur ces deux fiches en ne voyant rien des techniques visées.

On a noté plus haut que les nouveautés introduites sont complexes et multiples : il y a plusieurs sous tâches à accomplir pour accomplir chaque tâche et à chaque leçon on introduit plusieurs techniques. C’est peut-être ceci qui justifie l’introduction des graphes : leur structure, donnée aux élèves prenne en charge l’organisation des calculs.

QUELQUES PISTES DE DÉVELOPPEMENT

Il serait possible de préparer le travail sur cette fiche par un certain nombre d’activités :

- travail sur le complément à 10 : le travail sur les décompositions additives de 10 peut se prolonger par un travail de calcul sur des expressions du type 4 + 3 + 5 + 6 + 2 + 7 + 3 pour lesquelles on apprendra à rapprocher 4 de 6, 3 de 7, 5 et 3 de 2 pour trouver le résultat. Ce type de calcul pourra donner l’occasion d’utiliser des arbres à deux lignes, des plateaux ou simplement d’entourer et relier entre eux les termes à rapprocher afin de montrer l’organisation du calcul fait. L’attention des élèves peut être attirée sur le fait que dans l’addition on a le droit de déplacer les nombres et de les associer comme on veut afin de simplifier les calculs. La référence aux réunions de plusieurs ensembles pourra permettre de légitimer ceci ;
- travail sur les décompositions : ce travail peut lui aussi donner l’occasion d’utiliser des arbres à une ligne ;
- dans la conduite des activités d’introduction (le jeux du « mistinombre » et le « cache-nombre »), on pourra insister sur le fait que l’on va apprendre une technique permettant de faire de nombreux calculs en mémorisant un nombre limité de résultats de sommes de deux nombres.

A propos du travail sur les fiches elles mêmes :

- l'élaboration de la (ou les) technique(s) dont l'étude est visée peut être faite explicitement sans être « cachée » par l'utilisation imposée de graphe. Il peut être beaucoup plus clair, (au sens de visible), de montrer sur un exemple le fonctionnement de la technique en commentant ce que l'on fait, plutôt que d'amener les enfants à finir de remplir un graphe dont les éléments fondamentaux sont déjà donnés. Au fur et à mesure de l'avancement de la technique sous les yeux des enfants, on peut motiver et décrire ce que l'on fait, donner des éléments le rendant légitime. Il s'agit alors d'ostension assumée ;
- même si les graphes ont été travaillés précédemment, on pourra leur associer l'écriture en ligne du calcul, mais on pourra aussi, pour mettre en évidence les différentes étapes du calcul faire successivement plusieurs graphes à deux lignes, voire utiliser des parenthèses. Les graphes utilisés comme ils le sont ici ne vivent pas dans l'enseignement français, alors que les parenthèses seront utilisées pour structurer les calculs numériques et littéraux dans le secondaire ;
- les boîtes à compter ne sont que des échafaudages permettant de construire et/ou légitimer les connaissances visées, il faudra les abandonner, donc même si certains enfants en ont encore besoin il faudra les habituer à utiliser des calculs en lignes en rapprochant des nombres, (ce n'est pas automatiquement transposable) ;
- la (les) technique(s) étudiée(s) peu(ven)t être clairement repérée(s) dans un moment d'institutionnalisation ;
- les exercices d'entraînement peuvent être plus nombreux et organisés de façon à permettre de donner des précisions sur la(les) technique(s) aux enfants qui en ont besoin ;
- une évaluation peut être prévue.

III – TRAVAIL EN ATELIER SUR LE THÈME DE LA SYMÉTRIE AXIALE

Documents de référence en **ANNEXE 4**.

III – 1 Présentation de la situation

Dans le temps de l'atelier un extrait du second volet du CRPE des académies d'Orléans-Tours et de Poitiers 2003 (annexe IV) est donné à une partie des participants. Le thème est celui de la symétrie axiale et on ne s'intéresse, dans l'atelier, qu'aux questions relatives au « document B » du sujet. Il s'agit pour les participants, de répondre aux questions du sujet que l'on peut rapprocher de questions didactiques, en s'aidant pour cela des outils d'analyse de l'organisation didactique précédemment donnés.

III – 2 Éléments de l'analyse faite

On peut faire tout d'abord une remarque générale à propos du document B. Contrairement au document A, et à l'exception de l'exercice 4 dans l'annexe 8, tous les types de tâches demandés se rapportent à des figures dessinées sur papier quadrillé. Avant toute chose, pour pouvoir se lancer dans l'analyse de l'organisation didactique, il est au préalable nécessaire d'analyser l'organisation mathématique.

Annexe 7 du sujet

Au cours de l’activité 1, les élèves s’engagent pas à pas dans l’accomplissement du type de tâche consistant à « dessiner la symétrique d’une figure par rapport à une droite ». La technique pour son accomplissement est décrite au cours des quatre phases qui en constituent son découpage. Elle s’appuie sur le calque de la figure et le retournement du calque par son pliage le long de l’axe ; ce qu’indique la flèche du cadre c. La technologie justifiant cette technique est en grande partie implicite. Si on peut la trouver en mathématiques dans le théorème énonçant que, « dans l’espace orienté, une rotation d’axe donné et d’angle ± 180° est une symétrie orthogonale d’axe cette droite », cette assertion ne peut s’appuyer au CE2 que sur la familiarité culturelle présupposée avec des pratiques en relevant (demi-tour d’une porte autour de son axe, de la couverture d’un livre autour de sa tranche, *etc.*). Ainsi, les pratiques de pliage, qui ont sans doute été antérieurement enseignées, s’appuient-elles sur ce théorème (même s’il n’est évidemment pas mentionné, ni à plus forte raison énoncé, à ce niveau !). Un deuxième élément technologique relève de la vérification demandée dans le cadre d. En effectuant le pliage de la feuille sur laquelle sont dessinées ces deux figures, on constate qu’elles se superposent effectivement ; ceci constitue alors une preuve justifiant que la technique mise en œuvre est la bonne, c’est-à-dire un élément technologique, qui retrouve le fait qu’une symétrie axiale est une isométrie.

L’exercice 1 engage dans le même type de tâches que l’activité précédente. Cependant, on peut se demander si la technique associée qui est attendue est, ou non, la même. En effet, le texte de l’énoncé de l’exercice indique simplement « en te servant du quadrillage, trace la figure symétrique… ». Or, plusieurs techniques recourant au quadrillage permettent de réaliser ce type de tâches. Existe évidemment la première, indiquée dans l’activité, et qui nécessite aussi l’utilisation de papier calque. Mais l’on peut aussi utiliser le quadrillage sans recourir au calque. Il suffit pour cela d’utiliser les lignes horizontales perpendiculaires à l’axe et les carreaux comme unités de longueur, afin de s’appuyer sur la définition de l’axe de symétrie comme médiatrice du segment d’extrémités les points symétriques. C’est un élément technologique officiellement donné en 6^{e}, mais qui peut d’ores et déjà constituer des connaissances pratiques et empiriques d’élèves, même si manque le vocabulaire pour l’évoquer ; d’ailleurs, ce théorème est énoncé en filigrane, à travers le codage de la figure relative à « l’axe de symétrie » dans la partie du manuel intitulée « je retiens bien », et qui figure à la suite du document B.

Annexe 8 du sujet

L’exercice 2 demande deux types de tâches : T_1 : « rechercher des lettres ayant un axe de symétrie » et T_2 : « dessiner des lettres ayant un axe de symétrie ainsi que l’axe de symétrie ». À la seule lecture du manuel, on ne peut guère dire davantage sur la technique associée, si ce n’est que la perception visuelle à laquelle recourt le programme (« Percevoir qu’une figure possède un ou plusieurs axes de symétrie ») peut désormais s’aider des lignes du quadrillage.

Dans l’exercice 3, c’est le type de tâches déjà rencontré dans l’activité 1 et l’exercice 2 que l’on retrouve à travers deux tâches du type. La technique permettant l’accomplissement de ces tâches est sans doute à rapprocher de celle utilisée dans l’exercice 2 puisque, dans ce cas encore, il s’agit d’une figure dessinée sur quadrillage, et on peut donc s’en aider.

Dans l’exercice 4, le type de tâche consiste à déterminer l’axe de symétrie d’une figure. La technique pour cela est mentionnée en filigrane dans l’énoncé, sous une forme semialgorithmisée. Il reste à l'élève à l'exécuter en bon ordre : décalquer, percevoir l'axe de symétrie, plier autour de lui et enfin vérifier que les deux parties de la figure se superposent alors convenablement l'une sur l'autre.

Dans l'exercice 5, c'est encore la recherche du symétrique d'une figure et son dessin qui constituent le type de tâches demandé. Pour cette tâche, la technique est donc la même que celles rencontrées dans les exercices 1 et 3. Cependant, dans le cas de cet exercice, l'accent est mis sur l'orientation de la figure ; sans doute parce qu'elle change dans une symétrie axiale. Pour cela, un nouveau type de tâches est demandé aux élèves : « coder un chemin ». Le code qui illustre le chemin initial contient sa technique. Néanmoins, on peut se demander si sa lecture et sa compréhension seront aisées pour des élèves de CE2.

Enfin, l'encadré « je retiens bien » a pour fonction d'institutionnaliser certains objets de savoir rencontrés au cours de ce chapitre. Il a donc une fonction didactique évidente puisque c'est, comme son titre l'indique, ce qui doit être retenu de l'ensemble du travail mené. On peut noter à ce propos, que dans la figure de gauche, les distances d'un point et de son symétrique à l'axe sont notées ; mais d'une manière un peu curieuse (est-ce pour rappeler le mouvement du pliage ?). Ce point relatif aux distances n'est apparu explicitement dans aucun des exercices proposés, ni dans l'activité ; il faut donc en déduire que le professeur aura veillé à ce qu'il soit énoncé oralement pendant ce travail sous peine d'une rupture non assumée du contrat didactique. C'est donc un élément technologique qui est ainsi montré : le fait que l'axe de symétrie est la médiatrice du segment d'extrémités deux points symétriques. Dans la figure de droite, une partie de la figure est passée en couleur ; sans doute pour montrer qu'elle est symétrique de l'autre.

On voit donc que divers signes (des ***ostensifs*** non mathématiques), dont la signification reste à préciser, sont utilisés au long des travaux proposés dans ces pages de manuel. C'est un risque d'erreurs, d'interprétations erronées, que l'on fait ainsi courir aux élèves.

Cette analyse ayant été faite, on peut alors répondre plus facilement aux questions de ce volet 2. Les compétences exigées en fin de cycle III ont déjà été indiquées. On les rappelle ici :

> « – Percevoir qu'une figure possède un ou plusieurs axes de symétrie.
>
> Vérifier, en utilisant différentes techniques (pliage, papier calque, miroir) qu'une droite est axe de symétrie d'une figure.
>
> Compléter une figure par symétrie axiale en utilisant des techniques telles que pliage, papier calque, miroir.
>
> Tracer, sur papier quadrillé, la figure symétrique d'une figure donnée par rapport à une droite donnée.
>
> Utiliser à bon escient le vocabulaire suivant : points alignés, droite, droites perpendiculaires, droites parallèles, segment, milieu, angle, figure symétrique d'une figure donnée par rapport à une droite, axe de symétrie. »

On demande ensuite quelles propriétés de la symétrie axiale sont utilisées dans chacun des documents. Rappelons qu'en bonne logique, une propriété, tout comme une définition ou un théorème, est un élément technologique. Les analyses des organisations mathématiques faites auparavant sont alors utiles pour répondre à la question.

Il est évident qu’à travers l’usage du calque, demandé tant dans le document A que dans le B, c’est la propriété pour une symétrie axiale d’être une isométrie qui est utilisée. Les élèves rencontrent donc, en acte, cette propriété. Le pliage, utilisé lui aussi dans chacun des deux documents, équivaut à une rotation de ±180° autour d’un axe ; celui qui sert de pli. C’est donc une deuxième propriété, ou élément technologique, rencontrée dans ces deux documents mais quant à elle de manière tout à fait implicite. Enfin, on rencontre l’élément technologique : « l’axe de symétrie est la médiatrice du segment d’extrémités deux points symétriques. » On peut noter qu’il est davantage présent dans le document B que dans le A, et qu’il est plus ou moins explicité à travers la mention de l’égalité des distances dans le cadre « je retiens bien ». Par contre, la mention de l’orthogonalité n’est pas explicitement faite. Elle est cependant présente, de manière implicite, dans l’utilisation du quadrillage qui suit, évidemment, des directions orthogonales.

Question 2.a.

Étapes de la démarche

L’analyse de l’organisation mathématique, qui a été faite précédemment, est d’un grand secours pour répondre à cette question et l’on en reprend ci-dessous les grandes lignes ; il s’agit en fait de décrire les parties de ces organisations mathématiques relevant des savoir-faire, c’est-à-dire des couples (type de tâches ; technique), et d’identifier les problèmes qui peuvent apparaître lors de la mise en œuvre de ces savoir-faire.

Au cours de l’activité 1, les élèves s’engagent pas à pas dans l’accomplissement du type de tâche consistant à « dessiner la symétrique d’une figure par rapport à une droite ». Pour cela, il leur est déjà nécessaire de reproduire à l’identique la figure dessinée : un quadrilatère non convexe et une droite, en respectant la position des sommets du quadrilatère, et de la droite, sur le quadrillage. La technique pour la suite du travail est plus explicite, et son accomplissement est décrit au cours des quatre phases qui en constituent son découpage. Elle s’appuie sur le calque de la figure et le retournement du calque par son pliage le long de l’axe ; ce qu’indique la flèche du cadre c. Enfin, les élèves ont à vérifier en pliant la feuille que les deux figures se superposent effectivement.

Difficultés prévisibles : est-il si facile de reproduire cette figure sur quadrillage en veillant au respect de la disposition des sommets et de la droite ? Si l’adhésif n’est pas exactement collé le long de l’axe, la symétrie ne s’effectuera pas par rapport à cet axe : est-ce si facile de coller exactement l’adhésif le long de l’axe dessiné pour un élève de CE2 ?

Question 2.c.

Une fois de plus, dans cet énoncé de CRPE, la formulation de la question relève d’une grande maladresse et demande une interprétation. Que sont des « étapes » ? De quelle découverte s’agit-il dans la mesure où l’on a vu que l’enseignement s’appuie sur des connaissances culturelles et sociales antérieures ? Qu’est-ce qu’une « notion » ? Pourra-t-on dire qu’on l’a découverte quand on en aura vu quelques-unes des bribes d’organisations mathématiques dont elle émerge ? Il ne s’agit pas, à travers ces questions, de « couper les cheveux en quatre », mais de souligner que l’indigence de la culture didactique des rédacteurs de tels sujets ne facilite pas la tâche des candidats qui, s’ils disposent d’un vocabulaire rigoureux car ils ont éprouvé les problèmes que l’imprécision engendre, en sont réduits à interpréter entre les lignes ce que le rédacteur du sujet a voulu dire !

Reprenons. En fait, ce que les rédacteurs de la question demandent n'est ni plus ni moins que la description succincte des divers « temps » par lesquels devrait passer un cours sur la symétrie axiale en CE2. Il est traditionnellement admis que deux grandes phases doivent être réalisées : une activité (de découverte, comme la désigne « Le nouvel objectif calcul »), mais qui serait sans doute de plus grand rendement à l'apprentissage si elle engageait réellement les élèves dans l'étude et la recherche, et des exercices et problèmes. Toute la question est : « pourquoi cela ? » et « est-ce si simple ? ». Des éléments de réponse ont été donnés dans la partie « I – 2.1 Notion d'organisation didactique » qui précède, et nous n'y revenons pas.

Si l'on retourne à la question du sujet du CRPE, et en guise de réponse, il est sans doute nécessaire de :

- ménager une première période d'activité d'étude et de recherche par les élèves, qui consiste à rencontrer une tâche problématique du type de ce que l'on souhaite enseigner (réalisation de figures symétriques, détermination d'axes de symétrie, *etc*.) ;
- laisser du temps pour l'exploration de ce type de tâches et la proposition de techniques par les élèves, sous la direction du professeur, afin de trouver un moyen de résoudre la tâche problématique (plier, décalquer, découper, superposer, *etc*.) ;
- les techniques ayant émergé, de s'engager dans une phase où l'on va tenter de comprendre pourquoi elles permettent de résoudre la tâche (discussion et détermination d'un accord satisfaisant sur la compréhension du pourquoi de ce que l'on fait, sous le contrôle du professeur évidemment) ;
- ce premier temps étant écoulé, de faire le point sur ce que l'on a trouvé, de laisser de côté ce qui paraît après-coup secondaire ou faux, bref, d'institutionnaliser l'essentiel du travail mené et que l'on aura à retenir (répondre à la question : « qu'est-ce qui est important dans ce que l'on vient de trouver ? ») ;
- de poursuivre le travail de l'organisation mathématique, ce qui passe par un certain entraînement à travers des exercices. A cette occasion, on devra répondre à des questions telles que : « la technique est-elle fiable et quelle est sa portée ? », « ai-je exploré toutes les tâches du type, ou bien certaines restent-elles encore à la marge, non travaillées ? », « ai-je acquis une bonne maîtrise de la technique ou dois-je encore la travailler ? »

On peut relever que ces moments se conjuguent pour chacun d'eux à des moments d'évaluation. C'est aussi en cela qu'ils ne correspondent pas à un cloisonnement étanche, l'un par rapport à l'autre, induit par une certaine chronologie, mais qu'il faut les traiter dans leur réalité fonctionnelle. C'est-à-dire se poser des questions telles que : « à quoi servent-ils ? » et « que risque-t-il de se produire en termes d'étude et d'apprentissage, si un moment n'est pas réalisé, ou encore seulement de manière incomplète ? »

Question 3.a.

On a déjà répondu partiellement à cette question lors de l'analyse de l'organisation mathématique.

Dans l’exercice 4, le type de tâche consiste à déterminer l’axe de symétrie d’une figure. La technique pour cela est mentionnée en filigrane dans l’énoncé. Il reste à l’élève à l’exécuter en bon ordre : décalquer, percevoir l’axe de symétrie, plier autour de lui et enfin vérifier que les deux parties de la figure se superposent alors convenablement l’une sur l’autre. On peut noter que deux difficultés risquent d’apparaître, que l’on peut facilement identifier relativement aux savoir-faire (c’est-à-dire aux couples (type de tâches, technique)) enseignés jusqu’en ce point aux élèves qui auraient suivi le document B :

- dans tous les exercices et activités, les axes de symétrie étaient parallèles aux bords de la feuille, c’est-à-dire suivaient les directions privilégiées de l’horizontale et la verticale ; or dans cet exercice l’axe de symétrie ne l’est pas, ce qui induit une adaptation de la technique préalablement enseignée et qui reste à la charge de l’élève ;

- par ailleurs, tous les autres exercices et activités étaient réalisés sur papier quadrillé et celui-ci ne l’est pas ; dans ce cas encore, la technique recourant au quadrillage (suivi des perpendiculaires à l’axe, comptage des carreaux) devient caduque et c’est à l’élève de mettre en œuvre une technique (décalque, pliage) dont les grandes lignes sont explicites dans la question, mais qu’il n’a jamais auparavant accomplie.

Question 3.b.

Une fois de plus, une question très discutable dans ce sujet ! Tout dépend de ce que l’on a choisi d’enseigner et de comment on a choisi de l’enseigner, puisque les exercices permettent de réaliser le plus souvent un moment de travail de la technique, et de l’organisation mathématique, que l’on étudie. Donc d’une organisation de savoir qui se rapporte à un type de tâches donné. Pour répondre à cette question, il faudrait savoir comment est organisée la première rencontre des élèves avec le savoir en jeu, mais surtout, avoir défini au préalable quel est le savoir, ou plutôt les savoir-faire en jeu ! Or, manifestement ces deux documents se rapportent à des organisations mathématiques différentes.

En effet, dans le document A, auquel le lecteur voudra bien se reporter dans le texte complet du sujet absent de ces actes, les types de tâches autour desquels s’organise le savoir sont essentiellement les suivants : « déterminer si une figure présente, ou non, un ou des axes de symétrie » et « réaliser par pliage une figure admettant des axes de symétrie, le choix de la figure étant libre » (c’est l’exercice 1). Tandis que dans le document B présent dans ces actes, ce sont essentiellement les types de tâches « dessiner la symétrique d’une figure donnée par rapport à une droite » et « rechercher des axes de symétrie de figures données » grâce au quadrillage, qui prédominent. Les types de tâches diffèrent donc très sensiblement. Comme indiqué auparavant, de plus les techniques pour ces types de tâches diffèrent fortement, car elles varient selon que le papier est uni ou quadrillé. Les savoir-faire sont donc différents, et demander de choisir trois exercices parmi les neuf proposés n’a pas grand sens si l’on ne s’est pas posé les questions précédentes au préalable.

BIBLIOGRAPHIE

CHEVALLARD Y. (1998) *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique, in* Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, in Actes de l'Université d'été 4–11 juillet 1998 La Rochelle, Édition coordonnée par Robert Noirfalise – IREM de Clermont-Ferrand, 89-120.

ARTAUD M., CIRADE J., JULLIEN M., MATHERON Y., TONNELLE J. (1998) *TD associés aux cours d'Y. Chevallard, in* Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, Actes de l'Université d'été 4–11 juillet 1998 La Rochelle, Édition coordonnée par Robert Noirfalise – IREM de Clermont-Ferrand, 121-250.

Atelier A5
Annexe 1 - document 1

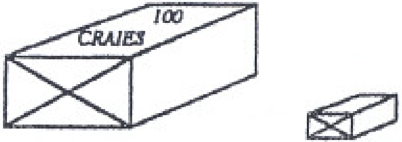
Sujet de l'Académie de Marseille année 2000 1er Volet 2e partie -

Dans cet exercice, vous trouverez en annexe les productions de 9 élèves de CE2, en réponse au problème suivant proposé avant tout travail sur la division.

Un fabricant vend des craies par étuis de 10 et par boîtes de 100. Le magasinier doit préparer les boîtes et les étuis pour les livraisons.

Calcule combien d'étuis et combien de boîtes il doit préparer pour chaque client.

– M. Aubin : 800 craies
– M. Elias : 78 craies
– M. Durand : 60 craies
– M. Créon : 254 craies
– M. Béal : 430 craies
– M. Fustier : 305 craies



1. Quelle compétence, en terme de connaissance des nombres, est mise en jeu ?

2. Classez ces productions en fonction de la procédure utilisée, tout en faisant très brièvement les remarques importantes sur chaque production.

3. Six enfants ont trouvé la bonne réponse. Rangez leurs productions de la plus rudimentaire vers la plus experte, en montrant brièvement l'évolution de chaque procédé par rapport au précédent.

Atelier A5
Annexe1 - Document 2

m Aubin 800=8 boites
m Elias 78=7 étuis et 8 craies dans 8 étuis
m Durand 60=6 étuis
m Créon =254=2 boites 5 étuis et 4 craies dans
2 boits et 6 étui
m Béal =430=4 boites et 3 étuis
m Fustier 305 =3 boites et ~~5~~1 étuis.

adile

---

m Aubin □ □ □ □ □ □ □ □ 8 boites
m Elias ▯▯▯▯▯▯▯ |||||||| 7 étuis et 8 craies
m Durand ▯▯▯▯▯▯ 6 étuis
m Créon □ □ ▯▯▯▯▯ |||| 2 boites 5 étuis et 4 craies
m Béal □ □ □ □ ▯▯▯ 4,3 boites et 3 étuis
m .

Benoît

Isabelle

M Aubin 100+100+100+100+100+100+100+100=8 boites
M Elia 10+10+10+10+10+10+10=8 8 étuis
M Durand 10+10+10+10+10+10 6 étuis
M Créon 100+100+10+10+10+10+10+4 2 boites et 6 étuis
M Béal 100+100+100+100+10+10+10 4 boites et 3 étuis
M Fustier 100+100+100+5 3 boites et 1 étui

M Aubin 100+100+100+100+100+100+100+100=800 8 boites
M Elias
M Durand 10+10+10+10+10+10=60 6 étuis
M Créon
M Béal 100+100+100+100=400+10+10+10=430 4 boites et 6 étuis

Elisa

8×100 =800 8 boites
7×100 =70+8 8 étuis
6×10~~0~~ =60 6 étuis
2×100=200+5×10=250+4 2 boites et 5 étuis 1 étuis
4×100 =400+3×10 4 boites et 3 étuis
3×100 =300+5 3 boites et 1 étui

Claire

M Aubin 800=8c 8 boites
M Elias 78=7d 8u 7 étuis et 1 étui =8
M Durand 60=6d 6 étuis
M Créon 254 c'est 2c 5d 4u 2 boites 5 étuis et 1 étui
M Béal 430=4c et 3d 4 boites et 3 ~~[illegible]~~ étuis.
M Fustier 305= 3c et 5u 3 boites et 1 étui

Alain

M Aubin □ □ □ □ □ □ □ □ 8 boites
M Elias ▯▯▯▯▯▯▯ |||||||| 7 étuis et 1 étui =
M Durand ▯▯▯▯▯▯ 6 étuis
M Créon □ □ ▯▯▯▯▯ |||| 2 boites et 6 étui
M Béal □ □ □ □ ▯▯▯ 4 boites et 3 étuis
M Fustier □ □ □ ||||| 3 boites et 1 étuis

Mickaël

Charles.

M Aubin: 8 boites: 100
+100
+100
+100
+100
+100
+100
+100
800

M Elias :

M Durand: 6 étuis: 10
+10
+10
+10
+10
+10
60

M. Béal: 4 boites et 3 étuis

M Créon :

Alice

c	d	u	
8	0	0	8 boites
	7	8	8 étuis
	6	0	6 étuis
2	5	4	2 boites et 6 étuis
4	3	0	4 boites et 3 étuis
3	0	5	3 boites et 1 étui

CRPE Bordeaux ...
mai 2000

Second volet
(8 points)

Se référer à l'annexe 2 : extrait du manuel *Pour comprendre les mathématiques*, CM1 de chez Hachette.

Questions

1. On s'intéresse à l'ensemble de l'extrait.

a) Quel est le contenu mathématique sous-jacent ?

b) Quels sont les objectifs visés ?

2. On s'intéresse à la « piste de recherche » : « En avant la musique ».

a) Quelle est la part de l'activité de l'élève ?

b) Analyser les trois procédures respectivement attribuées à Cyril, Dorothée et Éric. Sont-ce des procédures que des élèves de CM1 confrontés au problème proposeraient spontanément ?

c) Pourrait-on, à partir de la même situation de départ (animateur de chorale cherchant à constituer des groupes), envisager une autre démarche pédagogique ?

3. On s'intéresse aux « Applications » (numéros ❶, ❷ et ❸).

a) Quelle évolution du niveau de difficulté peut-on observer entre l'application ❶ et l'application ❷ ?

b) L'application ❸ présente-t-elle une difficulté particulière pour un élève de CM1 ? Si oui, laquelle ?

4. On s'intéresse à de possibles prolongements.

a) Proposer un exercice ou problème qui aiderait les enfants à prendre conscience des valeurs possibles pour le reste lors d'une division euclidienne.

b) Proposer un exercice ou problème qui permette de vérifier jusqu'à quel point les élèves ont compris l'égalité de la division.

c) Si une trace écrite (cahier du jour, affiche...) devait résumer ce qui a été établi en travaillant la piste de recherche, les applications et des exercices, que pourrait-on proposer ?

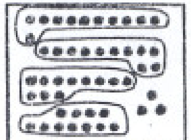
Piste de recherche

En avant la musique !

1. Pour diriger les répétitions de chant, l'animateur de la chorale décide de répartir les 47 enfants en groupes de 11 chanteurs. Les enfants restants recevront un tambourin pour marquer le rythme.

Cyril, Dorothée et Éric ont cherché combien de groupes on peut former.

Cyril



4 groupes et 3 joueurs de tambourin

Dorothée

47 – 11 = 36 1 gr.
36 – 11 = 25 2 gr.
25 – 11 = 14 3 gr.
14 – 11 = 3 4 gr.

4 groupes de 11 chanteurs et il reste 3 joueurs de tambourin.

Éric

1 × 11 = 11
2 × 11 = 22
3 × 11 = 33
4 × 11 = 44
5 × 11 = 55 55 > 47
47 – 44 = 3
47 = (11 × 4) + 3

Avec 47 chanteurs, on peut former 4 groupes de 11 chanteurs, et il reste 3 enfants au tambourin.
Quand on divise 47 par 11, le quotient est 4, le reste est 3.

$$\underset{\text{dividende}}{47} = (\underset{\text{diviseur}}{11} \times \underset{\text{quotient}}{4}) + \underset{\text{reste}}{3}$$

2. Deux nouveaux enfants s'inscrivent à la chorale.
Combien de groupes peut-on former ? Combien d'enfants recevront un tambourin ?

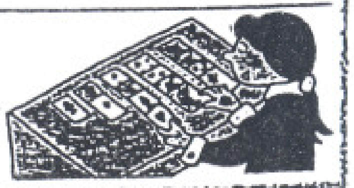
3. Le jour suivant, les 49 enfants de la chorale répètent un autre chant.
L'animateur décide de les répartir en groupes de 15.
Combien de groupes peut-il former ? Combien d'enfants auront un tambourin ?

Applications

❶ La station-service d'un centre commercial offre des points en échange d'un plein d'essence.
6 points permettent d'obtenir une tasse.
Combien de tasses obtient-on avec 50 points ?

❷ Combien peut-il y avoir de semaines entières dans un mois de 31 jours ?
Écris la réponse sur ton cahier sous la forme d'une égalité :
31 = (7 × ....) + ...

❸ Un jeu de 52 cartes comprend le même nombre de piques, de cœurs, de carreaux et de trèfles.
Combien y a-t-il de cartes de chaque sorte ?
Écris cette répartition sous la forme d'une égalité :
52 = (4 × ....) + ...



Atelier A5
Annexe II - document 2

Extrait de l'ouvrage
"Pour comprendre les Mathématiques

22 La division (1) CM1

- Reconnaître une situation de division
- Calculer empiriquement le quotient et le reste

Prolongements

- ▶ exercices p. 74 - n° 1 à 4
- ▶ problème p. 76 - n° 6

Calcul rapide

Somme de nombres de deux chiffres
28 + 35 = 63

- Un **multiple** de 10 est-il un **multiple** de 5 ?

Piste de recherche

En avant la musique !

1. L'animateur de la chorale répartit les 47 enfants en groupes de 11 chanteurs. Les enfants restants jouent du tambourin.

Cyril, Dorothée et Éric ont cherché le nombre de groupes.

Cyril

4 groupes et 3 joueurs de tambourin

Dorothée

47 − 11 = 36 1 gr
36 − 11 = 25 2 gr
25 − 11 = 14 3 gr
14 − 11 = 3 4 gr

4 groupes
de 11 chanteurs
et il reste 3 joueurs
de tambourin

Éric

1 × 11 = 11
2 × 11 = 22
3 × 11 = 33
4 × 11 = 44
5 × 11 = 55 55 > 47

47 − 44 = 3
47 = (11 × 4) + 3

Avec 47 chanteurs, on peut former 4 groupes de 11 chanteurs, et il reste 3 enfants au tambourin.
Quand on divise 47 par 11, le quotient est 4, le reste est 3.

$$\underbrace{47}_{\text{dividende}} = (\underbrace{11}_{\text{diviseur}} \times \underbrace{4}_{\text{quotient}}) + \underbrace{3}_{\text{reste}}$$

2. Deux nouveaux enfants s'inscrivent à la chorale.
Combien de groupes peut-on former ? Combien d'enfants recevront un tambourin ?

Applications

1 La station-service d'un centre commercial offre des points en échange d'un plein d'essence.
6 points permettent d'obtenir une tasse.

Combien de tasses obtient-on avec 50 points ?

2 Combien peut-il y avoir de semaines entières dans un mois de 31 jours ?

Écris la réponse sur ton cahier sous la forme d'une égalité :

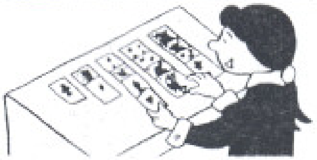
31 = (7 × ....) + ...

3 Un jeu de 52 cartes comprend le même nombre de piques, de cœurs, de carreaux et de trèfles.

Combien y a-t-il de cartes de chaque sorte ?

Écris cette répartition sous la forme d'une égalité :

52 = (4 × ....) + ...



Exercices

Écrire la forme canonique — Étudier le reste

4 Observe, reproduis et complète le tableau.

Ex. $\underbrace{41}_{\text{dividende}} = (\underbrace{7}_{\text{diviseur}} \times \underbrace{5}_{\text{quotient}}) + \underbrace{6}_{\text{reste}}$

dividende	diviseur	quotient	reste
41	7	5	6
62	10	6	....
72	8	....	....
60	7	....	....
115	5	....	....
....	15	8	6
....	50	12	0

5 Chaque ligne du tableau ci-dessous correspond à une division.

Deux d'entre elles contiennent des erreurs. Trouve-les.

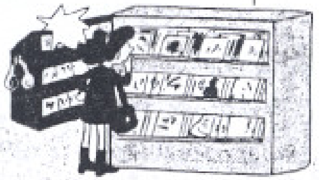
	dividende	diviseur	quotient	reste
A	124	10	10	24
B	72	6	12	0
C	72	6	11	6
D	94	5	18	4

6 Avec un billet de 100 €, Romane achète le plus grand nombre possible de CD à 18 €.
Cette situation peut s'écrire sous la forme d'une égalité :

100 = (18 × 5) + 10

a. Combien de CD a-t-elle achetés ?

b. Combien lui a-t-on rendu ?



Problèmes

7 Ondine passe le brevet du 400 m nage libre ; sa grande sœur Muriel passe le brevet du 1 000 m.
Le bassin a 25 mètres de long.

Combien de longueurs de bassin chacune doit-elle parcourir ?

9 Un équipage de pirates a trouvé un trésor de 82 pièces d'or.
Le chef dit à ses 30 marins :
« Partagez-vous équitablement toutes ces pièces. Je me contenterai de celles qui restent. »

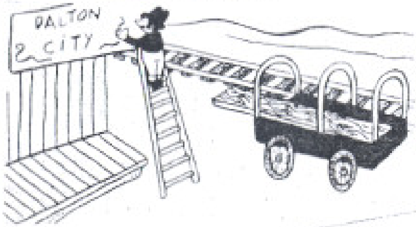
a. Aura-t-il plus ou moins de pièces que ses marins ?

b. Si le trésor contenait 90 pièces, ferait-il la même proposition ?

8 Pour construire la gare de Dalton-City, on transporte des poutres de 100 kg avec un chariot qui peut supporter une charge de 1 500 kg.

a. Combien de poutres peut-on transporter à chaque voyage ?

b. Combien de voyages devra-t-on faire pour transporter les 90 poutres nécessaires à la construction de la gare ?

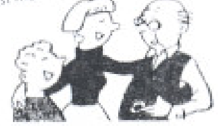


$$\underbrace{41}_{\text{dividende}} = (\underbrace{7}_{\text{diviseur}} \times \underbrace{5}_{\text{quotient}}) + \underbrace{6}_{\text{reste}}$$

Le reste est toujours **plus petit** que le diviseur

LE COIN DU CHERCHEUR

Adrien est le fils de la fille de mon grand père. C'est mon ... ou mon ...



Atelier A5 - Annexe II - document 3

22

La division (1)

(livre élève pages 60 - 61)

OBJECTIFS :

- Reconnaître une situation de division.
- Calculer empiriquement le quotient et le reste.

RAPPEL DU PROGRAMME

L'élève devra maîtriser les techniques opératoires : [...] **division euclidienne de deux entiers** (avec quotient et reste) [...].

OBSERVATIONS PRÉLIMINAIRES

Au CE, les élèves ont abordé les situations de distribution, de partage qu'ils ont le plus souvent résolues de manière empirique. Cette première leçon a pour objectif initial de leur permettre d'identifier ces situations, de rechercher différentes techniques de résolution et de maîtriser une formulation mathématique adaptée. Les enfants ne parviendront pas à reconnaître toutes les situations de division, même en fin de CM1.

Cet extrait des «Commentaires des programmes de mathématiques : articulation école-collège» nous invite à la patience et à la persévérance :

«La division pose un problème particulier. Sa maîtrise, tant du point de vue de l'algorithme que du point de vue du "sens" est loin d'être assurée en fin d'école primaire. [...] L'étude de cette opération est en effet programmée sur plusieurs années, à l'école primaire et au collège. [...] Le travail sur le sens des situations dites "de division" reste un objectif important à l'école primaire, celles-ci sont résolues par des procédures diverses selon la représentation que s'en fait l'élève (additions ou soustractions réitérées, essais de produits, suite de multiples, division).

L'apprentissage systématique de l'algorithme de la division sera abordé au cours des leçons suivantes, quand cette technique sera ressentie comme utile et «économique».

PREMIÈRE JOURNÉE

CALCUL RAPIDE

Sommes de nombres de deux chiffres

Le maître dit « 28 + 35 ». L'élève écrit 63 sur son ardoise.

43 + 15 ; 26 + 16 ; 34 + 23 ; 18 + 44 ; 55 + 17 ; 68 + 12 ; 14 + 37 ; 54 + 63 ; 77 + 16 ; 36 + 64.

TRAVAIL COLLECTIF

■ ACTIVITÉ : PISTE DE RECHERCHE « EN AVANT LA MUSIQUE ! »

a) L'enseignant a écrit au tableau la situation-problème de la piste de recherche ou une situation équivalente qui peut se poser dans la vie de la classe. Exemples :

«Les 58 élèves des CE et CM organisent un tournoi de football par équipes de 11. Combien d'équipes pourront-ils former ?»

«On range 62 fiches dans des pochettes de 8. Combien de pochettes faudra-t-il ?»

L'enseignant demande aux enfants, regroupés par 3 ou 4, de lire la situation écrite au tableau, d'en chercher la solution et de noter les étapes de cette recherche. Si un groupe semble en panne après quelques minutes, l'enseignant lui propose de dessiner la situation.

Un rapporteur de chaque groupe vient présenter la réponse et la démarche de son groupe. Les différentes solutions sont comparées, critiquées. Plusieurs procédures seront sans doute présentées : additions ou

soustractions successives, essais de produits, dessins. Si un groupe a utilisé la division, elle sera acceptée comme les autres. L'écriture de la réponse devra être examinée collectivement.

La formulation 47 = (11 × 4) + 3 peut être utilisée dans tous les cas. L'enseignant précise le vocabulaire : diviseur, quotient, reste.

b) L'enseignant propose ensuite une deuxième situation. Par exemple :

«Combien y a-t-il de semaines dans 85 jours ?»

Il propose à chaque groupe d'utiliser une démarche différente de celle qu'il avait choisie au cours de la première recherche et de formuler sa réponse sous la forme : $D = (d \times q) + r$.

Parmi les réponses proposées par les enfants, certaines ne correspondront pas à la règle : $r < d$.

L'enseignant utilisera ces réponses pour leur faire découvrir en quoi elles ne correspondent pas à une situation de division. Il les amènera à découvrir et à énoncer la règle :

Le reste est toujours plus petit que le diviseur.

L'égalité : 85 = (7 × 11) + 8 est exacte mais correspond pas à une situation de division, car il reste 8 jours ; on peut donc avoir encore une semaine.

La bonne réponse est : 85 = (7 × 12) + 1.

Pour vérifier si cette règle est bien comprise, l'enseignant propose quelques égalités ; les enfants relèvent celles qui correspondent à des situations de division et corrigent les autres. Il convient alors de bien préciser, dans l'égalité, où est placé le diviseur. L'égalité citée ci-dessus : 85 = (7 × 11) + 8, correspondrait bien à une situation de division si l'on cherchait combien d'équipes de 11 on peut former avec 85 joueurs.

$72 = (10 \times 6) + 12 \rightarrow 72 = (10 \times 7)+2$

$56 = (8 \times 6) + 8 \rightarrow 56 = 8 \times 7$

$85 = (7 \times 12) + 1$

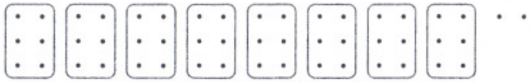
$465 = (50 \times 8) + 65$

TRAVAIL INDIVIDUEL

Application 1

Avec 48 points on obtient 8 tasses et il reste 2 points : 50 = (6 × 8) + 2

En cas d'erreur, faire dessiner les 50 points et entourer chaque groupe de 6 :



Application 2

Dans un mois de 31 jours, il y a 4 semaines et il reste 3 jours : 31 = (7 × 4) + 3.

L'observation d'un calendrier permet une excellente vérification. Aux élèves en difficulté, on demande de faire la même recherche pour un mois de 30 jours, voire de 28 jours.

Application 3

Dans un jeu de 52 cartes, il y a 13 cartes de chaque sorte : 52 = (13 × 4).

Dans ce cas précis, le reste est 0. L'écriture : 52 = (13 × 4) + 0 est acceptée.

DEUXIÈME JOURNÉE

CALCUL RAPIDE

Sommes de nombres de deux chiffres

Le maître dit « 54 + 25 ». L'élève écrit 79 sur son ardoise.

62 + 28 ; 58 + 23 ; 38 + 24 ; 57 + 27 ; 67 + 15 ; 34 + 37 ; 29 + 43 ; 37 + 26 ; 18 + 45.

TRAVAIL COLLECTIF

■ ACTIVITÉ : EXERCICE 4

a) Par groupes de deux, les enfants reproduisent puis complètent le tableau. Les deux dernières lignes poseront un problème, car elles proposent une situation apparemment nouvelle.
Au moment de la mise en commun, l'enseignant fait observer que cette situation a été souvent rencontrée au cours de problèmes multiplicatifs.
L'égalité (15 × 8) + 6 = … peut correspondre à la situation :
« Un commerçant a 8 cartons de 15 bouteilles et 6 bouteilles. Combien de bouteilles a-t-il ? »
L'égalité 126 = (15 × …) + … correspond aussi à la situation de division :
« Avec 126 bouteilles, combien pouvons-nous remplir de cartons de 15 bouteilles ? »
Ces deux égalités correspondent à une même situation, mais les nombres connus au départ ne sont pas les mêmes.

b) L'enseignant demande ensuite à chaque groupe d'imaginer une situation correspondant à chacune des lignes du tableau.

c) Il propose quelques situations bien connues des enfants en leur demandant d'indiquer lesquelles correspondent à des situations de division :
« Hier, à la cantine, il y avait 7 tables de 8 enfants et une table de 5… »
« Dans l'école, il y a 224 enfants dans 8 classes… » (Le partage n'est pas équitable. Ce n'est donc pas une situation de division.)

TRAVAIL INDIVIDUEL

Exercice 5 : l'enseignant peut préciser aux enfants que les erreurs à rechercher ne sont pas des erreurs de calcul. Au moment de la mise en commun, il demande à quelques enfants de justifier leurs réponses et d'indiquer quelle serait l'égalité correspondant à une situation de division.
L'exercice 1 de la banque d'exercices page 74 du livre permet un travail semblable.

Exercice 6 : cet exercice permet de vérifier si les enfants font bien le rapprochement entre chaque terme de l'égalité et la situation proposée. Toute erreur à cet exercice demande une remédiation individualisée.

Problème 7 : toutes les démarches permettant de parvenir à la bonne réponse sont acceptées et discutées. Le travail sur les multiples peut être une aide efficace, tout comme la droite graduée.

Problème 8 : pas de difficultés numériques dans ce problème qui permet surtout de vérifier si l'enfant sait bien repérer les situations de division. Dans la question **b)**, c'est le quotient de la première division qui devient le diviseur.

Problème 9 : sous forme de jeu, ce problème donne toute son importance au reste, considéré ici comme aussi important que le quotient.
À partir de cette situation, on peut faire observer l'évolution du quotient et du reste quand on augmente le diviseur. Un tableau rend ces observations plus évidentes.

Nombre de pièces du trésor (dividende)	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92
Nombre de marins (diviseurs)	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
Part de chaque marin (quotient)	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3
Part du chef (reste)	22	23	24	25	26	27	28	29	0	1	2

LE COIN DU CHERCHEUR

Adrien est mon frère ou mon cousin germain ; il est le fils de ma mère ou de ma tante.

Atelier A5
Annexe III - document 1

38 Calcul réfléchi (1)

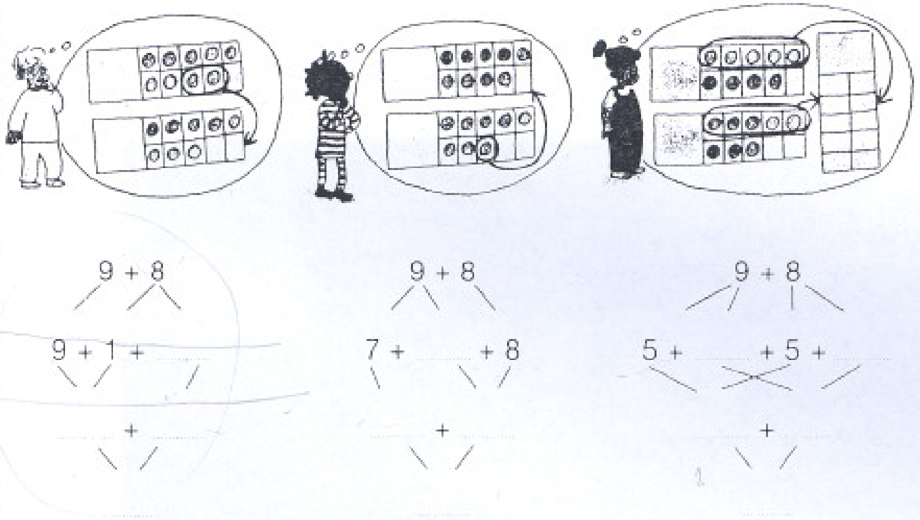
CALCUL MENTAL : • La boîte à compter (1 à 10), avec deux boîtes. • Donner le complément à 10

Extrait de l'ouvrage
'Place aux maths'
C.P.

IVITÉ
PARATOIRE
SEILLÉE :

RQUE :

Je cherche



- Relie chaque enfant au calcul qu'il a fait.
- **Termine** les calculs.

Je m'exerce

1. **Calcule** avec la méthode que tu préfères.

7 + 9

8 + 6

2. Calcule.

6 + 9 =

8 + 7 =

5 + 8 =

9 + 4 =

9 + 9 =

7 + 5 =

5 + 9 =

J'écris

10	12	14											

Le sais-tu ?

Combien y a-t-il d'années dans une décennie ?

OBJECTIF : Préparer le calcul réfléchi en utilisant le passage par 10

Fiche 38 Calcul réfléchi (1)

► page 59

Calcul mental (voir petit dictionnaire des jeux, fichier de l'élève p. 144)
- La boîte à compter (1 à 10), avec deux boîtes.
- Donner le complément à 10.

Objectif

Préparer le calcul réfléchi en utilisant le passage par le nombre 10.

Remarques didactiques

- Dans le cadre de cette fiche, l'enfant doit réinvestir les décompositions additives du nombre 10. Cette accoutumance au réinvestissement de ses connaissances va permettre à l'élève d'intérioriser ces résultats.
- la situation du « Je cherche » vise à mettre en place la méthode de l'arbre à calcul, qui fait apparaître des sous-sommes calculables. Celles-ci font mettre en évidence les compléments à 10 de façon à favoriser le calcul réfléchi. La manipulation de la boîte à compter permet de comprendre ce qui sera traduit ensuite par l'arbre à calcul.

Déroulement

► Séance 1 - *Activités préparatoires conseillées*

Matériel : pour chaque groupe de deux enfants : une file numérique jusqu'à 20, le matériel C photocopiable (pp. 183-184), des jetons de deux couleurs différentes (phase 1). Pour chaque groupe de deux enfants : deux boîtes à compter, des jetons et une ardoise (phase 2).

Phase 1 - Le cache-nombre

- Répartir les enfants par groupes de deux, leur attribuer une couleur de jetons et leur donner le paquet de cartes représentant les décompositions additives des nombres de 1 à 20. La pile de cartes est retournée sur la table. Chaque joueur tire à son tour une carte et cache avec l'un de ses jetons le nombre correspondant sur la file numérique. Un nombre ne peut être couvert qu'une seule fois. Lorsqu'une carte désignant un nombre déjà recouvert est tirée, le joueur la rejette et laisse jouer son adversaire.
- Quand toute la piste est couverte, l'enseignant vérifie avec les enfants si les cartes retenues par chaque joueur correspondent bien aux jetons posés. Le gagnant est celui qui a posé le plus de jetons validés.
- L'enseignant laisse les enfants démarrer le jeu. Il circule de façon à vérifier la compréhension de la règle, la mémorisation des décompositions et donc le bon déroulement de la partie.
- **Synthèse** : Faire apparaître les éventuelles difficultés rencontrées. Mettre en évidence l'intérêt d'avoir mémorisé ces différents calculs pour retrouver l'écriture canonique d'un nombre.

Phase 2 - La boîte à compter

- Donner la consigne : « Vous devez faire le calcul 9 + 8 en utilisant vos boîtes à compter et en traduisant les étapes de ce calcul sur l'ardoise. Dans ce calcul, vous utiliserez le passage par 10. »
- Laisser les enfants chercher par groupes de deux et observer les procédures utilisées.
- **Synthèse** : Confronter les résultats et les démarches choisies. Faire apparaître notamment ce qu'il manque à 9 pour faire 10, et donc ce qu'on prend à 8 pour le donner à 9. Toutes les procédures mises en place par les élèves sont exposées.

► Séance 2 - *Travail sur le fichier*

Matériel : le fichier, page 59

Phase 1 - Je cherche

- Observer l'illustration silencieusement. Laisser les enfants faire leurs remarques.
- Engager un questionnement.
- Partager la classe en 6 groupes, chacun étant responsable d'un des calculs proposés (un même calcul peut être donné à deux groupes). Faire exécuter le travail en temps limité.
- **Synthèse** : Faire verbaliser les différentes façons de décomposer un calcul en sous-calculs plus abordables.

Phase 2 - Je m'exerce

- **Exercice 1** : Réinvestir les méthodes de calcul. L'enseignant apporte son aide aux enfants qui le sollicitent. Son rôle consiste à observer les procédures réinvesties. Cette activité fait l'objet d'une correction collective.
- **Exercice 2** : Renforcer la connaissance des décompositions additives.

Phase 3 - J'écris

Écrire la suite des nombres pairs à partir de 10. Le maître rappellera aux enfants ce qu'est un nombre pair.

► Des pistes pour la remédiation

- Utiliser deux boîtes à compter pour calculer.
- Exploiter le jeu du cache-nombre.
- Jouer à des jeux de memory des nombres, associant 9 cartes représentant les nombres de 10 à 18 en chiffres (matériel B, p. 182) à 9 cartes représentant des décompositions additives de ces mêmes nombres (sélectionnées dans le matériel C, pp. 183-184).

Académies d'Orléans-Tours et Poitiers - mai 2003
(corrigé page 263)

SECOND VOLET (8 POINTS)

Se référer :

- au document A, annexes 5 et 6, extrait du manuel "Le nouvel objectif calcul" CE2 de chez Hatier,
- au document B, annexes 7 et 8, extrait manuel "Collection Diagonale - Math en flèche" CE2 de chez Nathan.

1) On s'intéresse à l'ensemble des deux documents :
   a) Quelle est la notion mathématique étudiée ?
   b) Concernant cette notion, quelles sont les compétences exigées à la fin du cycle des approfondissements ?
   c) Quelles propriétés de la symétrie axiale sont utilisées implicitement dans les documents A et B ?

2) On s'intéresse à la partie "Découverte" du document A et à l'*annexe* 7 du document B :

a) Document A : "Découverte"
Énoncer les différentes étapes de la démarche proposée.
Quelles difficultés peuvent rencontrer les élèves travaillant sur cette activité ?

b) Document B : *annexe 7*
Énoncer les différentes étapes de la démarche proposée dans l'activité.
Déterminer la cohérence globale de *l'annexe 7* (Activité + Exercice 1) eu égard aux propriétés énoncées au 1 c).

c) À partir de ces deux extraits, énoncer les grandes étapes que vous proposeriez aux élèves pour découvrir cette notion.

3) On s'intéresse à la phase "Exercices" de chacun des documents :

a) Citer une difficulté spécifique de l'exercice 4 du document B.
b) Parmi les 4 exercices du document A et les 5 exercices du document B, choisissez-en trois.
Indiquer les raisons de votre choix.

Annexe 5 (document A)

49

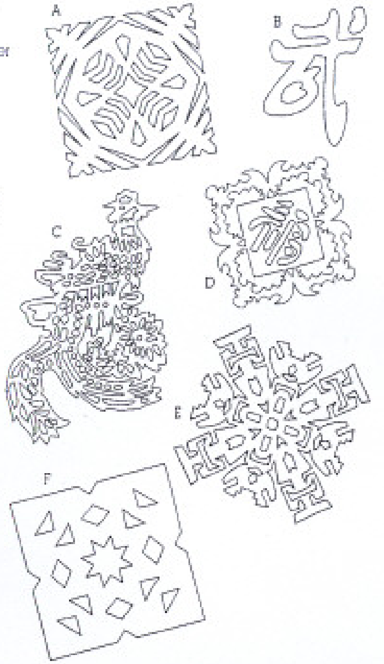
Pliages et symétrie

Construire par pliage des figures ayant un ou plusieurs axes de symétrie

Découverte

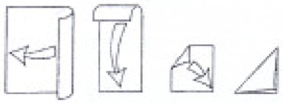
Autrefois, dans l'ancienne Chine, on s'offrait, à l'occasion du Nouvel An chinois, des sortes de « cartes de voeux » découpées dans du papier et on en décorait les murs et les portes des maisons.

Pour réaliser ces cartes, on utilisait souvent le pliage et le découpage.



1. Parmi les motifs représentés, quels sont ceux qui ont été réalisés par pliage et découpage ?

2. Prends un carré de papier de 21 × 21 cm. Plie-le en huit comme ci-dessous : c'est le pliage « rosace ».



Reporte un motif, découpe et déplie. Les lignes de pliage sont des axes de symétrie. Marque-les.

3. Utilise maintenant le pliage rosace pour réaliser la carte F. Découpe, déplie, compare avec le modèle et cherche les découpages oubliés.

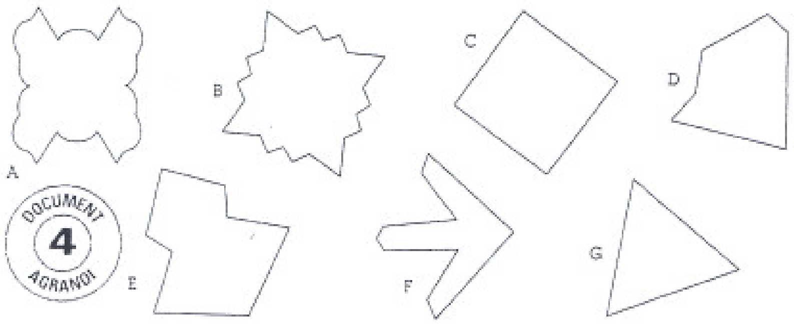
AIDE-MÉMOIRE N° 2 - PAGE 183

Exercices et problèmes

1 En pliant une feuille de papier une seule fois, trace puis découpe une forme qui, une fois dépliée, te donnera un carré. Avec une autre feuille, procède de la même manière pour obtenir un triangle. Avec une troisième feuille, fais de même pour obtenir un rectangle.

Annexe 6 (suite du document A)

2 Décalque les figures agrandies page 190. Trace sur le calque l'axe ou les axes de symétrie de ces figures, s'ils existent. Puis vérifie par pliage.

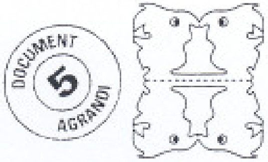


3 **Le pélican de Jonathan**

« Le pélican de Jonathan,
Au matin, pond un œuf tout blanc.
Et il en sort un pélican
lui ressemblant étonnamment... »

(R. Desnos)

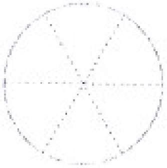
a/ Observe le pliage et le découpage réalisés par Bertrand.

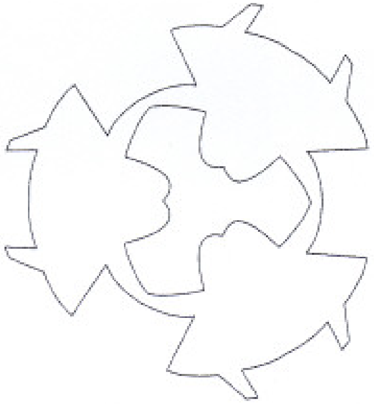


À ton tour, essaie d'obtenir un découpage identique en décalquant le modèle page 191.

b/ Laurent a fait un pliage en accordéon. Il a obtenu une ribambelle de pélicans. À ton tour, essaie de réaliser une ribambelle de pélicans.

4 Plie en six un disque de papier. Utilise-le pour obtenir un découpage qui ressemble à celui-ci.





Annexe 7 (document B)

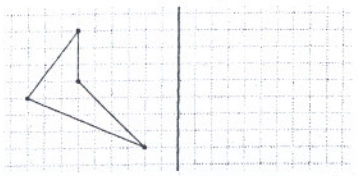
Utiliser la symétrie

Avec les nombres...
Récite des produits de la table de multiplication

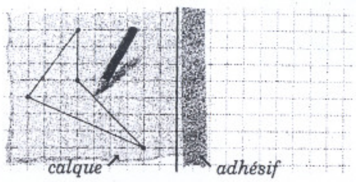
1 Activité

Matériel : feuille quadrillée, papier-calque,
crayon à papier, règle,
adhésif.

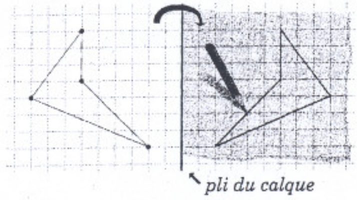
a Trace une droite en rouge pour partager en deux parties une feuille quadrillée.
Sur la partie gauche, reproduis ce polygone :



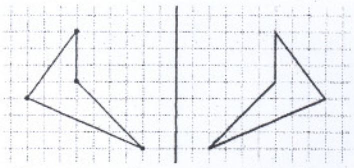
b Avec de l'adhésif, fixe un morceau de calque sur la partie gauche de ta feuille.
Calque le polygone.



c Retourne le calque en le pliant le long de la droite rouge.
Repasse sur les tracés du polygone.



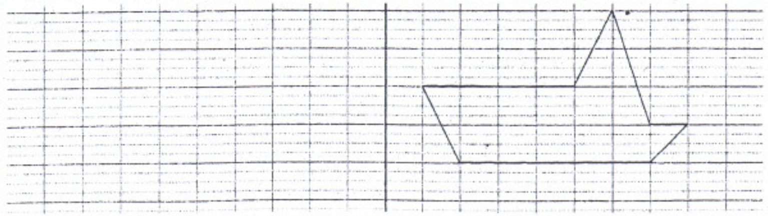
d Retire le calque et observe les deux polygones. Ils sont **symétriques** par rapport à la droite rouge.



Tu peux le vérifier en pliant la feuille le long de la droite rouge.

1 Exercices

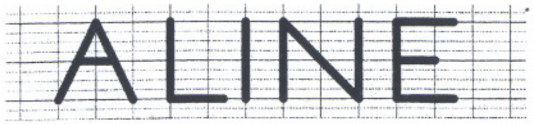
En te servant du quadrillage, trace la figure symétrique par rapport à la droite rouge.



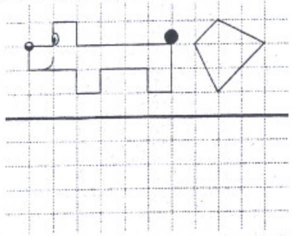
Annexe 8 (suite du document B)

2

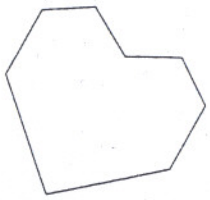
- Recherche les lettres de ce prénom qui ont un axe de symétrie.
- Reproduis chacune de ces lettres sur un quadrillage.
Trace en rouge les axes de symétrie.



3 Trace les deux figures symétriques par rapport à la droite bleue.



4 Reproduis cette figure sur un calque.
Cherche l'axe de symétrie
et vérifie en pliant.

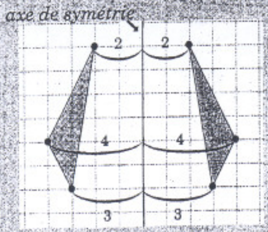


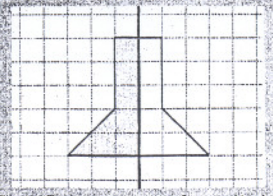
5 Reproduis le chemin rouge. Trace et code le chemin symétrique qui va de m à n.

1 → • 2 ↓ • 1 → • 1 ↑ • 1 → • 2 ↑ • 2 → • 4 ↓

Je retiens bien

Deux figures sont symétriques
lorsqu'on peut les faire coïncider par pliage.





Cette figure a un axe de symétrie.