TRAVAILLER LE RAISONNEMENT, L'ARGUMENTATION ET LA PREUVE EN PLAÇANT LES ÉLÈVES EN SITUATION DE RECHERCHE

Virginie DELOUSTAL-JORRAND
Maître de conférences, IUFM d'Alsace
Équipe CNAM, Laboratoire Leibniz, Grenoble
ERTé Maths à Modeler
virginie.deloustal-jorrand@alsace.iufm.fr

Résumé
Nous proposons, dans cet atelier, une réflexion basée sur des séances de recherche qui ont été testées dans des classes de cycle 3 (et de collège). Nous voulons montrer comment en manipulant des objets simples et faciles d'accès, on peut travailler le raisonnement et la preuve. Les débats entre les groupes et l'apprentissage d'un « esprit critique scientifique » permettant de faire évoluer les conceptions des élèves sur la preuve. L'atelier s'appuie sur une *Situation-Recherche* de pavages de polyminos, d'autres *Situations-Recherche* ont été proposées aux participants en fin d'atelier.

Cet atelier s'appuie sur une recherche menée depuis de nombreuses années au sein de l'équipe CNAM du laboratoire Leibniz de Grenoble. L'ERTé (Equipe Recherche Technologie éducation) *Maths à Modeler* a d'ailleurs été montée autour de l'équipe CNAM et du projet des *Situations-Recherche*. Ce type de situations, étudié théoriquement par cette ERTé fonctionnait déjà depuis longtemps dans les ateliers MATh en JEANS (Audin & Duchet, 1992).

L'équipe CNAM du laboratoire Leibniz regroupe à la fois des chercheurs en didactique des mathématiques et des chercheurs en mathématiques discrètes. Cette double compétence nous permet de concevoir des situations issues de la recherche en mathématiques discrètes, mettant en jeu des notions faciles d'accès comme les pavages par exemple et qui permettent l'apprentissage de savoirs mathématiques « transversaux » tels que les conjectures, l'expérimentation, les contre-exemples, la modélisation, la définition, l'implication, l'argumentation, la preuve…

Il s'agit, dans cet atelier, de présenter comment l'utilisation de ces *Situations-Recherche* en formation des professeurs des écoles peut permettre dans un premier temps, l'apprentissage ou au moins la consolidation de ces savoirs mathématiques « transversaux » par les professeurs, avant de leur montrer, dans un deuxième temps, comment utiliser ces situations dans leur propre classe.

Pour cela, les participants ont été confrontés à la situation de pavage des polyminos avant que l'animatrice ne présente ses résultats et les difficultés auxquelles elle est confrontée en formation initiale ou continue des professeurs des écoles.

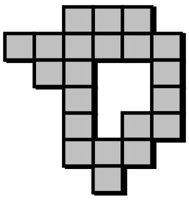
I – LA SITUATION « PAVAGES DE POLYMINOS »

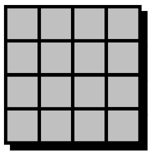
Nous présentons ici la situation donnée lors de l'atelier et que nous utilisons fréquemment en formation des PE et des PLC. Cette situation est ancienne et a été présentée plusieurs fois, on pourra notamment se référer aux textes de Grenier & Payan (2002 et 1998). Cependant, cette situation nous paraît particulièrement bien appropriée à la formation des professeurs car elle permet, en un temps relativement court, d'avoir une vue d'ensemble de ce qui peut se passer dans une classe de primaire ou de collège. Cette situation permet d'obtenir des résultats nombreux et variés dans un temps raisonnable (entre 1h et 2h) contrairement à d'autres situations qui demandent plus de temps.

I – 1 Présentation

Voici quelques définitions que nous donnons aux professeurs des écoles en débutant la séance tout en insistant bien sur le fait qu'elles ne sont pas imposées aux élèves de primaire qui travaillent, eux, au moins au début, sur des jeux matériels.

Un *polymino* est un assemblage connexe (c'est-à-dire se touchant par une arête) de cases carrées dans le plan :

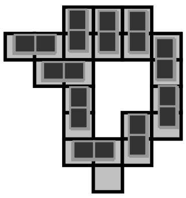




Un *domino* est un polymino à deux cases : 

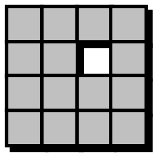
Paver un polymino par des dominos, c'est le recouvrir entièrement et sans chevauchement avec des dominos. On obtient ainsi des polyminos *pavables* et des polyminos *non pavables*.

Exemple de polyminos non pavables :



La « caractérisation » des polyminos pavables par des dominos est un problème non résolu par la recherche actuelle en mathématiques. Nous restreindrons donc ce problème à une classe particulière de polyminos, les polyminos carrés à un trou. Nous nous intéressons donc au problème suivant :

Quels sont les polyminos carrés tronqués d'une case qui sont pavables par des dominos ?



Une fois le problème compris par tous les PE, nous leur demandons de se mettre en groupe de 3 ou 4 élèves pour essayer de répondre à cette question. Il n'est pas inutile de faire reformuler le problème par un PE, certains étudiants pensant que la question porte sur le polymino carré représenté au tableau et non pas sur la classe des polyminos carrés tronqués d'une case.

I – 2 Quelques stratégies de résolution

Nous présentons ici quelques stratégies de résolution parmi celles émergeant le plus souvent. Il faut noter que les preuves habituellement proposées par les élèves de primaire sont les mêmes que celles proposées par les PE ou par les PLC même si les mots pour les exprimer varient parfois. Nous décrivons ci-dessous les résultats amenés par la situation, ils font autant référence à ce qui a eu lieu pendant l'atelier qu'à ce qui se passe ordinairement dans une classe de formation de PE ou dans une classe de primaire. Par souci de concision, nous ne détaillons pas les démonstrations et ne donnons qu'une idée générale de celles-ci.

I – 2.1 Premiers résultats

Le premier résultat qui apparaît le plus souvent est l'impossibilité du pavage par des dominos des carrés de côté pair tronqués d'une case. Le problème est donc restreint à la classe des polyminos carrés de côté impair tronqué d'une case.

Il apparaît alors que parmi ceux-ci, certains sont pavables et d'autres pas, suivant la position du trou dans le carré. Ceci est montré sur des polyminos de petite taille : côté 3 ou 5 le plus souvent.

Enfin, dans les cas des carrés de côté 3, 5 ou 7 cases, les PE trouvent les cases que l'on peut enlever pour obtenir un polymino pavable : ils exhibent le pavage obtenu. Dans le carré de côté 3, ils utilisent le plus souvent une preuve par forçage (condition nécessaire) pour montrer que certaines cases enlevées rendent le polymino non pavable.

Exemple de preuve par « forçage » :

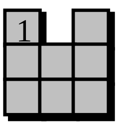


Schéma 1

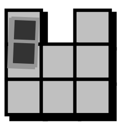


schéma 2

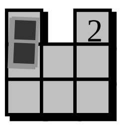


schéma 3

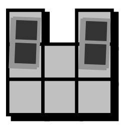


schéma 4

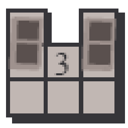


schéma 5

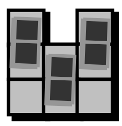
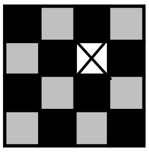


schéma 6

Pour que la case 1 soit pavée, il faut nécessairement poser un domino comme sur le schéma 2. Puis, pour que la case 2 soit pavée, il est nécessaire de poser un domino comme sur le schéma 4. Enfin, pour paver la case 3, il ne reste alors qu'une possibilité :

poser un domino comme sur le schéma 6. Il reste alors à paver deux cases non voisines, ce qui n'est pas possible. En conclusion, ce polymino n'est pas pavable.

Pour les carrés de côté 5 ou 7, ils se contentent généralement de montrer qu'un ou deux pavages ne sont pas possibles pour en déduire qu'une certaine case ne peut être enlevée, ils ne s'assurent pas qu'aucun pavage n'est possible. Il s'agit donc d'éclaircir ceci avec eux.



I – 2.2 Conjectures

A la suite de cela, émerge le plus souvent une conjecture :

> Si on colorie le carré en damier comme ci-dessus, lorsqu'on enlève une case noire, le polymino tronqué obtenu est pavable et réciproquement, lorsqu'on enlève une case blanche, le polymino tronqué obtenu n'est pas pavable.

I – 2.3 Preuves par découpages (implication directe)

Il existe de nombreux types de découpages qui permettent de démontrer qu'un polymino est pavable : on découpe le polymino de départ en polyminos plus petits dont on sait qu'ils sont pavables. Ces preuves sont basées sur la propriété :

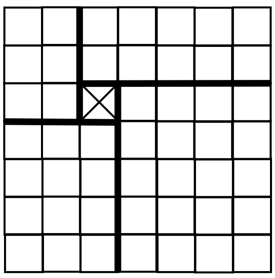
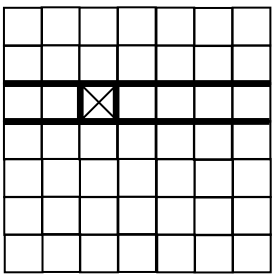
> « Un polymino rectangulaire dont au moins un des côtés est pair est pavable par des dominos ».

Il s'agit donc de découper le carré tronqué d'une case en différents rectangles dont on démontre qu'ils ont un côté pair. Il faut auparavant avoir repéré la place des cases que l'on peut enlever :

> « Elles sont en position (pair, pair) ou en position (impair, impair) ».

Le plus souvent il faut un découpage différent selon la position de la case (p, p) ou (i, i).

Voici deux exemples de découpages pour la position (impair, impair) sachant qu'on peut les « adapter à » pour la position (pair, pair) :

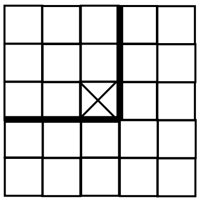
Les preuves par découpages apparaissent aussi très souvent comme des démonstrations de résultats intermédiaires comme par exemple « si on enlève la case du coin, le polymino est pavable ».

Ces preuves sont les plus convaincantes pour les PE, le découpage dessiné étant validé sans aucune difficulté. Il reste alors à leur faire accepter que l'on puisse bien reconnaître ces arguments comme une preuve mathématique.

I – 2.4 Preuves par induction (implication directe)

Ces preuves utilisent le résultat démontré sur un carré de côté 3 pour « grossir » le polymino petit à petit.

La case barrée ci-dessous peut-être enlevée pour que le polymino soit pavable : en effet, l'intérieur du carré de côté 3 dessiné est pavable (cf. résultat sur le carré de côté 3) et le « L » restant est aussi pavable (2 rectangles de côtés pairs). On peut démontrer que toutes les autres cases colorées en noir (dans la coloration en damier) peuvent être enlevées, il suffit pour cela de déplacer le carré de côté 3.



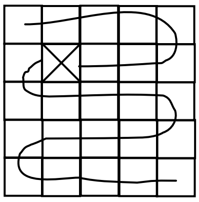
On a donc démontré l'ensemble des cases que l'on peut enlever sur un carré de côté 5.

A partir de ce résultat, on peut, de la même façon, démontrer quelles sont les cases qui peuvent être enlevées dans le carré de côté 7. On généralise ensuite la démonstration pour le carré de côté n.

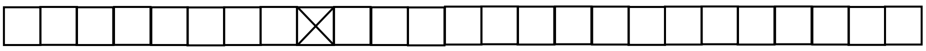
I – 2.5 Preuve par chemin (implication directe)

Pour démontrer qu'une case noire peut-être enlevée, on déroule le polymino en « chemin » et l'on montre que, de part et d'autre de la case enlevée, les deux « morceaux de chemin » ont un nombre de cases pair et peuvent donc être pavés.

Le carré à paver :



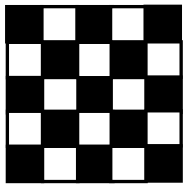
devient :



I – 2.6 Preuve par coloration (implication réciproque)

Après avoir vu apparaître différentes stratégies pour montrer que les cases noires peuvent être enlevées, il reste à démontrer que réciproquement, si on enlève une case blanche on ne peut pas paver le polymino obtenu. L'argument de coloration utilisé dans la démonstration suivante apparaît plus rarement de façon naturelle, il peut être plus ou moins « amené » par l'enseignant à l'aide de questions si cela est nécessaire.

Prenons un polymino carré, colorions-le en damier de la façon suivante :

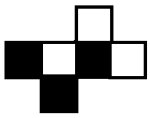


On démontre qu'il y toujours deux cases noires de plus que de cases blanches. (Si n est le nombre de cases blanches, il y a n+2 cases noires).

Or, quelle que soit la position dans laquelle on pose un domino, il recouvre forcément une case noire et une case blanche. Pour que le polymino soit pavable par des dominos, il faut donc qu'il ait autant de cases blanches que de cases noires (1).

C'est-à-dire que, dans le cas du carré tronqué d'une case, si on enlève une case blanche le polymino n'est pas pavable (nombre de cases blanches et noires différent !).

Il n'est pas rare que les PE (ou élèves) associent alors la validité de l'affirmation (1) à la validité de sa réciproque : « si un polymino a autant de cases blanches que de cases noires alors il est pavable » ou encore « si on enlève une case noire, il est pavable ». Cette réciproque est évidemment fausse, comme le montre le contre-exemple ci-dessous (autant de cases blanches que de cases noires mais non pavable) :



I – 3 Connaissances mises en jeu dans cette situation

Voici une liste non exhaustive des connaissances mathématiques mises en œuvre dans cette *Situation-Recherche*.

- tri des solutions, essais sur des « petits cas » ;
- démonstration par condition nécessaire (ou par forçage) ;
- recherche et formulation de conjectures ;
- contre-exemples ;
- modélisation ;
- preuve et argumentation (condition nécessaire / condition suffisante…) ;
- raisonnement par induction ;
- connaissances arithmétiques (parité…).

II – LES SITUATIONS-RECHERCHE EN CLASSE

II – 1 Motivation et caractéristiques

La motivation première pour l'introduction des *Situations-Recherche* en classe (primaire, collège ou plus tard) est de permettre aux élèves de prendre la place d'un « chercheur qui cherche à résoudre un problème qui s'offre à lui ». Un problème étant posé (il faut parfois définir plus précisément le questionnement), l'élève cherche à y répondre en utilisant tous les moyens qui s'offrent à lui sans qu'aucun savoir de la classe de mathématiques soit mis en avant.

Il apparaît alors que ce qui est au centre de l'activité est l'organisation de la recherche, les formulations de conjectures, la construction d'un raisonnement et la validation ou non d'une preuve. Ces « savoirs transversaux », au centre de l'activité mathématique, prennent ici tout leur sens dans la recherche d'une réponse à un questionnement. C'est donc pour leur donner une place d'importance que nous proposons des *Situations-Recherche* en classe.

Voici quelques caractéristiques que ces situations doivent remplir pour permettre ceci.

- Domaine et question facilement compréhensibles ;

> Même s'il n'est pas familier le domaine conceptuel dans lequel se trouve le problème est d'un accès facile afin que l'on puisse facilement « prendre possession » de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution. [Karine Godot].

- aspect ludique (pour assurer la dévolution du problème plus facilement) ;
- plusieurs approches mathématiques possibles ;
- pré-requis scolaires les plus réduits possibles ;
- l'intérêt réside dans la découverte des moyens pour atteindre la solution et dans la justification de ces moyens et non pas dans la solution elle-même ;
- travail en groupes et débats : convaincre ses pairs et pas seulement le professeur ;
- la situation fait référence à un problème général ouvert pour la communauté mathématique, c'est-à-dire non encore résolu par elle. Il en résulte, entre autres, qu'il n'existe pas (ou du moins pas encore) de « fin », il n'y a que des résultats partiels qui renvoient à d'autres questions.

II – 2 Utilisation dans les classes

II – 2.1 Dans les programmes

Voici quelques extraits des programmes de mathématiques de cycle 3 (2002) qui montrent bien la place que peuvent occuper les *Situations-Recherche* en classe.

> Les situations sur lesquelles portent les problèmes proposés peuvent être issues de la vie de la classe, de la vie courante, de jeux etc. Elles sont présentées sous des formes variées […]
>
> Au travers de ces activités, le développement des capacités à chercher, abstraire, raisonner, prouver, amorcé au cycle 2, se poursuit. Pour cela il est nécessaire de prendre en compte les démarches mises en œuvre par les élèves, les solutions personnelles qu'ils élaborent, leurs erreurs,

leurs méthodes de travail et de les exploiter dans les moments de débats. Au cycle 3, les élèves apprennent progressivement à formuler de manière plus rigoureuse leurs raisonnements, s'essaient à l'argumentation et à l'exercice de la preuve.

II – 2.2 Organisation pratique

Le travail de la classe sur une *Situation-Recherche* s'étale sur plusieurs semaines à raison, en général, d'une heure par semaine. Les séances sont menées par l'enseignant, un chercheur ou les deux à la fois. Les élèves sont en groupes de 3 à 5 élèves.

Lors de la première séance le problème peut leur être présenté sous forme de jeux matériels (plateaux et dominos en bois par exemple) pour que les élèves puissent se l'approprier en échappant à la suite de définitions préalables (cf. I-1). Ces jeux devront, cependant, être enlevés après deux ou trois séances afin que les élèves ne restent pas sur la manipulation d'objets et la collection de résultats mais passent à la résolution d'un problème général.

Pour garder une trace de ce qui a été fait aux séances précédentes, les groupes peuvent remplir une "feuille bilan" sur laquelle ils noteront les résultats, les fausses pistes, et tout ce qui leur semblera important (savoir tenir une "feuille bilan" de façon efficace pour la recherche devient alors aussi un apprentissage).

L'enseignant et/ou le chercheur passe dans les groupes. Il choisit des moments adéquats de la recherche pour faire des mises en commun. Celles-ci peuvent avoir lieu pour préciser un aspect du problème, arrêter une fausse piste dans un groupe, confronter des stratégies différentes, valider des résultats… Cependant, l'enseignant et/ou le chercheur reste en retrait, son rôle étant de guider le débat et non pas de valider un résultat. Certains élèves passent au tableau pour expliquer leur recherche. Ces moments obligent à argumenter et à développer un esprit critique face à des preuves valides ou non.

On peut éventuellement profiter d'une fête d'école pour demander aux élèves de présenter un poster ou de préparer une présentation devant les parents. Outre le fait que ce soit gratifiant pour eux, il est alors plus évident pour les élèves qu'ils doivent utiliser des arguments clairs. Les parents n'ayant pas participé à la recherche, il faut leur présenter les phases les plus importantes de cette recherche sans utiliser de sous-entendus, avec des arguments les plus compréhensibles et les plus pertinents possibles.

II – 2.3 Quelques critères d'évaluations

Les *Situations-Recherche* ne sont pas, a priori, mises en place pour être évaluées. L'évaluation ne devrait probablement prendre place que si ce type de travail devient assez habituel dans la classe. Voici quelques critères d'évaluation que je propose aux PE, pour certains ils ne sont pas associés uniquement aux *Situations-Recherche* et peuvent être réutilisés dans d'autres conditions.

Activité dans le groupe

- Le groupe travaille-t-il en autonomie ?
- E participe-t-il à la réflexion du groupe ?
- E est-il capable de s'exprimer face à l'observateur ?

- E est-il à l'écoute des autres ?
- E sait-il se faire écouter / comprendre par les autres ?

Présentation écrite / orale

- savoir transcrire ses résultats par écrit ;
- clarté et pertinence de la feuille bilan ;
- au tableau (écrit / oral) ;
- poster, Présentation orale (devant les parents, fête de l'école par exemple).

La recherche

Il s'agit bien ici d'évaluer les moyens de la recherche et non la solution elle-même.

- savoir différencier : question / hypothèse / conjecture / théorème ;
- utiliser exemple et contre-exemple ;
- comprendre ce qu'on a fait, prendre du recul ;
- organiser sa recherche ;
- modéliser ;
- généraliser un résultat ;
- argumentation, notion de preuve ;
- connaissances sur les concepts en jeu (parité…).

III – LES SITUATIONS-RECHERCHE DANS LA FORMATION DES PE

Mes motivations sont à deux niveaux. En plus de l'intérêt que je vois à l'utilisation de ces situations dans les classes de primaire, les présenter en formation des professeurs des écoles permet aussi de travailler des concepts fondamentaux en mathématiques tels que la preuve, les conditions nécessaires et suffisantes, les exemples et contre-exemples…, concepts qui sont très souvent loin d'être maîtrisés par les PE. Plus j'utilise ces *Situations-Recherche* et plus je suis convaincue de leur grand intérêt pour l'apprentissage des mathématiques, que ce soit pour les élèves de primaire ou pour la formation des professeurs des écoles.

III – 1 Pour leur futur d'enseignant

- Éviter le « tout fichier »

Lors de visites de classe, je vois souvent les mathématiques réduites à un ensemble d'exercices tirés de fichier. Certains cahiers de mathématiques sont un ensemble de pages photocopiées sur lesquelles l'élève n'a plus qu'à écrire un nombre ou une réponse réduite à « oui » ou « non ». Il me paraît important d'insister sur le fait, entre autres, que les erreurs, le tâtonnement et le cahier de brouillon doivent avoir leur place dans l'apprentissage des mathématiques.

- Autre façon de voir/faire des mathématiques

Dans le même ordre d'idées, il me paraît important de montrer que les mathématiques ne sont pas réduites au calcul ou à la géométrie. Il ne s'agit pas non plus uniquement d'apprendre des formules ou des techniques. Les mathématiques doivent être des outils nous permettant de répondre à certaines questions. Dans ces Situations-Recherche, faire des mathématiques, c'est avant tout mettre en place des raisonnements et des preuves sans pour autant utiliser des « formules connues ».

- Former des citoyens

L'école affirme comme but la formation de citoyens. Il me semble que ce n'est pas par le biais des fichiers que les mathématiques peuvent y participer. Les Situations-Recherche, en permettant le débat, la contradiction, l'argumentation face à ses pairs favorisent l'apprentissage d'un esprit critique scientifique.

III – 2 Quelques difficultés en mathématiques des PE

De nombreux PE ont de grosses lacunes en mathématiques, en particulier en ce qui concerne l'argumentation et la preuve. Dans ce type de situation, ces difficultés ressortent de façon encore plus évidente. On voit aussi apparaître des « conceptions » sur les mathématiques, issues souvent d'années de mathématiques scolaires « mal vécues », très éloignées de ce qu'est réellement l'activité mathématique dans les *Situations-Recherche*. Les mettre face à ces *Situations-Recherche* permet alors de travailler avec eux de nombreux savoirs « transversaux » en mathématiques (notion de contre-exemple, démonstration…). Voici quelques exemples des difficultés rencontrées par les PE qui méritent d'être « éclairées mathématiquement » en formation.

- Démotivation très rapide

Il ne semblerait pas, a priori, que la démotivation soit une difficulté mathématique, cependant je crois que les raisons de celle-ci sont très liées à leur relation aux mathématiques. Alors que les élèves de cycle 3, pour la plupart, s'approprient le problème facilement et cherchent avec engouement, certains groupes de PE ne parviennent pas à entamer une recherche « satisfaisante ».

Je fais l'hypothèse qu'une des raisons de cela est due à leur rapport « douloureux » aux mathématiques dans leur parcours scolaire. Ayant le sentiment d'être « mauvais » en mathématiques, certains PE n'osent pas formuler une conjecture, n'accordent aucune légitimité à leurs propres idées et n'osent pas faire preuve d'esprit critique.

- Les maths sont des « formules »

Pour beaucoup de PE, les mathématiques se réduisent à l'utilisation des « bonnes » formules au « bon » moment, les formules devant contenir plusieurs inconnues de préférence. Certains PE proposent une démonstration (parfois fausse) d'une page avec plusieurs inconnues pour affirmer qu'un carré tronqué d'une case de côté pair a un nombre total de cases impair. Devant mon étonnement, ils expliquent alors qu'ils ont fait un effort pour l'écrire « en langage mathématique ». Pour eux, le rôle du langage mathématique n'est pas de clarifier un propos mais tout simplement de le symboliser.

- Quelques essais qui ne marchent pas suffisent pour conclure

On peut conclure qu'un polymino est pavable si on exhibe un pavage, alors qu'on ne peut pas conclure qu'un polymino n'est pas pavable simplement en exhibant un pavage impossible.

Dans le cas du carré de côté 5 par exemple, pour prouver que certaines cases ne peuvent être enlevées, il faut soit utiliser un argument général (coloration) soit montrer qu'aucun pavage ne peut convenir (ce qui est assez long et fastidieux). Pour beaucoup de PE, pour prouver qu'une case ne peut être enlevée, il suffit d'exhiber un pavage qui ne convient pas.

La dissymétrie entre la démonstration de l'affirmation et de la négation d'une proposition existentiellement quantifiée (il existe un pavage quand j'enlève cette case) n'est pas perçue facilement par les PE.

- Un carré de côté 13 est un polymino plus « quelconque » qu'un carré de côté 3

Pour certains PE, montrer qu'une propriété est vraie sur un exemple suffit à la démontrer. D'autres savent que cela ne suffit pas, ils cherchent alors à démontrer que la propriété est vraie pour un élément générique (ou quelconque) et c'est le choix de cet élément générique qui pose problème.

De nombreux PE commencent directement à travailler sur un polymino carré de côté assez grand (9, 11, 13…). Ils expliquent qu'ils évitent ainsi de travailler sur un polymino particulier comme le carré de côté 3 par exemple. Cependant, ils utilisent bien les propriétés du polymino de grande taille dessiné et ne s'en servent pas du tout comme de la représentation d'un élément quelconque. Il s'agit donc de mettre en évidence le fait qu'un polymino carré de côté 13 est un polymino particulier au même titre qu'un polymino de côté 3.

- Pas de distinction entre CN et CS

Au cours de cette recherche, on est amené maintes fois à distinguer *Condition Nécessaire* et *Condition Suffisante*, en particulier parce que les deux sens de l'équivalence « avoir un trou à la place d'une case noire ⇔ être pavable » nécessitent deux types de démonstration distincts.

Après avoir trouvé un argument valide pour les « cases qui marchent », les PE essaient le plus souvent d'utiliser ce même argument pour les « cases qui ne marchent pas ». Il faut alors mettre ceci en débat jusqu'à arriver à trouver un contre-exemple.

- Généralisation naturelle : c'est logique, on déduit !

Après avoir trouvé les cases que l'on peut enlever sur un carré de côté 3 et sur un carré de côté 5, de nombreux PE énoncent la conjecture « pour que le polymino soit pavable il faut enlever une case noire » et arrêtent leur recherche tenant cette conjecture pour un fait mathématique établi. Ils justifient leur affirmation par des arguments du type : « c'est *logique* ! », « puisque ça marche pour 3 et 5 *on en déduit* que ça va marcher tout le temps ».

On voit là qu'ils essaient d'utiliser des arguments et un vocabulaire qu'ils associent à l'activité mathématique comme « logique », « déduire », très peu d'entre eux affirment simplement « on voit bien que » puisqu'ils ont pour la plupart intégré le fait que « ça ne suffit pas en mathématiques ». Ils ont ainsi le sentiment d'avancer un argument totalement valide mathématiquement. Il faut donc renégocier la définition d'un « vrai » argument mathématique qui permette la généralisation d'une propriété et la démonstration d'une conjecture.

- Difficultés à reconnaître une preuve

Les mathématiques étant associées pour beaucoup à des formules, une démonstration non valide mais « d'apparence mathématique » est souvent mieux acceptée qu'une démonstration valide présentée en langage courant. D'autre part, comme pour la plupart des élèves, un contre-exemple n'est pas toujours convaincant et ce n'est pas parce qu'un contre-exemple a été trouvé à telle propriété qu'on ne réutilisera pas celle-ci un peu plus tard.

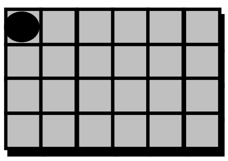
Il faut donc, au cours des débats, permettre aux PE l'apprentissage d'un « esprit critique mathématique ».

IV – D'AUTRES SITUATIONS-RECHERCHE

IV – 1 Le jeu du chocolat

Voici une Situation-Recherche que je propose parfois en 15 à 30 minutes à la fin d'une formation mais qui peut être développée sur un plus long temps en élargissant la question. Elle est présentée sous forme de jeu et il s'agit de trouver une stratégie gagnante, c'est-à-dire une stratégie qui permette de gagner *quelle que soit l'action de l'adversaire*. Ne pas oublier, avant de laisser les PE face au problème, de bien redéfinir une stratégie gagnante, il ne s'agit pas de décider de ce que doit jouer l'adversaire ! De nombreux PE donnent une solution du type : « il faut que l'adversaire joue comme ça et alors je gagne », mais seules nos actions dans le jeu peuvent avoir une incidence sur les actions de l'adversaire.

> Voici une tablette de chocolat rectangulaire avec une bulle de savon dans le coin en haut à gauche. Il s'agit de manger le chocolat sans manger la bulle de savon. Deux adversaires se partagent la tablette, chacun leur tour en la coupant le long des lignes horizontales ou verticales. Celui qui est obligé de manger la bulle de savon a perdu.
>
> Que doit-on faire pour être sûr de gagner ?



On peut facilement prolonger le problème à une tablette de chocolat à une ligne (puis deux) avec la bulle de savon qui peut être placée n'importe où.

IV – 2 La roue aux couleurs

Cette Situation-Recherche demande un peu plus de temps pour trouver des résultats significatifs. En formation PE, elle m'a paru moins appropriée, compte tenu de la durée des séances, cependant elle a donné des résultats très intéressants dans une expérimentation sur plusieurs semaines en primaire (cycle 3). Cette situation est présentée et analysée en détail dans la thèse de Karine Godot. Voici le texte du problème :

> Un forain propose un jeu constitué de deux disques de tailles différentes (la table tournante), disposés de façon concentrique. Sur le plus grand disque, il pose un certain nombre de pions, tous de couleurs différentes.
>
> Le joueur doit placer sur le petit disque le même nombre de pions que sur le grand disque. Ces pions peuvent être de une, deux, trois, quatre couleurs ou plus choisies parmi les couleurs disposées sur le grand disque par le forain.
>
> On fait ensuite tourner le petit disque, cran par cran. Le joueur gagne si, dans chaque position du petit disque, un et un seul de ses pions est de la même couleur que celui qui lui correspond sur le grand disque. Comment le joueur doit-il choisir et disposer ses pions pour gagner ?

IV – 3 Des lieux

Pour en savoir un peu plus sur les *Situations-Recherche*, des compléments dans le site de l'ERTé *Maths à modeler* :

`http://www.mathsamodeler.net/`

Pour avoir un aperçu d'autres *Situations-Recherche* et jouer en ligne (attention ça ne fonctionne pas encore très bien avec tous les navigateurs…), le site *La Valise* :

`http://www-leibniz.imag.fr/LAVALISE`

Pour voir des *Situations-Recherche* mises en place avec des chercheurs dans les classes du secondaire, le site de l'association Math en JEANS :

`http://www.mjc-andre.org/pages/amej/accueil.htm`

V – CONCLUSION

J'ai voulu présenter dans cet atelier une *Situation-Recherche* qui permet de travailler des concepts fondamentaux en mathématiques tels que les contre-exemples, les conjectures, les conditions nécessaires et suffisantes, l'argumentation, la preuve… Pour moi, ces *savoirs transversaux* « fondent » les mathématiques et me paraissent plus importants à maîtriser que n'importe quel autre savoir mathématique. Pourtant, ces savoirs sont les plus difficiles à travailler pendant la scolarité et les PE arrivent souvent à l'IUFM (ou en formation continue) avec de grosses lacunes. Plus encore, certains PE n'ont aucune idée des insuffisances qu'ils ont sur ces *savoirs transversaux*, les mathématiques se résumant pour eux à des formules et des techniques.

Utiliser ces *Situations-Recherche* en formation des professeurs des écoles, me permet donc, d'une part, de leur proposer des situations pour leur classe et, d'autre part, de (re) travailler avec eux les « fondements » des mathématiques.

Cette tâche n'est pas toujours facile. D'une part, ne mesurant souvent pas bien l'importance de ces *savoirs transversaux* en mathématiques (puisque qu'ils ne les connaissent pas toujours !), les PE ne voient pas bien l'intérêt de ces situations pour leur classe. Il me faut donc beaucoup de persuasion pour valoriser ces situations à leurs yeux. D'autre part, lorsque les PE ont des difficultés à mener leur recherche, ils concluent aussitôt que « ce sera trop difficile pour les élèves ». Or pour moi, leurs difficultés viennent en grande partie d'une relation avec les mathématiques difficile et d'un sentiment d'échec présent parfois depuis le collège. Bien des groupes d'élèves de cycle 3 trouvent (dans un temps parfois plus long) de meilleurs résultats que certains PE, mais eux n'ont pas encore cette relation aux mathématiques (et ne savent même pas qu'ils font des mathématiques !). Enfin, de nombreux PE ne se « sentent » pas capables d'assurer l'encadrement de ce type de recherche dans leur classe. Cela est normal, mais il ne faudrait pas que les mathématiques de l'école élémentaire soient restreintes à un ensemble de techniques (mieux maîtrisées par les PE). On pourrait donc peut-être imaginer que, dans une école, un professeur plus à l'aise en mathématiques, travaille sur des *situations-recherche* avec tous les cycles 3, se faisant remplacer dans sa classe par le collègue dont il prend la classe en charge. On pourrait aussi imaginer, au niveau des primaires, une organisation à l'image de Math en JEANS dans le secondaire, avec des chercheurs qui viennent dans la classe (cela est fait en partie par l'équipe CNAM sur la région grenobloise).

S'il n'est pas toujours facile de valoriser ces *Situations-Recherche* devant les PE, j'espère quand même à chaque fois « poser une graine » qui germera peut-être un jour, au grès de leur évolution par rapport à l'enseignement des mathématiques.

BIBLIOGRAPHIE

AUDIN P. & DUCHET P. (1992) *La recherche à l'école : Math en Jeans*, Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique, Grenoble I, **121**, 107-131.

DELOUSTAL-JORRAND V. (2004) *L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique. Étude sous trois points de vue : raisonnement déductif, logique formelle et théorie des ensembles. Construction d'une situation didactique qui problématise l'implication*, thèse, Grenoble I.

GODOT K. (2005) *Situation recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation*, thèse, Grenoble I.

GRENIER D. & PAYAN C. (1998) *Spéficités de la preuve et de la modélisation en Mathématiques Discrètes*, Recherches en Didactique des Mathématiques, **18.2**, 59-100.

GRENIER D. & PAYAN C. (2002) *Situations de recherche en « classe ». Essai de caractérisation et proposition de modélisation*, 189-203, in Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques, Paris VII.