D'UN CONCOURS DE MATHÉMATIQUES PAR CLASSES À LA FORMATION DES MAÎTRES

Lucia GRUGNETTI
Unité de recherche en didactique des mathématiques de l'Université de Parma
lucia.grugnetti@unipr.it

François JAQUET
Ancien chercheur à l'Institut romand de recherche et documentation pédagogique (IRDP)
rédacteur de la revue *Math-École*
fr.jaquet@wanadoo.fr

Résumé
Le Rallye mathématique transalpin (RMT) est un concours de mathématiques sur la résolution de problèmes par classes entières dont l'un des objectifs est d'apporter des résultats et des éléments de réflexion utiles dans le cadre de la formation des maîtres.
Après quelques rappels sur les buts et les principes du RMT, l'article décrit les différentes phases d'élaboration des problèmes, comprenant l'énoncé et une analyse a priori, et les critères de choix qui concernent le contenu mathématique, la tâche de résolution et le contexte, illustrés par trois exemples d'évolution d'une première version à celle qui est retenue pour l'épreuve.
Dans une seconde partie, l'article présente quelques analyses de procédures relevées pour quatre problèmes. On met en évidence, pour chacune d'elles, les savoirs effectivement mis en œuvre par les élèves, tels qu'ils apparaissent à la lecture de leurs explications.
Les retombées pour la formation des maîtres de ce travail d'élaboration et d'analyse paraissent fructueuses, elles sont suggérées par quelques questions ou commentaires, à propos de chaque exemple traité.

I – INTRODUCTION

Les concours de mathématiques se développent un peu partout dans le monde dans le cadre des structures scolaires ou en marge de celles-ci. Sous des modalités très diverses, ils ont en commun la résolution de problèmes.

Leurs organisateurs sont en général des professeurs de mathématiques, avec l'objectif de faire partager leur intérêt pour la discipline à leurs élèves et, parfois à un public plus large.

Certains concours attirent les « forts en maths », et se limitent à établir un palmarès fondé sur les « bonnes réponses » obtenues. D'autres, de plus en plus nombreux, ont des visées pédagogiques : engagement des maîtres, initiation à de nouvelles pratiques, … Le « Rallye mathématique transalpin » s'inscrit dans cette tendance, affiche explicitement des objectifs en vue de la formation des maîtres et, à cet effet, analyse de manière détaillée ses problèmes et les stratégies des groupes d'élèves qui les ont résolus.

II – LE CADRE

Le Rallye mathématique transalpin (RMT) est une **confrontation entre classes**, des degrés 3 à 9 de la scolarité obligatoire (élèves de 8 à 15 ans) dans le domaine de la **résolution de problèmes de mathématiques**.

Le rallye propose **aux élèves** :

- de faire des mathématiques en résolvant des problèmes.
- d'apprendre les règles élémentaires du débat scientifique en discutant et défendant les diverses solutions proposées ;
- de développer leurs capacités, aujourd'hui essentielles, à travailler en équipe en prenant en charge l'entière responsabilité d'une épreuve ;
- de se confronter avec d'autres camarades, d'autres classes.

Pour **les maîtres**, associés à toutes les étapes, dans la mesure de leurs disponibilités, le rallye permet :

- d'observer des élèves (les leurs lors de l'épreuve d'essai et ceux d'autres classes) en activité de résolution de problème ;
- d'évaluer les productions de leurs propres élèves et leurs capacités d'organisation, de discuter des solutions et de les exploiter ultérieurement en classe ;
- d'introduire des éléments de renouvellement dans leur enseignement par des échanges avec d'autres collègues et par l'apport de problèmes stimulants ;
- de s'engager dans l'équipe des animateurs et de participer ainsi à la préparation, à la discussion et au choix des problèmes, à l'évaluation en commun des copies, à l'analyse des solutions.

Pour **les formateurs**, et, plus généralement pour l'enseignement et la recherche en didactique le rallye offre :

- une source de problèmes analysés à exploiter en formation ;
- des résultats, observations et analyses à propos des stratégies, erreurs, obstacles, variables didactiques … ;
- des propositions de champs d'investigation et de développements.

Le RMT propose des épreuves de **résolution de problèmes par classes entières**, réparties en sept catégories, des degrés 3 à 8 (8 à 14-15 ans) de la scolarité. La décision de participer au concours est prise conjointement par la classe et le maître, après une épreuve d'essai au cours de laquelle les uns et les autres ont pu saisir les enjeux d'une résolution collective de problèmes, à la charge des élèves seulement.

Chaque épreuve est composée de 5 à 7 problèmes par catégorie, à résoudre en 50 minutes. Beaucoup de problèmes sont communs à plusieurs catégories. Ils sont choisis, en nombre et en difficulté, de telle façon que chaque élève, indépendamment de son niveau, puisse y trouver son compte et que l'ensemble de la tâche soit globalement trop lourd pour un seul individu, aussi rapide soit-il.

C'est la classe qui est responsable des réponses apportées. Les élèves doivent produire **une solution unique** pour chacun des problèmes. Il n'y a pas que la "réponse juste" qui compte, les solutions sont jugées aussi sur la **rigueur des démarches et la clarté des explications fournies**.

Les épreuves qui suivent les essais se font **hors de la présence du maître titulaire de la classe**. Celui-ci est remplacé par un collègue avec qui, si possible, il fait un échange. Il quitte donc son rôle d'enseignant pour celui d'observateur, s'abstenant de toute intervention, de quelque nature que ce soit, dans la classe dont il a le contrôle pendant la durée de l'épreuve. Son rôle se limite à la distribution des sujets, au contrôle de la durée et à l'envoi des copies à l'équipe qui sera chargée de les évaluer.

La **préparation des problèmes** se fait en coopération entre les différentes équipes régionales et nationales. Les traductions (en français, italien, allemand, hébreu) sont rigoureusement comparées.

L'évaluation des copies est faite par l'équipe régionale responsable, selon les critères déterminés dans l'analyse a priori des problèmes, lors de leur élaboration. Pour chaque catégorie, un classement est établi, par région, sur l'ensemble des deux épreuves I et II. C'est lui qui détermine la participation aux finales régionales. Les critères d'évaluation et le résultat de chaque problème, ainsi que les classements, sont communiqués aux classes dans les meilleurs délais.

Après chaque épreuve le maître est libre de photocopier les solutions produites par la classe, d'exploiter les problèmes, de les discuter, de les reprendre et d'analyser les résultats avec l'ensemble des élèves.

Des **journées d'études internationales** permettent aux animateurs des différents pays participants de se rencontrer pour organiser l'élaboration des problèmes, conduire des analyses a priori ou a posteriori, déterminer les orientations du RMT ou les exploitations didactiques de ses problèmes.

L'appui scientifique au RMT est assuré par les membres de ses sections qui appartiennent à des institutions de recherche en didactique des mathématiques dans leurs pays respectifs.

III – L'ÉLABORATION DES PROBLÈMES

Pour les animateurs du RMT, la résolution de problèmes constitue l'une des stimulations essentielles des apprentissages, par le sens qu'elle donne aux situations à mathématiser.

Mais encore faut-il s'entendre sur ce que l'on appelle **« problème »**.

Le RMT propose des *situations pour lesquelles on ne dispose pas d'une solution immédiate et qui conduisent à inventer une stratégie, à essayer, à vérifier, à justifier sa solution.*

Cette définition se rapproche de celle du « problème ouvert », qu'on s'approprie rapidement, où l'on trouve des défis, du plaisir à chercher, des aspects ludiques.

Elle se distingue de celle de la « situation-problème » destinée à construire une nouvelle connaissance ou à en reconstruire une après s'être trouvé dans une situation conflictuelle où le niveau antérieur de la connaissance s'est révélé inadéquat. Si certains problèmes du RMT peuvent effectivement provoquer un conflit cognitif, le dispositif de « concours » ne permet toutefois pas d'en tirer profit : il n'y a pas de temps pour des développements ou exploitations didactiques et le maître est absent lors de la résolution par les groupes d'élèves. Elle est différente de celle du « problème d'application » destiné à renforcer et assimiler des connaissances ou en étendre le champ d'application, qu'on situe généralement en fin de séquence d'apprentissage d'une notion. Il faut toutefois relever à ce propos que tout problème participe au renforcement des savoirs qu'il mobilise ; mais que ceux du RMT cherchent à éviter les effets de « répétition » et « d'exercice » par le choix de contextes les plus originaux possible.

Une des conséquences de la définition du problème du RMT, comme de toute autre compétition, est qu'il doit être inédit (dès qu'on en a trouvé la solution, ce n'est plus un problème), riche et stimulant pour les élèves.

Du fait de son étendue géographique, le RMT doit créer des problèmes qui conviennent à des systèmes éducatifs qui différent par leurs programmes et leurs contextes scolaires : tous les pays ne présentent pas les mêmes notions au même degré de la scolarité ; il faut éliminer tous les problèmes ressemblant à ceux des manuels de toutes les régions où se déroulent les épreuves … ; les contextes des sujets doivent être neutres culturellement, les énoncés doivent pouvoir être traduits dans plusieurs langues …

Les buts que le RMT s'est fixés pour les maîtres et la formation, impose une autre contrainte sur ses problèmes : ils devraient être exploitables en classe, après le concours. Ses animateurs souhaiteraient que la participation aux épreuves du RMT ne se fasse pas « en plus » ou « à côté » du curriculum, mais qu'elle soit conçue comme une partie intégrante (« à l'intérieur ») du programme de mathématiques et de ses objectifs ; en particulier de ceux qui concernent l'initiation à la démarche scientifique, le développement de l'autonomie, l'organisation d'une recherche, la rigueur des notations, la communication de résultats.

Les conditions sont donc multiples et complexes, parfois contradictoires ou paradoxales, au point que le problème du RMT peut paraître une création utopique. Mais ces conditions, ou contraintes, ne se sont pas imposées spontanément. L'évolution s'est faite sur une longue durée, et la question « Qu'est-ce qu'un bon problème, pour le RMT ? » n'a été posée qu'après 12 ans d'existence, comme thème de la 8e rencontre internationale de ses animateurs, en 2004, où des **critères de choix** se sont dégagés, qui paraissent pertinents pour la formation. En voici trois :

A. Le contenu mathématique

C'est le premier critère, qui fait peu à peu l'unanimité.

Il faut s'assurer que le problème n'« oublie » pas les mathématiques. Il y a effectivement de nombreux jeux, divertissements, casse-tête, défis très plaisants qui, bien que qualifiés de « mathématiques » n'ont pas de contenus disciplinaires que nous sommes capables d'identifier.

Le RMT ne prétend pas éviter ce type de sujets, mais tente d'en limiter la fréquence sans ses épreuves.

B. La tâche de résolution
Un problème qui mobilise des savoirs mathématiques reconnus du point de vue adulte peut parfois être résolu par des élèves par des voies détournées. C'est l'analyse de la tâche de résolution, en fonction du niveau de développement de l'élève, qui permet d'éviter l'écueil.

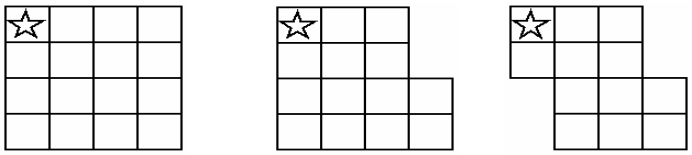
C. Le contexte
Il faut éviter que la décontextualisation constitue la tâche la plus importante du problème.

Nous présentons, dans les pages suivantes, quelques exemples pour illustrer les processus d'élaboration des énoncés de problèmes du RMT en fonction des trois critères exposés ci-dessus.

III – 1 Exemple 1

Voici un problème « refusé » avec un extrait de son analyse a priori, examiné en groupe de travail lors de la rencontre internationale de Bourg-en-Bresse, en 2004. Ce sont ici le contenu mathématique et le contexte qui sont en cause

Trois plaques de couleur (Cat. 3)
Voici trois plaques en bois.
La première plaque est peinte en rouge, la deuxième plaque en vert et la troisième en bleu.



Vous choisissez deux plaques et vous les placez l'une sur l'autre.
Les étoiles doivent toujours être dans le coin en haut à gauche.
Coloriez ce que vous voyez. Dessinez toutes les possibilités.

Extraits de l'analyse a priori
« …
Domaine de connaissances
- Géométrie : positions relatives d'objets vus d'avion

Analyse de la tâche
- Essayer toutes les combinaisons possibles en superposant deux plaques : R sur V, R sur B, V sur R, V sur B, B sur R, B sur V. Remarquer que 2 des 6 combinaisons donnent le même résultat (R sur V et R sur B pour lesquelles on ne voit que R) et qu'il n'y a donc que 5 possibilités.

... »

Les commentaires du groupe de travail
Il est difficile de trouver un contenu mathématique à ce problème. Les « positions relatives d'objets vus d'avion » ne sont pas habituelles et l'on a de la peine à imaginer leurs relations avec les connaissances, notions ou compétences des programmes. Il faudrait à la rigueur ajouter « combinatoire » dans le domaine de connaissances, car

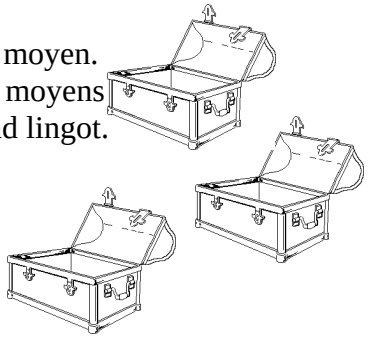
c'est effectivement la recherche des arrangements des trois plaques, prises deux à deux, qui est à la base de la solution du problème.
À propos des critères de la tâche et du contexte, il apparaît que la partie essentielle du travail de l'élève réside dans l'appropriation du contexte ou dans la compréhension des intentions des auteurs de l'énoncé. Le matériel est tout à fait inhabituel et, avant de répondre aux questions, il faut comprendre ce que sont les objets concernés : plaques en bois, de couleurs différentes, représentées par des portions de quadrillages blancs avec une étoile dans la case supérieure gauche. Il faudrait plutôt ajouter une boîte, dont le fond est exactement de la même grandeur que la plaque rouge, avec une illustration en trois dimensions, avec un texte plus détaillé : « Vous choisissez deux plaques. Vous mettez une plaque dans la boîte. Vous posez la seconde par-dessus, … « Mais les ambiguïtés subsistent : sur « coloriez ce que vous voyez », sur ce que signifie le terme « possibilités », afin de savoir ce que sont deux « possibilités différentes » et, surtout, sur ce qu'on attend comme réponse et comme support : des grilles de 4 x 4 dessinées par les élèves avant qu'ils ne les colorient ? Avec le dessin de la boîte en cas de modification de consigne selon les propositions du groupe de travail ? Des collages de deux plaques de papier placées l'une sur l'autre ?).
À propos de l'analyse de la tâche toujours, il paraît difficile, au vu de ce qui précède, de décrire ce que les élèves pourraient faire effectivement. On pourrait ajouter « s'organiser pour explorer toutes les possibilités », mais le terme « s'organiser » devrait être précisé. Il est vraisemblable que de nombreux groupes découperaient des modèles en papier des plaques préalablement coloriées en rouge, vert et bleu, mais comment feraient-ils ensuite ? Par exemple, placer la bleue sur la rouge et redessiner la figure obtenue sur une autre feuille ou les coller et agrafer le collage à la feuille-réponse ?
Finalement, le problème a été rejeté, ne répondant à aucun des trois critères.

Cette « mésaventure » a-t-elle quelque chose à voir avec la formation des maîtres ?
Nous pensons que oui, parce que ce sont des maîtres qui ont choisi le problème pour sa première version, d'autres maîtres qui l'ont examiné en groupe de travail, avec des formateurs et chercheurs et parce que, même dans ce deuxième examen, la décision de renoncer n'a pas été évidente. Ceci permet d'affirmer que chacun, maître ou chercheur, a quelque chose à apprendre dans le domaine de l'élaboration de problèmes, et que, par conséquent, celle-ci participe de la formation, initiale ou continue.
On pourrait objecter que le maître n'a pas à se préoccuper de l'élaboration des problèmes, tâche réservée aux auteurs de manuels ou d'épreuves de concours. Ce n'est pas le point de vue du RMT.

III – 2 Exemple 2

Ce problème a été « accepté » avec un développement sensible de son analyse a priori, de nombreux doutes sur son niveau de difficulté et un déplacement de deux degrés, des catégories 3, 4 et 5 vers 5 et 6 (CE2 - CM2 à CM2 - 6^{e}). Dans cet exemple, c'est l'analyse de la tâche et, par conséquent le choix de la catégorie (degré scolaire) qui sont en jeu.

Les trois coffres (Cat. 5, 6)
Le contenu de chacun de ces trois coffres a la même valeur que 30 pièces d'or.
Dans chaque coffre, il n'y a que des lingots.
Dans le premier coffre, il y a 4 petits lingots et 1 lingot moyen.
Dans le second coffre, il y a 2 petits lingots et 2 lingots moyens
Dans le troisième coffre, il y a 1 lingot moyen et 1 grand lingot.



Combien de pièces d'or vaut un petit lingot ?

Combien de pièces d'or vaut un lingot moyen ?

Combien de pièces d'or vaut un grand lingot ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

Les différents groupes qui ont examiné le premier projet ont constaté que le problème, d'un point de vue mathématique, présente un système de trois équations du premier degré à trois inconnues : 4p + m = 2p + 2m = m + g = 30 (où m, n et p sont exprimés en nombre de pièces d'or) et qu'il paraissait trop ambitieux de le proposer à des élèves de 8 à 11 ans comme prévu initialement.
Les « domaines de connaissances » proposés étaient l'arithmétique (échanges, équivalences) et la logique. Les différentes consultations y ont ajouté la proportionnalité.
Dans le premier projet de l'analyse a priori, « l'analyse de la tâche » était formulée ainsi :
« Comprendre que 1 lingot moyen vaut 2 petits et qu'un grand vaut 2 moyens ou 4 petits.
Comprendre que 6 petits lingots valent 30 pièces d'or et donc qu'un petit lingot vaut 5 pièces d'or (30 : 6 = 5).
Trouver la valeur d'un lingot moyen (10 = 2 x 5) et d'un grand lingot (20 = 4 x 5) »

Cette analyse s'est sensiblement développée et affinée par l'apport des contributions des différents relecteurs, elle a aussi bénéficié d'une expérience des années précédentes. Un problème du 6e RMT (Crociani et al., 1999), *Les pots de confiture*, de structure tout à fait analogue (mais avec des plus grand nombres de pots/lingots et des rapports de 3 – au lieu de 2 – entre les masses/valeurs des grands, moyens et petits) s'était révélé difficile, en catégories 6, 7 et 8.
Finalement, le texte de cette analyse de la tâche a passé de quelques lignes à plus d'une vingtaine, et il se révélera encore bien lacunaire lors de l'examen des copies reçues :

« - Se rendre compte que, si chaque valeur de coffre est de 30 (pièces d'or), les coffres sont équivalents entre eux, bien qu'ils ne contiennent que des lingots différents soit en nombre soit en grandeur.

Tirer, de l'équivalence entre les contenus des deux premiers coffres : 4p +1m = 2p + 2m (p désigne la valeur d'un petit lingot, m désigne la valeur d'un lingot moyen) une équivalence plus simple en retirant 2 p dans chaque coffre : 2p + 1m = 2m, puis une dernière équivalence encore plus simple, en retirant 1 m de chaque coffre, pour arriver à l'équivalence : 2p = 1m.

De la même manière, tirer de l'équivalence entre les contenus du premier et du troisième coffre : 4p+1m=1m+1g (g désigne la valeur d'un grand lingot) l'équivalence plus simple : 4p = 1g.

On peut donc par substitution, entre les relations 2p = 1m et 4p = 1g, obtenir la relation 1g = 2m.

- À l'aide des relations précédentes, voir que les contenus de chacun des coffres peuvent s'exprimer, après substitution, avec une seule sorte de lingots ; par exemple des petits lingots :

le contenu du premier coffre est de : 4p+1m = 4p+2p = 6p ;

le contenu du deuxième coffre est de : 2p+2m = 2p+2x2p = 2p+4p = 6p ;

le contenu du troisième coffre est de : 1m+1g = 2p+4p = 6p.

Ceci permet de passer à la « mesure » de chaque lingot en pièces d'or. Comprendre que 6 petits lingots valent 30 pièces d'or et donc qu'un petit lingot vaut 5 pièces d'or (30 : 6 = 5) ; trouver la valeur d'un lingot moyen (10 = 2 x 5) et d'un grand lingot (20 = 4 x 5) : m = 10 pièces d'or et g = 20 pièces d'or.

Ou : procéder par essais, au hasard ou organisés. Par exemple, à partir du contenu du troisième coffre, postuler que m = 12 et g = 18, ce qui conduira à une contradiction en vérifiant ces valeurs de m et g pour les contenus des deux autres coffres.

Puis, ce qui peut paraître naturel, essayer les valeurs m = 10 et g = 20, qui permet de trouver p = 5 par observation du contenu du deuxième coffre et enfin de vérifier ces valeurs pour le contenu du premier coffre.

Ou : travailler avec des représentations graphiques des lingots et des équivalences, plus faciles pour appliquer les règles d'équivalence (par exemple sous forme de balance à équilibrer). »

III – 3 Exemple 3

Voici un problème dont il a fallu modifier le contexte pour « ne pas noyer le poisson ».

La pêche a la ligne (Cat. 3, 4) (version I)
Mario se rend à la fête avec son petit frère Gino, où une pêche à la ligne spéciale est organisée.
On pêche des poissons en plastique qui portent chacun un numéro. Ils sont dans un grand bocal rempli d'eau.
Il y a exactement 9 poissons, ils portent les numéros : 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9
Pour gagner un lot, il faut pêcher un ou plusieurs poissons, de façon que le total des numéros inscrits sur les poissons pêchés soit exactement égal à l'âge de celui qui pêche.
Quand on joue, on ne remet pas dans l'eau le poisson que l'on vient de pêcher.
Gino a 9 ans. Il gagne en pêchant les poissons 2 , 6 , 1. Il aurait aussi pu gagner en pêchant par exemple les poissons 4 , 5.
Mario a 15 ans.

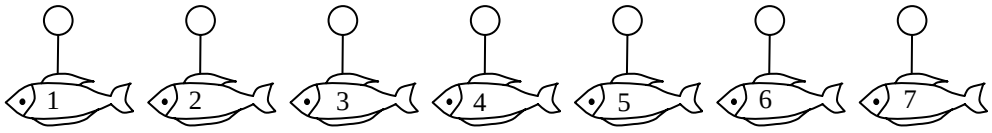
Indiquer toutes les façons possibles de gagner pour Mario.

Expliquez comment vous avez trouvé.

La première version a paru un peu difficile au groupe de travail qui l'a examinée qui a alors décidé d'ajouter un dessin, de réduire les valeurs de 9 à 7 et de l5 à 11, et clarifier le texte.

La pêche a la ligne (Cat. 3, 4) (version II)

À une fête d'anniversaire, un des jeux organisés est une « Pêche à la ligne » spéciale. Dans une bassine pleine d'eau, flottent 7 poissons en plastique avec un anneau sur le dos, comme ceux dessinés ci-dessous :



Sous le ventre de chaque poisson est inscrit un nombre de 1 à 7 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Chaque enfant peut pêcher deux ou plusieurs poissons, sans les remettre dans la bassine. Il gagne si la somme des nombres inscrits sous les poissons pêchés est égale à son âge.
Jean a 9 ans et a gagné un prix en pêchant les poissons avec les nombres 2, 6 et 1. S'il avait pêché les poissons avec les nombres 3 et 7, il n'aurait rien gagné.
Mario a 11 ans.
Expliquez toutes les possibilités qui permettent à Mario de gagner un prix à la "pêche à la ligne". Expliquez comment vous avez trouvé.

Lors d'une consultation plus large, de nombreux lecteurs ont souligné les ambiguïtés dues au contexte :
La « pêche à la ligne » est un jeu où le numéro des poissons est caché (où la pêche se fait à l'aveugle ou encore au hasard). Les numéros « sous le ventre » ne sont donc pas visibles pour le pêcheur qui pêche de dessus et le dessin de face ne permet pas de ne pas de les voir.
Il faut imaginer que le jeu se joue ainsi : le joueur tire un poisson et vérifie que son numéro (nombre) n'atteint pas son âge. Il tire alors un deuxième poisson et calcule la somme des deux nombres. Si elle est égale à son âge, il a gagné, on arrête et l'on remet les poissons dans la bassine. Si elle est supérieure à son âge, il a perdu et l'on remet aussi les poissons dans la bassine. Si elle est inférieure à son âge, il tire un troisième poisson et l'on fait la somme des trois nombres. Et ainsi de suite.
L'énoncé parle de deux poissons ou plus, ce qui signifie qu'un joueur de moins 8 ans serait désavantagé en cas de tirage de 7 au premier poisson.
La question demande « quelles sont les possibilités … » C'est une nouvelle ambiguïté, révélatrice. L'analyse de la tâche laisse penser qu'une possibilité comme 7 + 3 + 1 est la même que 1 + 3 + 7. Or, la situation est fondamentalement différente dans le déroulement du jeu. Si le joueur (de 11 ans) tire 7 au premier coup, il risque de perdre au 2^{e} en tirant 5 ou 6, tandis que s'il tire 1 au premier coup et même 3 au deuxième coup, il sait qu'il peut encore jouer son 3^{e} coup sans aucune crainte). Donc les permutations des termes correspondent à des situations de jeu différentes. On se retrouvera devant de nombreuses répétitions justifiées mais comptées comme des erreurs.
Le malaise est donc certain : on demande à l'élève de s'approprier un « jeu » (non équitable) mais en fait on ne s'intéressera qu'à l'aspect mathématique de la réponse : l'inventaire des décompositions de 11 en somme de termes différents choisis parmi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, sans tenir compte des permutations.
Il a fallu alors trouver un contexte plus clair, qui n'occulte pas les savoirs mathématiques.

Les pots (Cat. 3, 4, 5)

Devant l'arrosoir, qui contient exactement 11 litres d'eau, il y a sept pots vides : de 1 litre, 2 litres, 3 litres, 4 litres, 5 litres, 6 litres et 7 litres.

Mario doit choisir quelques pots dans lesquels il versera toute l'eau de son arrosoir.
Les pots choisis devront être entièrement pleins, mais il ne faut pas qu'ils débordent !

Quels pots Mario peut-il choisir ?

Par exemple, si Mario choisit les pots 3, 4 et 6, il n'aura pas assez d'eau pour les remplir tous.
S'il choisit les pots 6 et 2, il n'arrivera pas à vider entièrement son arrosoir.
S'il choisit les pots 3, 6 et 2, c'est possible, il pourra vider l'arrosoir et remplir entièrement les pots.

Mais il y a encore d'autres possibilités.

Indiquez-les toutes et expliquez comment vous les avez trouvées.

Le thème de l'arrosoir paraissait éviter ces écueils : il n'y a plus de « jeu » ni de joueurs, ni de poissons à remettre seulement en fin de partie ou entre les parties hypothétiques, il n'y a plus d'aléatoire (c'est peut-être une perte mais, de toute manière, comme on n'en tire pas profit …), les solutions peuvent se trouver sans savoir ce qu'est la « somme » et sans écritures mathématiques. Le fond du problème mathématique subsiste, c'est-à-dire l'inventaire, qui demande une organisation de type combinatoire.

IV – L'EXPLOITATION DES RÉSULTATS POUR LA FORMATION DES MAÎTRES

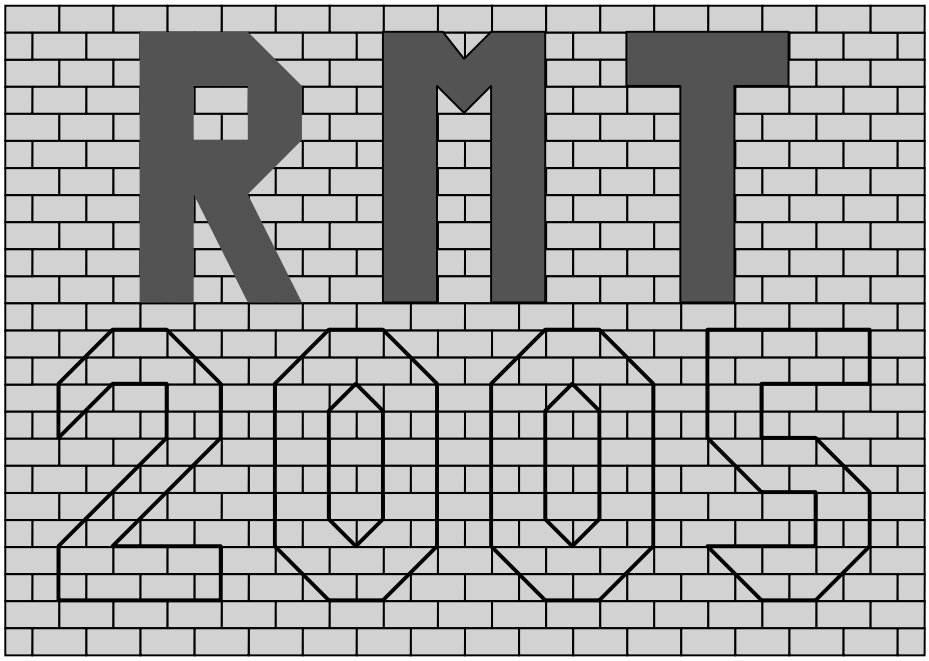
L'examen des copies des problèmes du RMT confirme parfois les prévisions de l'analyse de la tâche et apporte alors des compléments d'information sur la manière dont les élèves procèdent pour arriver aux solutions.
Dans d'autres cas, cette analyse a posteriori apporte des surprises : obstacles inattendus, représentations dominantes non adéquates, procédures détournées permettant d'obtenir la solution par des voies non prévues.
Dans un cas comme dans l'autre, ces résultats peuvent conduire directement à des exploitations ou à des investigations complémentaires par la reprise des problèmes pour la classe entière, à la création de nouveaux problèmes par le jeu des variables didactiques ou de contexte.

IV – 1 Exemple 4

Ce problème est révélateur du niveau de construction du concept d'unité pour la comparaison d'aires.

RMT 2005 (Cat. 3, 4)

Sur le mur de l'école, on a peint l'intérieur des lettres R, M et T pour la prochaine finale du Rallye Mathématique Transalpin. Il reste encore à peindre l'intérieur des quatre chiffres de 2005.
Sophie va peindre, le « 2 » et le premier « 0 ». Marc peindra l'autre « 0 » et le « 5 ».



Qui utilisera le plus de peinture ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

L'analyse a priori du problème montre qu'il a été conçu dans un but didactique avec l'intention évidente de faire apparaître la mesure, à un niveau scolaire où ces notions sont en phase d'approche, sans encore aucun formalisme ni règle institutionnalisées. En voici quelques extraits :
« …
Les élèves doivent se rendre compte que la quantité de peinture dépend de la grandeur des surfaces à recouvrir et qu'il faut trouver un moyen de les comparer : par recouvrement et découpages, par pavage avec une ou plusieurs formes et, en cas d'adoption d'un pavé unité, par comptage.
Parmi les unités les plus naturelles pour ce contexte, il y a la « brique » (rectangle) et la « demi-brique » (carré), mais, dans un cas comme dans l'autre, il faudra tenir compte des triangles (demi-carré) et des trapèzes (3/4 de brique ou 1 carré et demi) qu'il faudra convertir en briques ou en carrés.
L'unité choisie, les règles d'échanges bien assimilées, il faut encore organiser le comptage de manière rigoureuse car les différentes formes qui apparaissent sont nombreuses et disposées différemment dans le « 2 » et le « 5 » qui restent à peindre.

Au passage, on peut remarquer qu'il est inutile de calculer l'aire des « 0 » et qu'on peut ainsi s'éviter bien des comptages et des sources d'erreur. Cette simplification fait cependant appel à une règle d'équivalence, qui ne peut être qu'intuitive pour des élèves de 8 à 10 ans.
Il ne reste plus alors qu'à conclure : expliquer que c'est Marc qui utilisera le plus de peinture, en disant, par exemple, que le « 2 » correspond à 17 briques alors que le « 5 » correspond à 18 briques.
… »

Une analyse globale des résultats montre que le problème est « difficile ». Sur plus de 300 classes, de toutes les sections, les moyennes se situent entre 0,5 et 1,5 en catégorie 3 (CE2) et entre 0,9 et 1,7 en catégorie 4 (CM1). (4 points sont attribués aux réponses justes et bien expliquées, 3 points aux réponses justes avec explications lacunaires ou confuses, 2 points aux réponses avec quelques erreurs, 1 point à la réponse « Marc » sans aucune explication ou avec une démarche erronée, 0 point, incompréhension ou démarche entièrement fausse

Un examen des procédures de résolution sur de 68 copies de Suisse romande : 25 de catégorie 3 et 43 de catégorie 4) fait apparaître quatre grandes catégories :

IV – 1.1 Dénombrement des briques

C'est la procédure « experte » par mesure d'aire, selon une même unité, la « brique » rectangulaire. 31 copies (46%) avec, souvent une explicitation des transformations d'unité comme dans le cas suivant :

> *C'est Sophie qui doit peindre le plus, on a conté les carreaux en calculant, Sophie va en peindre 36 et Marc 32,5.*

Sophie	*Marc*
10 + 9 = 19	*10 + 10 = 20*
4 + 10 = 14 : 2 = 7	*10 + 6 = 16 : 2 = 8*
5 + 9 = 14 et le 3/4 est 6.8	*4 + 6 = 10 et le 3/4 est 2.5*
9 + 4 = 13 : 3 = 3.20	*4 + 2 = 6 : 3 = 2*
19 + 7 + 6.8 + 3.2 = 36	*20 + 8 + 2.5 + 2 = 32.5*

(Les comptages des formes sont exacts, on remarque au passage la division par 3 pour les triangles, une transformation « 3/4 » pour les trapèzes avec, vraisemblablement, l'usage de la calculatrice et l'apparition de nombres décimaux sur son affichage, que ces élèves n'ont encore pas étudiés en classe.)

IV – 1.2 Dénombrement des formes (ou parties) à l'intérieur des lettres

Dans cette procédure, les nombres de rectangles, de carrés, de triangles et de trapèzes sont additionnés, sans tenir compte de la grandeur de ces figures ; c'est-à-dire sans la définition d'une unité commune. C'est alors Sophie qui peint le plus de « pièces ».
24 copies (35 %).

Du genre :

Sophie peindra le plus avec le plus de peinture.
On a compté les briques du 2, 0 et du 0, 5. Alors le 2, 0 (59) sont les plus grands et le 0 , 5 (56) sont les plus petit.

IV – 1.3 Comparaison par superposition/décomposition ou par recouvrement pas à pas

Dans cette procédure, on ne s'intéresse pas à l'aspect numérique de la mesure. Il n'y a pas de nombre de parties ou d'unités
7 copies (10 %).

- dont 4 parlent de superposition du « 2 » et du « 5 » du genre :
  Marc peindra plus que Sophie. On l'a retourné et on a vu que le cinq avait plus de briques. (cat. 4)
  ou, de manière un peu ambiguë, vu l'erreur :
  Nous avons décalé le deux et nous avons découpé le tour du deux puis on l'a plié sur le cinq et nous avons dû encore les découpé et nous avons vu que le deux a besoin de plus de peinture que le cinq. Nous avons vu que les zéros sont identiques. Ce sera Sophie qui utilisera le plus de peinture. (cat. 4)
- dont 3 montrent que les élèves ont marqué ou colorié simultanément le « 2 » et le « 5 » pièce par pièce.
  Par exemple, une copie (cat. 3) présente un coloriage avec des couleurs (une dizaine) identiques pour les différentes pièces des deux zéros et une progression du coloriage à partir du haut dans le « 5 » et le « 2 » : les 3 rectangles de la première ligne du « 5 » en vert, orange et jaune, comme ceux des deux premières lignes du « 2 », puis les 2 carrés de la deuxième ligne du cinq en bleu comme les 4 triangles des deux premières lignes du « 2 », puis les deux rectangles de la deuxième ligne du « 5 » en violet et brun comme le rectangle de la troisième ligne du « 2 » et le trapèze et le triangle de l'extrémité supérieure droite du « 2 », *etc*. À la fin, il reste deux parties triangulaires signalées par « *vides* » et correspondant à une brique dans le bas du « 5 » avec l'indication « *si on les colorie ou utilisera plus de peinture* » et la conclusion « *Le 05 utilise plus de peinture.* »

IV – 1.4 Prise en compte des périmètres des lettres pour déterminer la quantité de peinture.

6 copies (9 %)

- dont 5 mesurées en cm, qui aboutissent à de longues additions de nombres décimaux et des sommes proches de 17 cm.
- dont 1 compte les segments du périmètre :
  On n'a contez les très du 5 et du 2 est on n'a vu que le 5 avez plus de très. Comme le deux 0 sons les mêmes on ne les a pas compté et alors le 5 qui a 15 très. Et le 2 a 14 très.
  C'est Marc qui peint le plus ! (cat. 3)

Potentialités du problème pour la formation

« RMT 2005 » s'est révélé difficile en catégorie 3 comme en catégorie 4 (avec des moyennes des points attribuée respectivement de 1,24 et 1,6).

On pourrait le regretter ou craindre un effet de découragement chez les élèves.

On peut au contraire se réjouir de la « consistance » du problème et, vu qu'aucune copie n'est blanche, des efforts entrepris par les groupes qui se sont engagés dans la solution.

Dans les manuels scolaires, la tendance actuelle est de simplifier la tâche des élèves, d'écarter les obstacles éventuels, de faciliter les comptages en agrandissant les figures et en diminuant leur nombre. De là à dire qu'on « cherche à ce qu'il n'y ait plus de problème », il n'y a qu'un petit pas.

On est ici dans une problématique de « dévolution ». Quelle partie de la tâche va-t-on laisser au groupe d'élèves, quelle partie va-t-on confier à l'énoncé du problème.

Dans « RMT 2005 », on laisse beaucoup de tâches aux élèves et aux maîtres qui voudraient exploiter ce problème pour la classe, en lieu et place d'activités bien progressives qui vont guider l'élève vers des automatismes non intégrés. La notion « d'invariance de l'unité » dans la construction d'une procédure de mesure est une découverte essentielle, qui ne deviendra consciente que par la confrontation de cas où elle est prise en compte avec des cas où elle est oubliée.

Au vu des 68 copies analysées, on peut être presque certain que les principales stratégies relevées doivent apparaître au moins une fois dans une classe. Ceux qui n'ont pas encore reconnu l'importance d'une unité constante pourront se confronter avec ceux qui l'utilisent, peut-être inconsciemment, avec ceux qui n'ont pas encore de méthode rigoureuse de comptage, avec ceux pour qui les règles d'échanges entre rectangles, carrés, triangles et trapèzes sont encore vacillantes.

Il y a de la place, dans ce contexte, pour des argumentations, des validations entre élèves, puis des développements et des variantes (il y a d'autres lettres ou d'autres chiffres à peindre sur le mur) pour aller jusqu'aux institutionnalisations de la part du maître.

À condition, bien sûr, qu'on ne fasse pas « RMT 2005 » *en plus* des autres activités du programme sur les mesures d'aire, mais *à la place*.

IV – 2 Exemple 2 (« Les trois coffres »)

Ce problème jugé « difficile » en catégories 5 et 6 par certains et proposé pour les catégories 3 à 5 par d'autres obtient des moyennes situées entre 2 et 3 points selon les sections, c'est-à-dire une bonne « réussite » comparativement aux autres problèmes du RMT. De quoi dire, aux uns que leur pessimisme n'était pas de mise et aux autres qu'ils avaient raison de le soumettre à des élèves plus jeunes.

La formule « concours » exige un classement des participants. Le RMT n'échappe pas à cette règle et doit donc établir des critères d'attribution des points. Cette nécessité de type « normatif » n'a a priori pas d'intérêt didactique, elle a cependant l'avantage de contraindre les auteurs des problèmes à une réflexion sur l'évaluation des résultats.

On se retrouve ainsi au niveau de préoccupations permanentes de l'enseignant et du formateur : comment apprécier une copie si, comme l'a choisi le RMT, on veut aller au-delà de la dichotomie juste-faux.

Les critères d'attribution des points découlent directement de l'analyse a priori de la tâche, mais ils présentent aussi une dimension qualitative correspondant aux choix pédagogiques et didactiques affirmés dans les buts de la confrontation. Parmi les tâches les plus délicates lors de cette évaluation des copies, il y a la distinction entre une

justification de la solution et une simple vérification, l'appréciation de la cohérence d'un raisonnement logique, la reconnaissance d'une démarche hypothético-déductive, la recherche d'indices sur les représentations que les élèves se font d'une connaissance, l'estimation du niveau des connaissances en jeu.
À titre d'exemple, voici les critères d'attribution des points du problème *Les trois coffres* présenté précédemment, tels qu'ils ont été établis a priori. Comme l'analyse de la tâche de cette activité, ils se révéleront encore bien lacunaires lors de l'examen des copies.

4 Réponse correcte (5 pièces d'or pour la valeur d'un petit lingot, 10 pièces d'or pour la valeur d'un moyen et 20 pièces d'or pour la valeur d'un grand) avec explications (usage d'équivalences graphiques et/ou numériques ou emploi d'une stratégie d'essais/erreurs, …) ;

3 Réponse correcte, mais sans démonstrations ou explications claires des manipulations opérées sur les équivalences ;

2 Deux au moins des rapports ou équivalences entre les valeurs des lingots sont énoncés correctement, (1g = 2m, 1g = 4p, 1m = 2p), mais une erreur s'est produite lors de la conversion en pièces d'or ;

1 Essais de valeurs attribuées aux lingots, qui n'aboutissent pas, ou un seul rapport trouvé entre les valeurs en pièces d'or des lingots (1g = 4p) ou (1m = 2p) ;

0 Incompréhension du problème.

Pour trancher, il faut une analyse plus détaillée de ces résultats et savoir comment les élèves s'y sont pris.
Voici les procédures relevées dans les 37 copies d'une section (Cagliari) :

IV – 2.1 La division par 6 comme premier argument (6/37)

Les justifications les plus nombreuses commencent par une référence explicite à une division de 30 par 6 permettant de trouver la valeur du petit lingot.
Mais on ne peut pas savoir, d'après les explications, comment le diviseur 6 a été « découvert ». S'agit-il des 6 lingots des deux premiers coffres, ou y a-t-il eu simplifications de l'équivalence des deux premiers coffres, 4p + m = 2p + 2m pour arriver à l'équivalence 2p = m, puis substitution de m = 2p dans la premier coffre pour aboutir à la valeur 6p ?

Ex. A1 : *30 : 6 = 5 valore lingotto piccolo (valeur du petit lingot)*
5 + 5 = 10 valore lingotto medio (valeur du lingot moyen)
10 + 10 = 20 valore lingotto grande (valeur du grand lingot)
avec représentations des lingots de chaque coffre, respectivement par un, deux et trois carrés du quadrillage, accompagnées d'un tableau récapitulatif *VALORI GRAFICI* ou les valeurs attribuées aux dessins sont repectivement1, 2 et 4. (cat. 6)

Ex. A2 : … *(Nous avons obtenu les lingots en divisant 30 et avons trouvé la valeur d'un petit lingot, c'est-à-dire 5. Comme 5 x 4 font 20 il reste 10 pour le moyen et naturellement 20 sera le grand lingot)* (cat. 5)

Dans certains cas, la division par 6 est accompagnée d'une division par 3 pour trouver la valeur du lingot moyen.

Ex. A3 : *(Nous avons divisé 30 qui sont les pièces d'or par 6 et avons obtenu 5 qui devrait être la valeur d'un petit lingot … puis nous avons toujours divisé 30 par 3et avons obtenu 10 qui devrait être la valeur d'un lingot moyen)* …(cat 5)

Si le dividende est toujours 30, le diviseur de la seconde division peut être 4 au lieu de 3, ce qui laisse des doutes sur l'origine de ce diviseur : nombre de lingots moyens au total dans les trois coffres ou valeur d'un coffre en lingots moyens ?

Ex. A4 : *(En divisant 30 par 6, le nombre des petits lingots on trouve combien vaut un petit) in pezzi d'oro. Dividendo 30 per 4 il n^{o} dei lingotti medi si trova quando vale 1 lingotto medio in pezzi d'oro. Sottraendo 30 per 10 il valore di 1 lingotto medio si trova quanto vale 1 lingotto grande...*
Dans la réponse de cette copie, les valeurs indiquées des lingots sont respectivement de 5, 10 et 20 pièces d'or ; on constate cependant la présence préalable d'une réponse « 7,5 » (recouverte de correcteur blanc) pour le lingot moyen, correspondant effectivement au quotient de 30 par 4. (cat. 5).

Dans deux cas, la division par 6 est représentée graphiquement : le coffre est un rectangle de 2 x 3 carrés, ou les lingots de 5 occupent un carré, ceux de 10 deux carrés, *etc*.

Ex A5 : les 3 rectangles de 2 x 3 et un tableau récapitulatif des 3 lingots avec leurs valeurs respectives : 1 carré = 5, 2 carrés = 10, 4 carrés = 20, avec le commentaire :
…Quindi dividendo il baule in parti facendo credere que siano lingotti,… (Donc en divisant le coffre en parties, comme si c'était des lingots, chaque coffre nous a donné la somme des lingots : 30). (cat. 6).

Dans un seul cas, les élèves partent du troisième coffre et commencent alors par une division par 3, semblant admettre a priori le rapport de 2 entre le grand lingot et le moyen.

Ex A6 : *Abbiamo preso in considerazione il 3^{o} forziere. (le troisième coffre)*
Se facciamo 30 :3 ottienamo 10.
Quindi abbiamo addizionato 10 + 10, cosi otteniamo 20 (valore del lingotto + grande). Ciò che ci resta è il numero 10. (valore del lingotto medio) …. (cat 6).

IV – 2.2 Le lingot moyen vaut le double du petit comme premier argument (7/37)

La clé du problème, pour cette catégorie de procédures, réside dans la découverte du rapport 2 entre les valeurs du lingot moyen et du petit et/ou entre celle du grand et du moyen. À partir de ce rapport, on peut passer à la division par 6 et/ou par 3 explicite - comme dans la catégorie précédente - ou implicite.
Mais l'interrogation reste la même. Comment les élèves ont-ils trouvé ce rapport 2 ?
Une première hypothèse, de « routine » ou de « facilité », est d'imaginer que, si la valeur du le petit lingot est l'unité, celle du moyen est le nombre naturel suivant, 2, et celle du grand est 3 dans une conception « linéaire » de la progression, ou 4 dans une conception «exponentielle ». (Dans les copies observées, lorsque les lingots sont représentés par des carrés alignés on trouve autant de triplets de valeurs « 1 ; 2 ; 3 » que de « 1 ; 2 ; 4 »). Dans un cas comme dans l'autre, le rapport décisif pour le calcul, entre les valeurs des lingots moyen et petit est le même : 2.
La deuxième hypothèse exigerait la simplification de l'équivalence 4p + m = 2p + 2m conduisant à la relation 2p = m. Comme cette opération complexe n'est jamais

mentionnée intégralement dans cette catégorie de procédures, comme dans toutes les autres d'ailleurs, on peut donc raisonnablement opter pour la première hypothèse.

Ex. B1 : … *(J'ai pensé que le moyen valait le double du petit …) e il grande il doppio del medio, ho diviso i 30 pezzi d'oro x 6, ho moltiplicato il risultato trovando quelli medii e ho moltiplicato ancora x 2, trovando quelli grandi.*
avec représentations des lingots de chaque coffre, respectivement par un, deux et quatre carrés du quadrillage, (cat. 6)

Ex. B2 : … *(Nous avons déduit ces réponses parce que, selon nous, deux petits valent un moyen …)*
Avec réponses justes et dessins de trois coffres contenant les lingots représentés par des boules de tailles différentes. (cat 6)

Ex. B3 : *(Nous l'avons découvert en remarquant que le petit est la moitié du moyen …)*
Avec réponses justes et dessins de trois lingots représentés par des rectangles de 2, 4 et 6 carrés. (cat 6).

Les deux copies suivantes sont les seules où les équivalences et les substitutions apparaissent clairement, sans toutefois préciser comment le rapport 2 est obtenu.

Ex. B4 : *(En comparant le premier coffre et le deuxième, nous avons vu que le moyen est le double du petit … ainsi nous avons vu qu'il suffisait de diviser 30 par 6 pour obtenir le nombre du petit, qui est 5 …)*
avec représentation littérale des coffres : *PPPPM PPMM MG* où les équivalences sont marquées par des doubles flèches entre lingots isolés et groupes de deux, avec, en annexe, les écriture $P + P = M$ et $M + M = G$ (cat 5).

Ex. B5 : *4 lingotti piccoli = 2 medi o i grande (4 petits = 2 moyens ….)*
1 lingotto medio = 2 piccoli
1 lingotto grande = 2 medi o 4 piccoli
30 pezzi d'oro = 6 lingotti piccoli
30 pezzi d'oro = 3 lingotti medi
30 pezzi d'oro = 1 lingotto grande e uno medio
Quindi 30 : 6 = 5 che sarebbe il valore di un lingotto piccolo
30 : 3 = 10 che sarebbe il valore di un lingotto medio
30 : 1,5 = 20 che sarebbe il valore di un lingotto grande (cat 6)

IV – 2.3 La valeur du petit lingot est 5, a priori ou par essais successifs (12/37)

Dans 7 copies de cette catégorie de procédures très semblables, il n'y a aucune justification de la manière dont la valeur 5 a été attribuée au petit lingot. Toutes les explications décrivent la manière de calculer la valeur des autres lingots ou portent sur les vérifications.

Ex. C1 : *(Nous avons compris que les petits valent 5 pièces, les moyens 10, et les grand 20. En effet, toutes les sommes donnent 30)* (cat. 5)

Parmi les autres copies de cette catégorie, certaines parlent d'essais plus ou moins explicitement :

Ex. C2 : … *(Nous avons essayé de calculer selon les données de l'énoncé …. et avons fait les preuves)*
Avec un dessin des lingots dont les longueurs sont proportionnelles à 1, 2, 3 pour les vérifications (cat. 6)

Ex.C3 : *Abbiamo trovato la soluzione facendo dei tentativi dopo di che abbiamo scoperto che nel primo forziere se avessimo fatto 5 × 4 dava 20 pezzi d'oro. Facendo 10 1 dava 10 e sommando 20 + 10 abbiamo scoperto che il primo forziere conteneva 30 pezzi d'oro. …* (cat. 6).

D'autres mentionnent clairement des décompositions de 30 ou citent les essais effectués :

Ex. C4 : *30 = 10 + 10 + 10 no*
30 = 5 + 5 + 5 + 5 + 10 si
30 = 5 + 5 + 10+ 10 si
30 = 10 + 20 si
Per arrivare a scoprire il valore dei 3 lingotti abbiamo scomposto il n. 30 scoprendo cosi che nel terzo forziere il lingotto grande valeva 20 pezzi d'oro e il lingotto medio valeva 10 pezzi d'oro (20 + 10 = 30)
Facendo cosi abbiamo scoperto il valore del lingotto piccolo. (cat 5).

Ex. C5 : *1p = 2 primo forziere [(2 x 4) + 5] = 13 no*
1m = 5 secondo forziere [(2 x 2) + (5 x 2)] = 14 no
1g = 10 terzo forziere [(5 + 10)] = 15 no

1p = 5 primo forziere [(5 x 4) + 10] = 30 si
1m = 10 secondo forziere [(5 x 2) + (10 x 2)] = 30 si
1g = 20 terzo forziere [(10 + 20)] = 30 si …
suivent les explications détaillées. (cat. 5)

ou encore, avec un peu de chance, confondent le nombre de lingots du premier coffre avec la valeur des petits lingots :

Ex. C5 : 1^o forziere = 4 + 1 = 5 5 x 4 = 20 30 – 20 = 10 20 + 10 = 30
2^o forziere = ….

IV – 2.4 Autres réponses (13/37)

On relève encore 6 autres procédures très brèves et sans explications, du genre :

P = 5, M = 10, G = 15 ; P = 18, M = 36, G = 54 ; P = 4, M = 11,5, G = 15 … sans autres explications

ainsi que 7 copies blanches.

Que faire de ces résultats en formation des maîtres ?
Le plus évident est de faire résoudre les problèmes par les personnes en formation et de leur demander de décrire leur stratégie de résolution.

Il paraît ensuite naturel d'examiner ces procédures d'adultes aux copies des élèves, à la lumière de l'analyse a priori de la tâche. Pratiquement, on peut proposer le problème à des classes de sa région et travailler sur leurs justifications.
On peut aussi se demander pourquoi les moyennes obtenues à ce problème des *Trois coffres*, situées entre 2 points et 3 points, sont si différentes de celles obtenues au problème isomorphe des *Pots de confiture* où elles n'atteignaient pas 1 point en catégorie 6. (Dans le premier cas, le système d'équation est $4p + m = 2p + 2m = m + g = 30$ et conduit au rapport unique $2p = m$ et $2g = m$, dans le second : $4p + 4m + g = 7p + 2g = 7p + 6m = 5$, qui conduit aussi à un rapport unique $3p = m$ et $3m = g$).
Cette dernière suggestion nous conduit directement aux **variables didactiques du problème**.
Par exemple, en modifiant seulement les contenus de deux coffres : 7 petits lingots et 2 moyens dans le premier, 3 petits et 3 moyens dans le deuxième, les procédures consistant à diviser 30 par le nombre total de petits lingots, 11, sont déjà inadéquates.

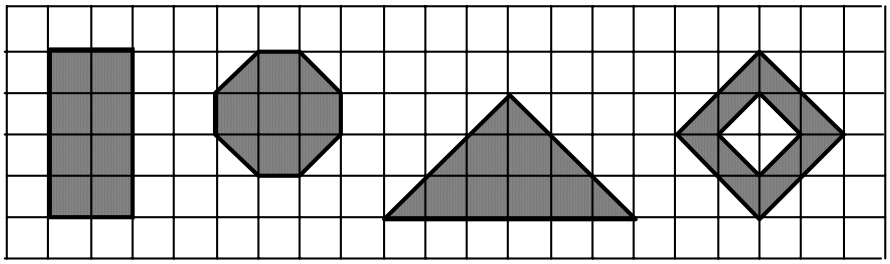
Ce travail sur les variables didactiques fait l'objet de l'exemple suivant :

IV – 3 Exemple 5

Un problème qui conduit à une recherche sur les variables didactiques dans une situation de proportionnalité.

Décoration (Cat. 5, 6, 7)

Un peintre a peint ces quatre figures différentes sur un mur, chacune avec une couche de peinture de la même épaisseur.



Il a utilisé des pots de peinture de même grandeur :

- 18 pots de rouge pour une des figures
- 21 pots de bleu pour une autre figure,
- 27 pots de jaune pour une autre figure
- des pots de noir pour la figure qui reste.

À la fin de son travail, tous les pots étaient vides.

Indiquez la couleur de chaque figure.

Combien de pots de peinture noire a-t-il utilisés ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

Ce problème a été très bien réussi et s'est même révélé « trop facile » en catégorie 7, mais l'examen des copies a laissé des doutes sur la mobilisation de la connaissance mathématique en jeu : la proportionnalité ou la fonction linéaire permettant de passer de la mesure de l'aire des figures au nombre de pots de peinture.
Pour pouvoir s'engager dans une solution, l'élève doit trouver les deux grandeurs en jeu, le nombre des pots de peinture et l'aire des figures proposées et imaginer qu'elles sont liées. Il lui faudra alors passer aux mesures des aires pour obtenir une relation

numérique. Une fois l'unité choisie, il faut déterminer la mesure d'aire de chaque figure, pour pouvoir les classer. En carreaux - unité choisie dans la grande majorité des cas -, le « double carré » a une aire de 6, l'octogone de 7, le rectangle de 8 et le triangle de 9 Ensuite il faut établir la correspondance entre les mesures d'aires des figures et le nombre de pots de peinture. Il y a quatre mesures d'aires et trois nombres connus de pots. Il y a donc plusieurs choix sur la « position » du nombre inconnu de pots, qu'on peut illustrer par le tableau suivant où les mesures d'aires sont à chaque fois classées de la plus petite à la plus grande :

Choix A	6	7	8	9
	?	18	21	27
Choix B	6	7	8	9
	18	?	21	27
Choix C	6	7	8	9
	18	21	?	27
Choix D	6	7	8	9
	18	21	27	?

Comment choisir entre ces quatre choix ? C'est là le nœud du problème et c'est ici qu'intervient la notion de proportionnalité ou de linéarité.
Les élèves peuvent utiliser le « lien fonctionnel », qui est une multiplication par 3, entre les mesures d'aires et les nombres de pots. Les explications proposées par les élèves font souvent penser que ce lien est inconscient.
Ils peuvent aussi se contenter de reproduire les régularités de la première suite sur la deuxième, ce qui apparaît clairement à la lecture de nombreuses copies.

Lien avec la formation
Ces résultats ont été largement analysés et exploités, en marge du RMT, par plusieurs recherches et expérimentations où le problème a été posé à des élèves de degrés 4 et 5 (CM1 et CM2) (Vernex, 2001). Ils font aussi l'objet, actuellement, d'une « initiation à la recherche » pour futurs instituteurs d'un institut de formation des maîtres de Suisse romande[1] dans laquelle trois hypothèses de recherche sont envisagées :

I. Si l'on pose une question faisant appel plus explicitement au lien fonctionnel « multiplier par le nombre de pots par unité d'aire », les élèves qui ont résolu correctement le problème ne seront pas tous capables d'appliquer la procédure fonctionnelle. Ce qui signifierait que la relation découverte sur les quatre couples donnés n'est pas généralisable à d'autres couples correspondants des deux suites. (La vérification se fait par l'introduction d'une question complémentaire, demandant le nombre de pots nécessaire pour une cinquième figure dont l'aire mesure 20 carreaux).

II. En présentant une suite moins « régulière » que 6, 7, 8, 9, la réussite sera plus faible. Ce qui signifie que les élèves ayant donné une réponse correcte dans le cas « simple » l'auront fait sur des indices de régularité qui ne sont pas suffisants pour s'assurer de la proportionnalité. (Les mesures des aires des nouvelle figures sont 4, 6, 7, 10) »)

[1] H.E.P.BeJuNe (Haute École Pédagogique) des cantons de Berne, Jura et Neuchâtel.

III. Si l'on choisit un facteur plus grand (12 à la place de 3), les élèves devront mettre en œuvre d'autres méthodes de reconnaissance des termes correspondants des suites, ce qui rendra le problème beaucoup plus difficile. Ce qui signifie que des élèves auraient pu reconnaître les « multiples de 3 », sans être conscient qu'il y a une opération : la « multiplication par 3 » qui permet de passer d'un nombre au nombre correspondant. (Les nombres donnés de pots deviennent 72, 84 et 108).

Par le jeu sur les variables didactiques, trois versions nouvelles du problème ont donc été élaborées, sur proposition des étudiants, avec un dispositif de recherche permettant de vérifier les hypothèses.

V – CONCLUSION

Les exemples présentés montrent que le RMT offre aux maîtres qui s'y engagent, une formation complémentaire et permanente sur le choix - ou le rejet - de problèmes et l'adaptation de leurs énoncés par un regard plus affiné sur les contenus mathématiques, les contextes et la tâche de l'élève lors de l'analyse a priori. De nombreux formateurs également impliqués dans le RMT ou bien informés sur ses travaux en profitent également dans le cadre de leur enseignement en institut de formation.
Les maîtres qui participent au RMT peuvent reprendre les problèmes avec leurs élèves sous différentes modalités, individuellement ou collectivement, les exploiter ou les intégrer dans la progression de leur classe. L'étude des analyses a priori, la participation à l'évaluation des copies d'élèves lors de l'attribution des points, les données obtenues sur les procédures adoptées par les élèves, sont autant de contributions à une formation professionnelle. Les résultats obtenus, les données recueillies, les réflexions développées lors des analyses a posteriori sont disponibles pour les formateurs. Elles leur offrent encore de nombreuses pistes à explorer dans le cadre de leur enseignement ou de leurs recherches.

Les thèmes des rencontres internationales du RMT, les communications qui y sont présentées et les travaux de groupe qui s'y déroulent montrent à l'évidence qu'il y a des liens étroits entre les problèmes du concours et la formation en didactique des mathématiques :

- Le Rallye mathématique transalpin, quels profits pour la didactique ? (1997 et 1998) ;
- RMT : évolution des connaissances et évaluation des savoirs mathématiques. (1999 et 2000) ;
- RMT : potentialités pour la classe et la formation (2001 et 2002) ;
- RMT et évaluation (2003) ;
- Qu'est-ce qu'un bon problème pour le RMT ? (2004) ;
- Les problèmes du RMT dans la pratique de la classe. (2005).

Cette préoccupation d'aller au-delà de la confrontation entre élèves ou classes, vers un apport pour la didactique des mathématiques est une tendance actuelle de plusieurs concours. Si elle est aussi manifeste au sein du RMT, c'est vraisemblablement dû à la composition de ses équipes d'animateurs, où se retrouvent des « praticiens » de l'enseignement, de la formation et de la recherche. Sans les regards croisés de ces

différents partenaires et sans les récits des élèves sur leurs procédures de résolution, les problèmes ne pourraient acquérir la substance et la consistance nécessaire pour espérer quelques progrès dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

CROCIANI C., DORETTI L., SALOMONE L. (1999) *Un problème et son analyse didactique : Les pots de confiture* in Le Rallye mathématique transalpin, quels profits pour la didactique, in Actes des rencontres de Brigue 1997/1998. Ed. responsables L. Grugnetti et F. Jaquet. Università di Parma, IRDP Neuchâtel,115-128.

GRUGNETTI L., JAQUET F, CROCIANI C., DORETTI L., SALOMONE (Eds.) (2001) *RMT : Évolution des connaissances et évaluation des savoirs mathématiques,* Atti delle giornate di studio sul Rally matematico transalpino, Siena 1999 - Neuchâtel 2000, Università di Siena, IRDP di Neuchâtel.

GRUGNETTI L., JAQUET F., MEDICI D., POLO M., RINALDI M.G. (Eds.) (2003) *RMT : Potentialités pour la classe et la formation.* Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin, Università di Parma, Dipartimenti di Matematica di Parma e Cagliari & ARMT.

VERNEX M. (2001) *Analyse et utilisation en classe du problème « Décoration »* du 9e RMT. Math-École, **198**, 4-18.