

ACTIVITÉS DE CLASSIFICATION ET CONSTRUCTION DE DÉFINITIONS À L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

Cécile OUVRIER-BUFFET
ATER, IUFM de Grenoble
Laboratoire Leibniz
cecile.ob@wanadoo.fr

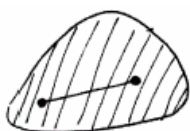
Résumé

Les programmes de l'école élémentaire insistent, en géométrie, sur les activités de comparaison, reproduction, description, construction, et représentation : aucune mention n'est actuellement faite des activités de classification, alors que celles-ci amènent les élèves à dégager ou à préciser des critères de classement, ces critères pouvant ainsi être associés aux propriétés mathématiques caractérisant les objets d'une même classe. Le but est ici de nous interroger sur les connaissances et compétences en jeu dans les situations de classification, l'objectif étant de les faire vivre en classe. Pour cela, nous proposons dans cette communication une nouvelle lecture des activités de classification : celle de la construction de définitions.

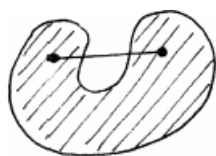
Une étude épistémologique de processus de construction de définitions nous permet en particulier de faire une analyse des situations en terme de dialectique entre construction de définitions et formation de concepts, mais aussi de caractériser la gestion par l'enseignant de ces mêmes situations.

Mots-clés : Classification - construction de définitions - convexe.

Marcel Berger parlant de « choses convexes » lors de la conférence inaugurale de "MATH.en.JEANS" au Palais de la Découverte (1992) :



« Un convexe, c'est quelqu'un qui est tel que, chaque fois qu'on prend deux points dedans tout le segment qui les joint est dedans. »



Vous avez là quelque chose qui n'est pas convexe. Si vous aimez les fractals alors il faut quitter la salle parce que le convexe c'est typiquement un non-fractal. La convexité c'est une sorte de garantie, d'assurance, de contrôle : elle garantit que vous n'avez pas de trou, pas de creux, pas de gondolement. »

La présentation du concept de 'convexité' est ici remarquable : la donnée d'un exemple et d'un contre-exemple vient illustrer la définition mathématique, cette dernière étant augmentée d'une description 'morphologique' de ce qu'est une figure convexe. Il convient de noter ici que l'appréhension du concept 'convexe' est rendue possible par quatre voies complémentaires que nous qualifierons de nécessaires : une définition en langage mathématique, l'illustration par un exemple ET un contre-exemple de la délimitation entre figures convexes et figures non-convexes (ce qui nous ramène à l'origine étymologique du mot même 'définition', à savoir 'délimitation'), une

représentation géométrique du propos, une définition en langage naturel. Il resterait à caractériser un ensemble de situations rendant le concept de 'convexe' pertinent pour que la compréhension de ce concept soit achevée.

Cet exemple nous permet de souligner combien l'activité de classification est liée à celle de définition. En effet, établir deux classes revient à délimiter un concept par ce qu'il est et ce qu'il n'est pas. Nous proposons dans cette communication de considérer une situation de classification autour du difficile concept de convexité et de l'analyser sous l'angle de la construction de définitions. Nous rapporterons dans un second temps les résultats d'une telle expérimentation réalisée en classe de cycle 3.

I – CLASSIFICATION ET CONSTRUCTION DE DÉFINITIONS

I – 1 Articulation entre classification et définitions

Rappelons qu'il existe deux pièges de la définition (d'après Kahane, 1999) : celui de croire facile à acquérir ce qui est simple à énoncer et celui consistant à trop se fier aux définitions car celles-ci résultent d'un choix, et ne laissent ainsi à voir qu'un aspect du concept. Ainsi en va d'une définition donnée à un élève, lors d'une présentation de nature axiomatique. Une voie de recherche est ouverte par la considération de la construction de définitions comme un balisage de la formation de concept chez l'apprenant. Nous avons souligné en introduction un lien entre l'activité de classification et celle de définition. Ajoutons à cela l'importance dans la classification des aspects de généralisation et de dénomination : « Classification et généralisation doivent être jointes. Utiliser un nom pour une espèce, c'est vouloir faire des généralisations et former des anticipations concernant des individus de cette espèce. Aussi bien, utiliser un nom commun pour classer, c'est en l'utilisant vouloir le projeter » (Hacking, 1993).

L'importance du travail sur les propriétés d'objets géométriques lors d'activités de classification a été notée par Freudenthal (1973) et Fletcher (1970). Nous allons reprendre ce fil en considérant une activité de classification et en l'étudiant au travers de la construction de définitions, précisant ainsi un mode de gestion particulier de situations de classification. Pour cela, revenons tout d'abord sur les conceptions communes sur la définition en mathématiques.

I – 2 Conceptions courantes sur la définition

Nous nous appuyons ici sur des travaux français et anglo-saxons réalisés auprès d'enseignants du primaire et du secondaire (Borasi 1992, Ouvrier-Bufferet 2003, Shir 2005). Ils nous permettent en effet d'être au fait de ce que les enseignants peuvent avoir comme conception sur la 'définition' en mathématiques et ainsi d'anticiper les modes de gestion qu'ils peuvent mettre en œuvre dans des situations de construction de définitions.

De ses travaux, il se dégage que :

- une définition doit être minimale, non redondante (ceci est conforme avec le classique aspect logicien des théories mathématiques bien 'formées' et conduit à

donner dans une définition une caractérisation nécessaire et suffisante du concept en jeu). Cela va de pair avec la conception qu'une définition doit être opératoire et doit avoir une place dans les démonstrations ;

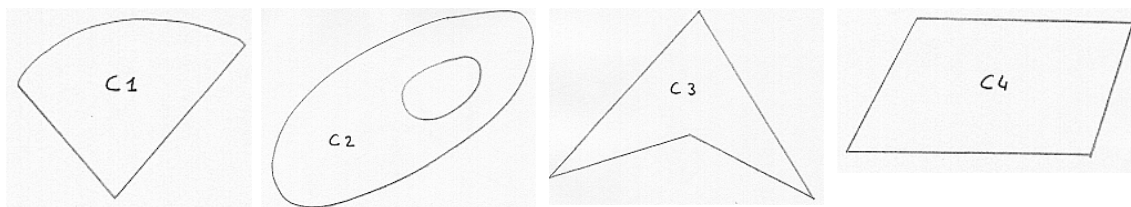
- une définition, c'est la donnée d'un nom : remarquons que l'aspect 'dénomination' est très présent chez les enseignants, alors que notre étude de la formation de concepts selon la construction de définitions pourrait nous faire minorer en quelque sorte l'acte de donner un nom, la caractérisation passant au premier plan (nous reviendrons sur ce point ci-après) ;
- une définition doit livrer l'existence (et même l'essence ...) d'un concept mathématique, ceci conformément à une vision platonicienne selon laquelle un concept pré-existe à sa définition ;
- divers critères de nature langagière viennent s'ajouter aux conceptions précédemment citées à savoir : une définition doit être précise, simple, courte, élégante, familière, et même universelle ;
- enfin, la spécificité des conceptions des enseignants à l'égard du concept de définition est clairement liée à l'apprentissage lorsqu'ils soulignent qu'une définition doit être basée sur des connaissances antérieures et doit permettre à l'apprenant de se constituer sa propre image mentale du concept mathématique défini.

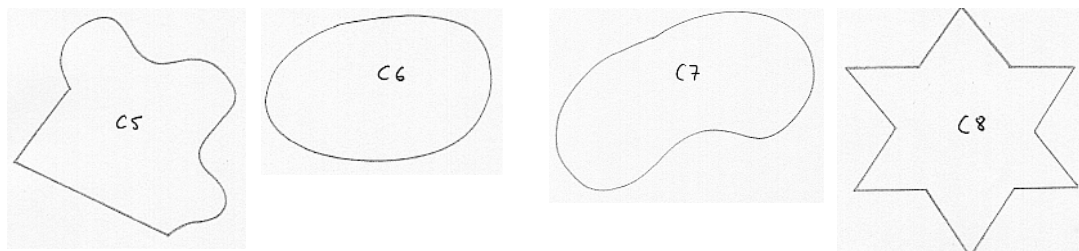
Nous reprenons ci-après, dans l'analyse a priori de la situation expérimentée, les termes d'une étude épistémologique (cf. Ouvrier-Buffet, 2003&2004) afin d'en dégager des outils permettant le balisage de processus définissants, ainsi que la gestion de situations de construction de définitions.

II – UNE SITUATION SUR LA CONVEXITÉ

II – 1 Présentation de la situation

Le matériel à disposition des élèves (cycle 3) est constitué d'objets physiques découpés dans du carton permettant la manipulation et une feuille où les figures sont dessinées (voir figures ci-dessous).





La tâche est énoncée de la façon suivante : « faire deux classes ».

Méthodologie : cinq groupes constitués de trois ou quatre élèves de cycle 3 chacun participent à l'activité. Au niveau du déroulement, un *Gestionnaire-Observateur* (noté GO) est présent et a pour projet de conduire la séance vers la construction de définitions de « convexe », à partir des classes produites par les élèves. Il s'agit donc pour le GO d'utiliser notamment un levier de demande explicite de définition.

II – 2 Analyse a priori

Le concept en jeu est celui de convexe. D'après Fletcher (1970, p. 267s), différentes définitions sont envisageables :

- définition 1 : une figure est convexe si et seulement si, étant donnés deux points P et Q de la figure, tous les points du segment PQ appartiennent à la figure ;
- définition 2 : une figure est convexe si et seulement si toute droite passant par un point quelconque intérieur à la figure, coupe la frontière exactement en deux points ;
- définition 3 : une figure est convexe si et seulement par chaque point de sa frontière il passe au moins une ligne de support. Notons qu'une définition semblable à celle-ci, mais de nature « dynamique » pourrait émerger ; en langage « naturel », il s'agirait de : en parcourant la frontière de la figure, toute la figure est toujours du même côté (un sens de parcours étant choisi). De par son aspect, on peut en imaginer une évolution de par des arguments de nature langagière et logique (cf. § I-2 ci-dessus) ;
- définition 4 : une figure est convexe si et seulement à chaque point P extérieur correspond un point et un seul de la figure qui soit le plus proche de P.

Le choix des figures objet de la classification a été réalisé selon les contraintes suivantes :

- nous avons choisi de tracer au moins une figure avec des traits courbes et non courbes afin de ne pas avoir une classification suivant la caractéristique 'traits courbes et traits droits' ;
- nous avons évité les quadrilatères et autres figures géométriques très institutionnalisées (afin de court-circuiter tout recours à des classifications et définitions pré-établies).

II – 3 Gestion de la situation de classification : vers la construction de définitions

Rappelons que, pour nous, il est nécessaire que la gestion se concentre sur le **processus de construction de définitions**, en tant que savoir transversal, et non pas sur le produit « définition » résultant.

Une étude épistémologique du concept de définition (Ouvrier-Buffet, 2003 & 2004) – étude que nous ne relaterons pas ici dans son intégralité – nous a permis de mettre en relief des leviers agissant sur un processus de construction de définitions. Ce processus s’articule en fait autour de quatre pôles qui sont bien sûr dépendants des types de problèmes considérés. Il s’agit de :

- un pôle *construction de théorie* (qui ne nous concerne pas au primaire) ;
- un pôle *résolution de problème* (comprenant un travail spécifique sur les exemples et contre-exemples) ;
- un pôle *logique* ;
- un pôle *langagier*.

Ainsi, le GO peut agir en classe, en utilisant différents « leviers ». Ces leviers peuvent être relatifs à la définition en tant qu’énoncé définissant : il s’agira alors, pour le GO, de formuler, par exemple, des demandes ayant trait à des aspects langagiers, logiques (voire à l’aspect lexical) de l’énoncé définissant. Des leviers relatifs au concept en jeu pourront être également utilisés : le GO pourra demander explicitement de générer des exemples et contre-exemples, ceux-ci donnant l’opportunité à l’élève de revenir sur la définition qu’il est en train de construire. Soulignons que le travail sur les exemples et contre-exemples n’est pas toujours aisé à mettre en œuvre en primaire. Il reste néanmoins premier lors de la construction de définitions. Nous soulignons alors l’importance du travail sur les exemples et contre-exemples, spécifique à toute démarche scientifique, pour tester une définition. Par ailleurs, reprendre un trait pertinent énoncé par les élèves est un mode de gestion didactique classique. Un tel geste apparaît comme majeur lors de la gestion de processus de construction de définitions : il permet en effet d’entretenir le processus de dévolution de la tâche « construction de définitions ». [NB : nous entendons « dévolution » comme un processus présent tout au long de la situation, sans réduire ainsi la dévolution à la donnée du problème et à la production de stratégies de base (Brousseau, 1998 – Margolinas, 1993)]. Si un tel geste est notable, celui de demander de renvoyer les élèves à la consigne (écrire une définition) l’est tout autant.

III – PRODUCTIONS DES ELEVES

III – 1 Classes produites

Notons que les classes décrites ci-après ont été réalisées par les élèves uniquement à partir des figures cartonnées. Nous avons regroupé ces différentes classifications en trois catégories : *morphologiques*, *mathématiques* et *pavage*.

Nous qualifions de *morphologiques* les classifications mettant en œuvre des descriptions ‘physiques’ liées aux formes manipulées. Il s’agit des deux classes suivantes (observées dans la quasi-totalité des groupes observées) :

- arrondis / pas arrondis : dans un groupe, cette classification à amener les élèves à construire verbalement la définition de figure ‘plus arrondie qu’une autre’ par des considérations sur longueur et surface ;
- pointus / pas pointus.

Nous appelons *mathématiques* les classifications faisant preuve de connaissances explicites antérieures de géométrie. Nous en avons dénombré quatre de ce type à savoir : possédant un axe de symétrie / ou non ; polygones / pas polygones ; ayant des diagonales / ou non ; ayant au moins un angle / et les autres.

La catégorie *pavage* correspond en fait aux manipulations des élèves conduisant à l’assemblage de certaines figures entre elle. Les élèves parlent de figures qui “s’accouplent” ou non. A leurs yeux, cette classification leur apparaît comme anecdotique et le vocabulaire qu’ils utilisent alors les fait rire !

III – 2 Cheminement d’un groupe : définitions produites

Nous avons choisi de relater ici le cheminement d’un groupe de trois élèves de CM1-CM2 afin de montrer où peut se situer le processus de construction de définitions en primaire. Nous soulignerons en particulier les conceptions des élèves sur le concept de définition ainsi que la gestion des définitions par le GO.

Le groupe en question a proposé successivement trois classifications :

- les figures possédant un axe de symétrie ou non ;
- celles ayant au moins un angle ;
- ainsi qu’une classification très proche de convexe : « quand on relie les coins, les bords, c’est intérieur ou extérieur ».

La dernière classification a conduit les élèves à élaborer deux classes, deux figures restant cependant non classées (C2 – la pièce trouée – et C5 – la pièce alliant courbes droites et non droites) : « c’est pas bon car il faudrait trois colonnes ».

Les interventions du GO s’organisèrent en trois moments distincts :

- le premier consista en la demande d’obtenir deux classes (répondre ainsi à la consigne), en tranchant pour C2 et C5 ;
- le deuxième fut la donnée du nom de ‘convexe’ : ceci est en accord avec une vision philosophique des définitions (donner un nom avant d’entrer dans la caractérisation, pour savoir ‘de quoi l’on parle’) ;
- le troisième fut, conformément à ce qui était annoncé, la demande d’une définition écrite de convexe.

La réaction des élèves ne s’est pas fait attendre : ils sont allés chercher le dictionnaire, ce qui nous permet de souligner que leur rapport aux définitions mathématiques est de même nature que leur rapport aux définitions lexicales, ce qui n’est pas le cas d’élèves

du secondaire. Il s'avère alors que les leviers langagiers et logiques (cf. § II-3) ne peuvent alors pas être utilisés. De plus, pour les élèves, une seule définition suffit, la demande réitérée du GO d'autres définitions n'a eu de réponse que par effet de contrat didactique. Reste alors à la disposition du GO des leviers de nature mathématique, consistant en la recherche de caractéristiques de la convexité : ces leviers comprennent notamment la demande explicite d'exemples et de contre-exemples. Le GO doit être ainsi particulièrement sensible aux potentialités, en terme de construction de définitions, des propriétés caractéristiques en germe dans le discours des élèves.

Voici les définitions successives écrites par ces élèves : nous les articulons avec les interventions du GO.

Déf-élève 1 : « convexe : figure ayant les points qui se relie à l'intérieur ». "Point" est barré, remplacé par "angles" puis par "angles et arrondis".

GO : quelle est la signification de relier un arrondi ? Précisez arrondi. Le GO demande un exemple et un contre-exemple répondant à la définition 1.

Déf-élève 2 : « figures régulières (ou irrégulières) se reliant à l'intérieur ». "Irrégulières" est ensuite barré.

Le GO demande alors une autre définition ne mobilisant pas l'idée des traits intérieurs. Ce à quoi les élèves répondent très justement : « quand on relie les points, c'est à l'intérieur. On ne voit pas comment on pourrait dire autrement ». Pourtant, notons que dans le discours des élèves, deux autres définitions auraient pu émerger : la définition 2 et la définition 3.

Suite à cette demande du GO, plusieurs définitions semblables furent écrites :

Déf-élève 3 : « figure de n'importe quelle forme, quand on relie les points, ils sont à l'intérieur ».

Déf-élève 4 : « convexe : quand on trace les diagonales, ça reste à l'intérieur de la figure ».

Déf-élève 5 : « convexe : quand on relie un point à un autre, la droite ne sort pas de la figure »

Le GO demande alors de considérer non pas des segments mais des droites (pensant à la potentialité de la définition 2). Le lecteur ne sera pas étonné de lire la réaction des élèves : « mais on sort du thème ! Si on trace une droite sur toutes les figures, elles peuvent toutes être non convexes » ... ce qui bien sûr ne répondra plus à la consigne, à savoir établir deux classes.

CONCLUSION

L'expérimentation de la construction de définitions en primaire n'est absolument pas de même nature que dans le secondaire : en effet, les élèves de cycle 3 n'ont pas encore une 'culture' des définitions mathématiques, ce qui limite les interventions du GO relativement à la dialectique entre formation de concept et construction de définitions.

Cependant, la richesse conceptuelle que proposent les situations définissantes issues de tâches de classification n'est pas à nier. Cet article illustre les possibilités en termes de gestion de telles situations, pointant particulièrement les leviers permettant d'agir sur un processus définissants. De telles expérimentations seraient à conduire de nouveau, afin d'évaluer plus finement leurs impacts en terme d'appréhension de nouveaux concepts à l'école élémentaire.

BIBLIOGRAPHIE

BORASI R. (1992) Learning mathematics through inquiry, Heinemann – Portsmouth, New Hampshire.

BROUSSEAU G. (1998) Théorie des situations didactiques, *La Pensée Sauvage, Grenoble*.

FLETCHER T.J. (1970) L'apprentissage de la mathématique aujourd'hui – Essai d'une didactique nouvelle pour l'enseignement du second degré, 4^{ème} Edition, *OCDL, Paris*.

FREUDENTHAL H. (1973) *Mathematics as an educational task*, Dordrecht, Reidel.

HACKING I. (1993) Le plus pur nominalisme – l'énigme de Goodman, (Trad. R.Pouivet), *Éditions de l'éclat*.

KAHANE J-P. (1999) Quelques aspects des définitions mathématiques, *Bulletin de l'Union des Professeurs de Spéciales*, **189**, 10-14.

LAKATOS I. (1961) *Essays in the logic of mathematical discovery*, Thesis, Cambridge (University Library).

MARGOLINAS C. (1993) De l'importance du vrai et le faux dans la classe de mathématiques, *La Pensée Sauvage, Grenoble*.

MATH.EN.JEANS (1992) Combien méchant peut être un convexe ? ou quel est le convexe le moins rond, *MATh.en.JEANS au Palais de la Découverte*, 167-172. Ed. MATh.en.JEANS, Paris.

OUVRIER-BUFFET C. (2003) Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques, *Thèse, Laboratoire Leibniz, Université Joseph Fourier – Grenoble*, Disponible en version électronique : <http://www-leibniz.imag.fr/~buffet>

OUVRIER-BUFFET C. (2004) Dévolution et gestion de situations de construction de définitions en mathématiques. In Symposium « *Travail du professeur et dévolution dans les classes ordinaires* », *Congrès de l'AECSE*, Paris, septembre 2004. Disponible en version électronique : <http://www-leibniz.imag.fr/~buffet>

SHIR K. & ZASLAVSKY O. (2005, à paraître) 'Students' Conceptions of a Mathematical Definition', *JRME*.