DIVERSITÉ DES MATHÉMATIQUES ENSEIGNÉES « ICI ET AILLEURS » : L'EXEMPLE DE LA GÉOMÉTRIE

Alain KUZNIAK
Professeur des Universités, IUFM ORLÉANS-TOURS
Équipe Didirem Université Paris VII
alain.kuzniak@iufm.orleans-tours.fr

Résumé
L'étude des mathématiques enseignées dans différents pays a fait l'objet de l'attention de grandes études internationales comme TIMSS ou PISA dont les finalités et les cadres théoriques sont différents. La première s'intéressait à l'enseignement des sciences dans l'ensemble du système éducatif, la seconde se propose, par l'évaluation du niveau des élèves, de promouvoir une « mathematical literacy » qui s'appuie le plus possible sur la mathématisation de la réalité. Après avoir présenté ces deux grandes études, nous nous intéresserons au cas de la géométrie que nous proposons d'étudier avec l'éclairage des paradigmes géométriques qui peuvent rendre compte de la diversité des choix effectués par les pays. Nous envisagerons les cas des Pays-Bas pleinement engagés dans le courant « Realistic Mathematics » et du Chili où la Géométrie I (ou Géométrie naturelle) semble dominante. Nous donnerons enfin un rapide aperçu sur le courant de recherche ethnomathématique qui aborde de manière originale la relation entre les mathématiques et leur environnement social local.

L'idée d'enquêter sur les mathématiques enseignées ailleurs n'est pas nouvelle, on la trouve déjà par exemple dans les écrits de Lacroix au début du XIX^{e} siècle au moment de la création des écoles centrales transformées plus tard en Lycée. On la retrouve aussi chez Klein qui, dans son traité sur les Mathématiques élémentaires envisagées d'un point de vue avancé, donne une étude de l'approche de la géométrie dans les pays européens. Mais force est de constater que l'engouement pour ce type d'études s'est avivé depuis quelques années comme en témoigne le thème du colloque de la Copirelem.

De fait, cette question sur les mathématiques enseignées ailleurs se trouve souvent reliée à deux phénomènes : la comparaison et la globalisation. La comparaison d'abord, comparaison hiérarchisante demandée dans des études internationales commandées par des institutions interétatiques comme l'OCDE. La globalisation ensuite car ces comparaisons semblent s'insérer dans un processus normatif global qui transforme l'enseignement en une marchandise susceptible d'être évaluée pour en déterminer le coût et le prix de vente. Il n'est donc pas étonnant que ces études internationales soient souvent vécues comme relativement agressives par les professeurs concernés.

Dans cette conférence, nous allons montrer les fondements et l'intérêt possible des études comparatives. Nous proposerons aussi une réflexion sur un cadre théorique susceptible de permettre une approche didactique et pas seulement économique de la comparaison entre des enseignements donnés dans des institutions fort différentes.

Notre étude n'envisagera que les mathématiques enseignées dans la scolarité obligatoire période qui suivant les pays peut atteindre voire dépasser une dizaine d'années. Nous regarderons ainsi un enseignement allant au-delà de scolarité primaire en France. Comme notre titre l'indique, nous privilégierons l'enseignement de la géométrie.

Cependant, malgré cette limitation, le thème abordé reste particulièrement vaste et notre propos ne fera qu'effleurer ce domaine d'étude.

I – UNE INTERNATIONALISATION CROISSANTE

I – 1 Les institutions

La mise en place d'institutions internationales se préoccupant de l'enseignement des mathématiques suit d'assez près un mouvement semblable chez les mathématiciens. Ce sont d'ailleurs eux qui créent en 1908 la commission internationale sur l'enseignement des mathématiques (CIEM). Le premier président sera justement Klein dont l'influence sur l'enseignement des mathématiques en Allemagne est alors notoire. Il s'agit de s'intéresser prioritairement à l'enseignement universitaire qui préoccupe des chercheurs également engagés dans des cours à l'Université. En 1960, la CIEM devient ICME suivant son acronyme anglo-saxon. En 1969, le premier colloque ICME s'est tenu à Lyon et a réuni 655 participants. Le dixième colloque tenu à Copenhague en 2004 a officiellement accueilli 2324 personnes venant de plus de cent pays. Les participants sont désormais des spécialistes des études sur l'enseignement des mathématiques, nouveau champ de recherche que recouvre en France la didactique des mathématiques.

I – 2 Les études comparatives

Dès sa création, la CIEM a favorisé des études comparatives mais celles-ci apparaissent rétrospectivement comme des études de bonne compagnie avec un enjeu relativement faible. Il s'agissait d'observer ce qui se passait au niveau des programmes dans des pays occidentaux aux économies comparables. Le niveau concerné, l'enseignement secondaire, restait un niveau élitiste ne touchant qu'une infime partie de la population, rappelons que moins de deux mille personnes passaient le bac chaque année en France au début du XX^{e} siècle.

De manière générale pour comprendre l'enjeu des études récentes, nous adapterons une attitude pragmatique suggérée par Keitel et Kilpatrick (1999). Ces auteurs posent trois questions qui peuvent permettre de guider l'interprétation des résultats. Qui dirige l'étude ? Qui la paye ? Qui contrôle la présentation des résultats ? De ce point de vue les deux grandes études internationales récentes, TIMSS et PISA, apparaissent très différentes.

I – 2.1 Les études FIMS, SIMS et TIMSS

Ces sigles recouvrent trois études (First, Second and Third) Internationales sur les Mathématiques. La dernière a intégré l'étude des sciences (ce qui explique les deux S) jusqu'alors disjointe de l'étude sur les mathématiques enseignées.

Ces études ont été lancées dès 1959 par l'IEA[1], organisme créé pour cette occasion et qui regroupait des Universités, des centres de recherches et aussi des ministères de l'éducation de plus de cinquante pays. Il s'agissait de déterminer les effets de l'enseignement des mathématiques en observant notamment les connaissances mathématiques de populations d'élèves dans différents niveaux du cursus scolaire. Trois niveaux avaient été retenus : les années 3 et 4 de la scolarité (CM1), 7 et 8 (3^{e}) et enfin la fin de la scolarité secondaire (11-12). Les pays engagés dans cette étude ne retenaient que deux populations pour mener leur étude. La France avait choisi de tester les populations 2 et 3.

Notre propos n'est pas de rendre compte des résultats de cette étude largement diffusés (notamment chez Kluwer ou Falmer Press) mais de montrer l'émergence du concept de « mathematical literacy ». Cette notion apparaît notamment dans l'étude TIMSS sur les élèves de la fin de la scolarité secondaire. Les auteurs ont distingué deux sous-populations : la première a suivi un enseignement spécialisé en mathématiques dans des classes scientifiques, la seconde a continué ses études dans des domaines non scientifiques. Deux types de connaissances mathématiques sont alors introduits : les « mathématiques avancées » d'une part et d'autre part la « mathematics literacy ». Les connaissances regroupées sous cette dernière dénomination sont celles communes à tous les élèves ayant suivi une scolarité longue. Les questions portent sur des contenus aisément identifiables par les Français : nombres entiers, fractions et proportions, géométrie… Les questions du groupe de « mathématiques avancées » portent, en plus, sur l'algèbre, le calcul intégral ou vectoriel.

Curtis C. McKnight and Gilbert A. Valverde

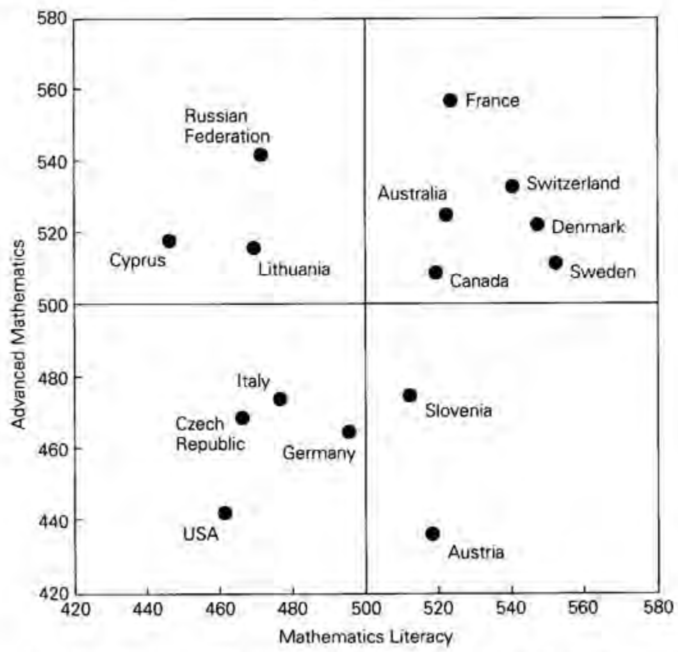


Figure 4.1: Mathematics literacy versus advanced mathematics results for 15 countries

Nous donnons ici un tableau extrait de l'ouvrage International Comparisons in Mathematical Education (1999, p. 50) consacré pour l'essentiel à l'étude TIMSS. Ce

[1] International Association for the Evaluation of Educational Achievement.

tableau montre les bons résultats relatifs des pays scandinaves dans le niveau mathématiques général. La France, quant à elle, se fait remarquer par des résultats meilleurs dans le domaine des « mathématiques avancées » que dans celui de la « mathematics literacy ». Il faut noter la place particulière des USA dans le quadrant des pays aux faibles résultats dans les deux domaines observés. Cette position particulière entraîna une vive prise de conscience aux États-Unis et la mise au point des fameux standards du NCTM (Association américaine pour l'enseignement des mathématiques). Depuis, ce type d'études continue mais est piloté par les États-Unis dans le cadre de TIMSS où le T signifie Trends. La France ne fait plus partie du consortium d'études.

I – 2.2 PISA et la nouvelle notion de « mathematical literacy »

L'étude PISA lancée en 2000 est pilotée par l'OCDE, organisation de coopération et de développement économique qui regroupe 30 pays et dont la vocation première est d'aider à la *bonne gouvernance* des services publics et des organisations dans les pays démocratiques ayant une économie de marché. L'étude PISA se propose d'évaluer chez les enfants de 15 ans ce que les auteurs de l'étude présentent comme la « mathematical literacy » traduit dans les documents en français sous le terme impropre de « culture mathématique ».

> *La culture mathématique est l'aptitude d'un individu à identifier et à comprendre le rôle joué par les mathématiques dans le monde, à porter des jugements fondés à leur propos, et à s'engager dans des activités mathématiques, en fonction des exigences de sa vie en tant que citoyen constructif, impliqué et réfléchi.* (OCDE, 2004, p. 39).

En anglais, le mot *literacy* désigne le fait d'être alphabétisé et ainsi de savoir lire et écrire. Depuis peu est apparu le terme *numeracy* qui renvoie à la capacité de savoir calculer et de comprendre des mathématiques simples. L'idée de *mathematical literacy* suppose une maîtrise des objets mathématiques simples les plus susceptibles de jouer un rôle dans la vie de tous les jours. Les auteurs évitent le terme de culture qui existe aussi bien sûr en anglais mais qui suppose cette fois un degré de maîtrise du domaine envisagé bien plus élevé et distancié.

De manière cohérente, l'enquête PISA privilégie, pour l'évaluation de cette « culture mathématique » des élèves, une approche qui place l'usage fonctionnel des savoirs et savoir-faire dans des situations tirées de la vie réelle au cœur de l'apprentissage des mathématiques. Le processus central sur lequel insistent les concepteurs de l'étude est celui de *mathématisation :* il s'agit, pour eux, d'un processus qui commence par l'organisation du problème à résoudre en fonction de concepts mathématiques, qui se poursuit, après effacement de la réalité, par la résolution grâce à l'usage d'outils mathématiques, et qui se termine par la communication du résultat en retrouvant le sens du problème initial dans la réalité.

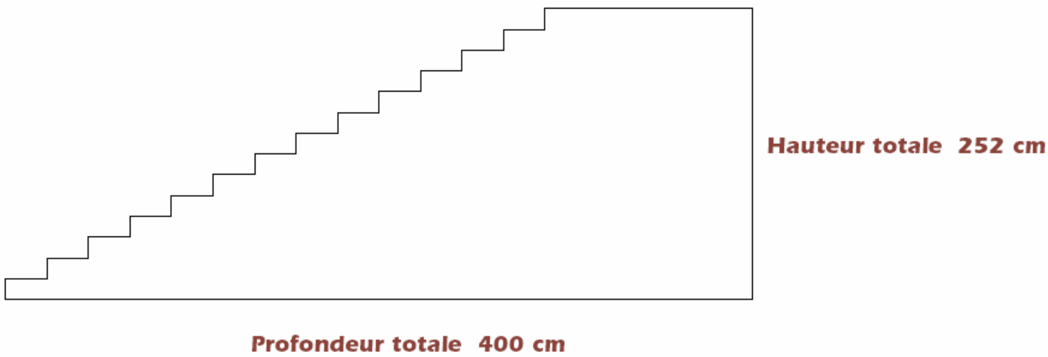
Comme le but principal de l'évaluation est d'apprécier les capacités des élèves à résoudre des « problèmes réels », les auteurs ont décidé de ne pas retenir le découpage traditionnel des mathématiques en arithmétique, algèbre, géométrie *etc.* En effet, selon eux, ce découpage ne se retrouve pas tel quel dans les problèmes issus de la vie réelle. Pour faire l'évaluation, ils ont ainsi déterminé quatre domaines : « Espace et formes », « Variations et relations », « Quantité » et enfin « Incertitude ». Les résultats sont donnés pour chacun des domaines afin de tenir compte des priorités des différents pays.

Nous allons nous intéresser au groupe « Espaces et Formes » en reprenant trois exemples proposés dans le rapport des résultats de PISA (OCDE, 2004).

Le premier exercice *Quelle est la hauteur d'une marche ?* est considéré comme facile et ne mobilise suivant les concepteurs que les deux premiers niveaux de compétences dans une échelle qui en comporte six. Sa cotation est de 421 par rapport à un système de notation où la moyenne des résultats des pays de l'OCDE participant à l'étude est mise à 500 avec les deux tiers des notes comprises entre 400 et 600.

ESCALIER

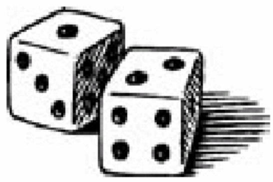
Le schéma ci-dessous représente un escalier de 14 marches, qui a une hauteur totale de 252 cm :



Voici le deuxième exemple proposé et qui utilise des dés à jouer comme support de la question. Cet exercice a la cotation 503, c'est-à-dire qu'il est d'une difficulté moyenne.

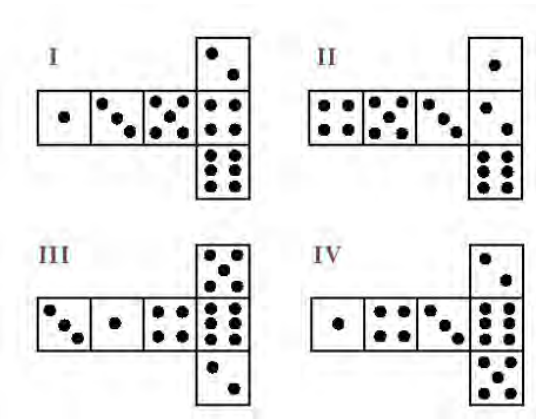
DÉS À JOUER

Le dessin à droite représente deux dés.
Les dés sont des cubes avec des faces numérotées selon la règle suivante :
« La somme des points figurant sur deux faces opposées doit toujours être égale à 7. »



La question est la suivante :

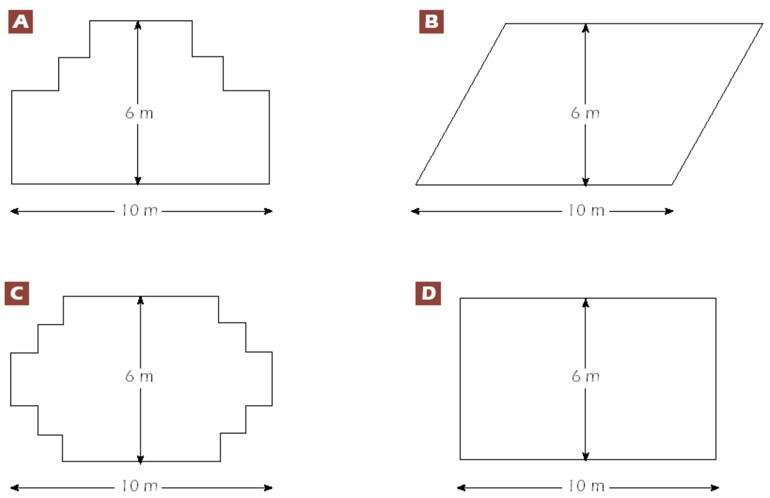
> *Vous pouvez aisément réaliser un dé en découpant, pliant et collant du carton. Cela peut se faire de plusieurs manières. Ci-dessous, vous pouvez voir quatre découpages qui peuvent être utilisés pour faire des dés, avec des points sur les faces.*
>
> *Parmi les découpages ci-dessous, lequel ou lesquels peuvent être plié(s) de manière à former un dé qui obéit à la règle selon laquelle la somme des faces opposées est égale à 7 ? Pour chacun des découpages, entourez soit « oui », soit « non » dans le tableau ci-dessous.*



Enfin voici un dernier exemple classé dans ceux nécessitant le plus de compétences dans l'échelle à six niveaux proposée[2] par PISA.

MENUISIER

Un menuisier dispose de 32 mètres de planches et souhaite s'en servir pour faire la bordure d'une plate-bande dans un jardin. Il envisage d'utiliser un des tracés suivants pour cette bordure :



Question 1

Indiquez, pour chacun des tracés, s'il peut être réalisé avec les 32 mètres de planches. Répondez en entourant « Oui » ou « Non »

Tracé de la bordure	**En utilisant ce tracé, peut-on réaliser la plate-bande avec 32 m de planches ?**
Tracé A	Oui / Non
Tracé B	Oui / Non
Tracé C	Oui / Non
Tracé D	Oui / Non

[2] Voir OCDE, 2004, p. 49.

Cet item est considéré comme très difficile indice, par les auteurs de l'étude :

> *Cet item se situe au niveau 6 car il demande aux élèves de s'appuyer sur leur compréhension de la géométrie, de mettre en œuvre des savoir-faire d'argumentation et d'appliquer des savoirs géométriques.*

Pourtant, par rapport aux usages de l'enseignement français la question ne demande aucune rédaction de la solution mais simplement de répondre par oui ou par non à quatre questions portant sur la faisabilité de la plate-bande.

La présentation de l'étude se termine par les résultats des différents pays ayant participé à l'évaluation. Deux pays européens se signalent par leur résultats au-dessus de la moyenne : la Finlande et les Pays-Bas. Nous verrons plus loin certaines des raisons de ce phénomène (III-1). Très à la traîne apparaissent des pays comme la Tunisie, le Brésil ou l'Indonésie. Les écarts entre pays développés ne sont pas très importants mais le classement a en cette matière beaucoup d'impact. C'est évidemment cette partie qui a été souvent retenue par les différents médias qui en ont rendu compte avec un raccourci prévisible : le terme culture disparaît et il reste comme dans cette invitation à une émission récente sur France-Culture *à réfléchir sur les mauvais résultats de la France en mathématiques*. Dans le même temps, la Finlande organise des colloques pour montrer le fonctionnement de son système éducatif qui lui a permis d'obtenir la première place dans l'étude avec un clin d'œil aux voisins suédois nettement moins bien classés alors que les minorités suédoises de la Finlande sont au même niveau que le reste du pays.

Mais au-delà de ces raccourcis, l'étude en elle-même est intéressante par la nouvelle perception des mathématiques qu'elle essaye d'installer parmi les pays développés. L'idée est bien de privilégier un enseignement des mathématiques utiles dans la réalité grâce à une succession d'évaluations qui permettront de voir les progrès réalisés dans ce sens car pour l'heure, les auteurs jugent les résultats globalement insuffisants et très préoccupants pour l'avenir des économies des pays de l'OCDE.

II – UN CADRE THÉORIQUE POUR LA COMPARAISON

Les deux exemples précédents attirent l'attention sur l'importance de la finalité de l'étude. Cette finalité permet de définir a priori un cadre théorique ou d'en retenir un quand l'enquête s'appuie sur les travaux antérieurs des concepteurs de l'étude. Ainsi le support théorique principal de l'étude PISA a été développé par Niss (2003) (voir aussi la présentation critique de Winslow (2005) dans les Annales de didactique). Dans l'étude PISA, le principe de l'évaluation reste classique et elle est basée sur des exercices. Une étude économique l'accompagne, OCDE oblige.

Les études de type TIMSS ne s'intéressaient qu'à l'enseignement scientifique mais elles possédaient une ambition plus large et visaient à décrire tout le système d'enseignement en prenant en compte toute sa diversité. Ainsi les concepteurs de ces études ont-ils été conduits à élaborer un cadre théorique suffisamment étendu pour permettre une grande diversité d'approches.

Le point faible de ces grandes études est certainement la réflexion didactique sur les contenus mathématiques spécifiques. Souvent, comme dans l'étude PISA, les contenus disciplinaires sont en quelques sortes évacués a priori au profit des compétences générales. Ainsi se trouvent placées au cœur du dispositif d'évaluation des notions comme le « problem solving » ou la « mathematical literacy ». Dans la suite de notre exposé II-2, nous présenterons le cadre théorique que nous suggérons d'utiliser pour étudier le cas particulier de l'enseignement de la Géométrie en conciliant à la fois compétences spécifiques et diversité d'approches grâce à la notion de paradigme clairement assumé.

II – 1 Le cadre théorique général des études de type TIMSS

Dès la première étude internationale (FIMS), les auteurs ont pris conscience de la nécessité de disposer d'un cadre théorique suffisamment ouvert pour rendre compte des différents systèmes éducatifs étudiés sans privilégier a priori une vision plutôt qu'une autre. Ils ont donc par la suite situé leur réflexion dans une approche systémique du processus éducatif en distinguant différents niveaux de programmes (Curriculum) liés au système éducatif, à la classe et à l'étudiant.

The intended Curriculum : le programme visé

Dans l'étude TIMSS, le curriculum visé doit regrouper les concepts, les connaissances et les compétences visés par l'enseignement des mathématiques. Il se propose ainsi de définir les voies et les buts propres à chaque pays pour enseigner les mathématiques. Les supports nécessaires à cette étude sont les documents officiels produits par les autorités qui pilotent le système éducatif. L'examen des budgets et des textes de lois est également un point intéressant pour repérer les priorités de chaque état.

The implemented curriculum : le programme mis en œuvre

Evidemment, les études sérieuses doivent envisager la mise en œuvre réelle du programme visé et tenter d'apprécier les différences. L'étude TIMSS essaie ainsi de mieux cerner la réalité des classes (effectifs, problèmes sociaux…) et aussi des enseignants (formation réelle et expérience, conception de l'enseignement…).

The attained curriculum : le programme atteint.

La dernière étape de l'approche de la réalité d'un système éducatif passe nécessairement par l'évaluation individuelle des élèves. Mais pour les auteurs, il ne s'agit pas simplement d'évaluer des connaissances mais aussi de mieux connaître les méthodes de travail et les ambitions des élèves.

Ces programmes sont étudiés dans le modèle développé lors de l'étude TIMSS grâce à quatre grandes questions de recherches.

- Que doivent apprendre les étudiants ?
- Qui donne l'enseignement ?
- Comment l'enseignement est-il organisé ?
- Qu'ont appris les élèves ?

Cette conception aboutit à un modèle SMSO (Survey of Mathematics and Science Opportunities) utilisé dans la recherche TIMSS dont on voit l'ambition à saisir les systèmes éducatifs dans toute leur complexité.

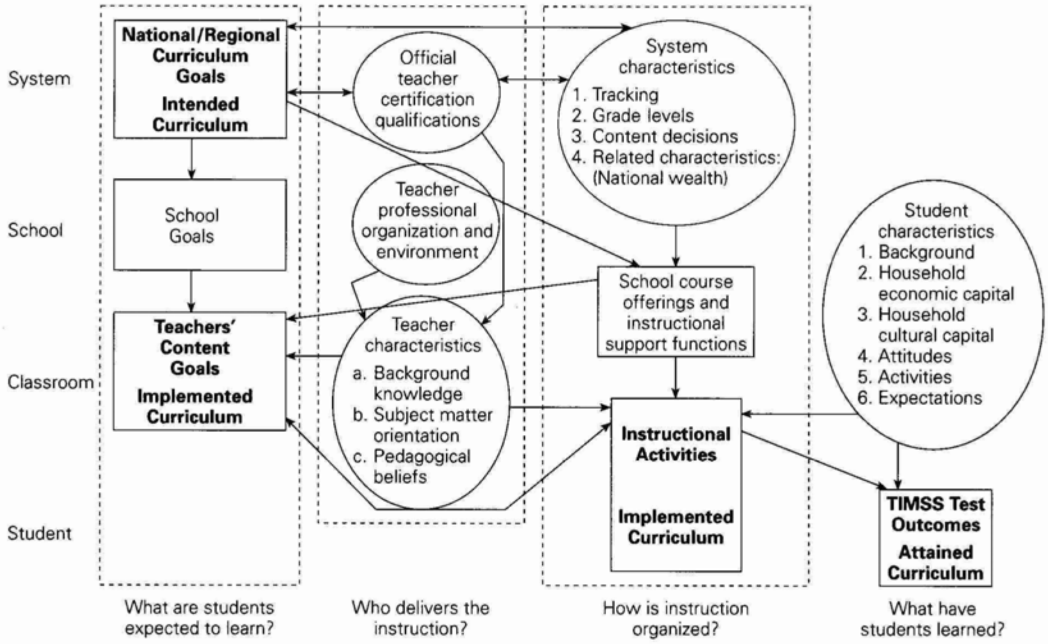
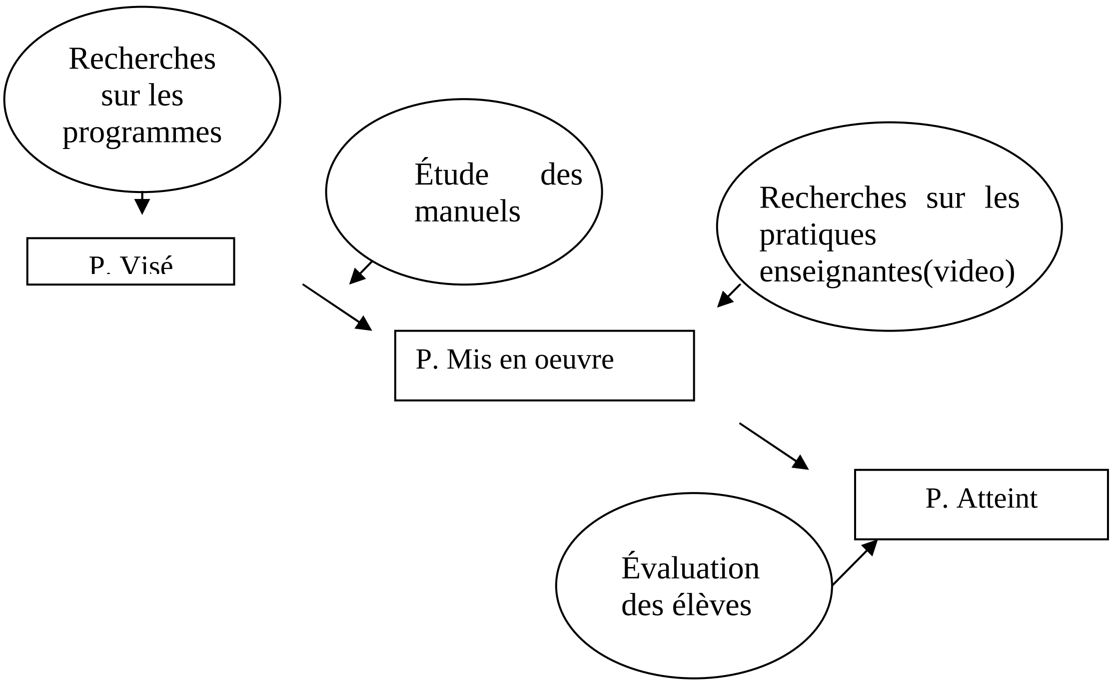


Figure 5.1: SMSO conceptual model of educational opportunity

Cogan et Schmidt, p. 69.

En s'appuyant au moins partiellement sur ce modèle, il est possible de comprendre les nombreuses possibilités de recherche qui ont pu s'appuyer sur ce cadre et dont le schéma suivant illustre quelques-unes unes des directions suivies.



II – 2 Le cas particulier de la Géométrie

II – 2.1 Les géométries en jeu et le travail géométrique

Décider de placer la Géométrie dans le programme visé suppose une conception du rôle de la géométrie dans la formation de l'élève mais aussi plus généralement dans la formation du citoyen. En France, en plein milieu du XIX^{e} siècle, une vive controverse sur la nature de la géométrie à enseigner à tous a opposé, à l'Assemblée Nationale, les tenants d'une géométrie orientée vers des applications immédiates au monde du travail, aux défenseurs d'une géométrie plus abstraite formatrice du raisonnement. De ce fait, s'il y avait bien un enjeu épistémologique dont rend compte l'idée de paradigmes géométriques, la discussion politique montrait aussi deux visions nettement distinctes de la société et du rôle du citoyen.

Durant la deuxième moitié du XX^{e} siècle, une troisième approche plus formelle et plus moderniste s'est brièvement, mais avec quelle force, ajoutée aux deux précédentes. Ainsi, sur le long terme et dans un seul pays, la nature de la géométrie enseignée a fortement fluctué et ses horizons problématiques et méthodologiques ont profondément évolué en fonction de décisions souvent plus idéologiques et politiques que scientifiques. L'observation des choix effectués actuellement dans différents pays fait apparaître des approches de la géométrie irréductibles les unes aux autres et qui sous une autre forme ressuscitent les débats évoqués précédemment.

II – 2.2 Trois géométries élémentaires

Pour rendre compte des différences entre les conceptions de la géométrie enseignées, nous avons, avec Houdement (1999), introduit la notion de paradigme empruntée à Kuhn. Dans son ouvrage « Structure of scientific revolutions », Kuhn (1962) analyse l'évolution de la communauté scientifique à travers l'émergence et l'instauration de paradigmes nouveaux qui permettent de poser, d'interpréter et de résoudre d'une certaine manière les problèmes scientifiques. L'importation de ces idées en mathématiques ne se fait pas sans modifications mais la notion de paradigme nous semble particulièrement pertinente dans le domaine des mathématiques enseignées où le rôle de l'idéologie importe autant que celui d'une pure épistémologie des mathématiques vues comme dégagées des problèmes d'application de leur champ de recherches.

Dans le domaine de la géométrie apparaissent clairement trois paradigmes géométriques que nous avons désignés sous les termes de Géométrie I (ou Géométrie naturelle), Géométrie II (ou Géométrie naturelle axiomatique) et enfin Géométrie III (ou Géométrie axiomatique formelle).

Pour comprendre cette approche par les paradigmes, il est nécessaire de voir que ces géométries ne sont pas a priori hiérarchisées par leur nature mathématique, leur complexité psychologique ou leur rôle sociétal. Elles ont en fait des horizons de travail différents et de fait leur impact dépendra beaucoup des intentions des auteurs des programmes.

La Géométrie I regarde du côté de la technologie et du monde de la pratique. Elle apparaît en phase avec la conception des mathématiques outils pour agir sur le monde de l'entreprise. Elles sont censées permettre également de résoudre un grand nombre de problèmes posés dans la vie quotidienne.

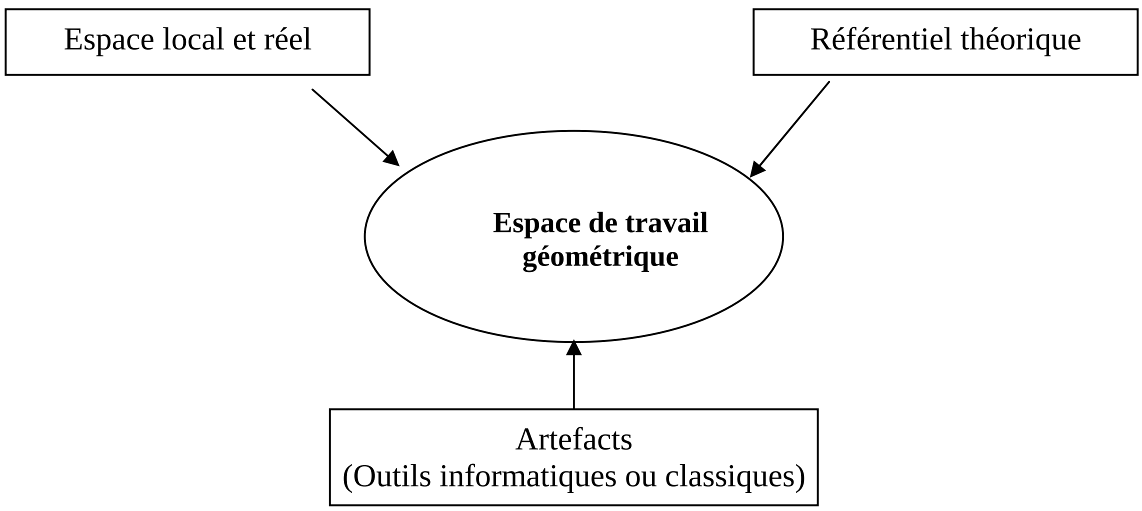
La Géométrie II insiste sur l'explication des actions effectuées et elle a pour horizon une modélisation qui s'articule avec une axiomatisation croissante destinée à fonder le mieux possible la théorie. L'insistance sur la cohérence de la base axiomatique débouche sur la Géométrie III qui privilégie les relations entre les objets théoriques introduits en Géométrie II. Son horizon s'intègre parfaitement dans le développement des mathématiques actuelles dont elle épouse les principes, ce qui fait que certains auteurs la qualifient de mathématique oubliant ainsi que les autres géométries font aussi partie des mathématiques.

II – 2.3 Sur les espaces de travail de la géométrie

L'idée force qui sous-tend notre approche est que l'on ne peut parler réellement de travail géométrique que lorsque l'activité de l'élève est à la fois suffisamment cohérente et complexe pour permettre la mise en oeuvre d'une activité de raisonnement. C'est ainsi que d'une certaine façon nous faisons notre la pensée de Gonseth (1945, p. 72) « être géomètre signifie ne pas confondre une évidence issue de l'intuition avec un renseignement expérimental, le résultat d'une expérience avec la conclusion d'un raisonnement ». Cette conception du travail géométrique nous fait rejeter les désignations faibles et confuses qui sont récemment apparues en France sous les termes erronés de géométrie déductive ou perceptive.

L'activité ou, plus exactement, le travail géométrique se développe au sein d'un espace de travail géométrique (ETG), organisé par et pour le géomètre de façon à articuler, de façon idoine, les trois composantes suivantes :

- un ensemble d'objets, éventuellement matérialisés dans un espace réel et local ;
- un ensemble d'artefacts qui seront les outils et instruments mis au service du géomètre, et enfin ;
- un référentiel théorique éventuellement organisé en un modèle théorique.



Les paradigmes géométriques que nous avons introduits servent de référence et ils permettent d'interpréter les contenus des composantes et ainsi de mieux définir leurs fonctions. Nos études sur les espaces de travail (Kuzniak, 2003 et 2004) ont montré la nécessité d'introduire trois niveaux d'ETG dépendant de l'institution éducative ou des individus concernés par l'enseignement de la géométrie. Une correspondance avec le cadre théorique de TIMSS peut être établie grâce au tableau suivant :

Programme général	Programme géométrique	Espace de travail géométrique
Intended Curriculum	Géometrie visée	de référence
Implemented Curriculum	Géométrie mise en œuvre	idoine
Attained Curriculum	Géométrie à l'œuvre	personnel

En utilisant ce cadre, nous pouvons poser un certain nombre de questions qui permettent d'étudier de manière didactique et relativement neutre idéologiquement l'enseignement de la géométrie.

Quelle est donc la géométrie qui est visée par l'institution scolaire ? S'agit-il de d'une géométrie de type GI, GII ou GIII ? Cette question doit être complétée par une interrogation qui porte sur la nature et la composition de l'ETG mis en place. Quels sont les artefacts utilisés ? Quel référentiel théorique est mis concrètement en œuvre ? Quels types de problèmes sont utilisés et jugés comme significatifs dans cette mise en œuvre pour faire entrer les élèves dans la géométrie attendue ?

Enfin, quelle est l'articulation qui existe entre les diverses géométries de l'école ? Dans ce cas, il est important de savoir si cette articulation repose sur un jeu ce qui suppose qu'elle est maîtrisée et assumée ou si l'on a plutôt affaire à un glissement d'une géométrie à l'autre. Par glissement nous voulons signifier un passage non maîtrisé d'un paradigme à l'autre : ainsi le professeur pense faire de la Géométrie II alors que les élèves sont en Géométrie I.

III – ÉTUDE DE LA DIVERSITÉ

Déterminer la nature de la géométrie est une des premières questions à envisager dans l'étude de la diversité. Mais de manière surprenante, il en est une qui de fait apparaît avant : existe-t-il une place pour la géométrie dans tous les systèmes étudiés. De fait, un des enjeux du rapport de la Royal Society (2001) est de faire réapparaître le terme Géométrie dans les programmes anglais, cette discipline étant englobée sous une rubrique intitulée : shape, space and measure. Nous avons également vu que dans l'étude PISA, la géométrie est recouverte par l'appellation Espaces et Formes. Ces luttes portant sur le vocabulaire ne sont pas anodines et recouvrent, en fait, des choix différents sur la nature et la place des mathématiques enseignées. D'un côté, on insiste sur les objets proches de la réalité et de l'autre, l'accent est mis sur des objets déjà idéalisés et conçus comme mathématiques.

III – 1 Un exemple radical : les Pays-Bas

Les Pays-Bas ont clairement opté dans la scolarité obligatoire pour un enseignement des mathématiques tourné vers ses applications à la réalité sous le nom de « Realistic Mathematics Education ». Cette approche développée par l'Institut Freudenthal à Utrecht s'est d'abord construite en réaction à l'enseignement des mathématiques modernes jugées trop abstraites pour les élèves et déconnectées de toute application au monde réel.

L'ambition du projet est double car il s'agit à la fois de modifier les contenus mathématiques mais aussi les méthodes d'enseignement et le style d'apprentissage des élèves.

L'approche des nouveaux contenus se fait essentiellement à partir de la résolution de problèmes. Il s'agit de problèmes pratiques provenant d'un environnement familier. Ainsi en Géométrie, l'accent est mis sur l'appréhension d'objets 3D grâce à leur représentation et à leur manipulation comme en témoignent ces extraits de programme pour la fin de l'école basique (15 ans).

Interpréter des représentations en 2D d'objets en 3D, les décrire, les visualiser en trois dimensions soit sur le papier soit sur un écran

Effectuer des tâches pratiques avec des objets 'tangible' en référence à des représentations d'objets de 3D. Faire des plans: élévation, dessin à l'échelle d'objet 3D… perspective

Estimer, mesure et calculer les angles, les dimensions, les aires et les volumes d'objets en 2D ou 3D.

Utiliser des instruments.

La géométrie mise en œuvre apparaît ainsi comme une Géométrie I orientée vers la 3D et fortement appuyée sur l'interprétation des objets tridimensionnels lorsqu'ils sont représentés en 2D. L'espace et les objets étudiés sont prioritairement des objets 'tangibles'. Le travail de représentation est très soigné puisqu'il s'agit d'initier à la perspective et à la lecture de dessins. La cohérence du projet apparaît bien lorsqu'on regarde l'importance accordée à l'approximation dans les domaines connexes comme la numération ou dans le domaine de l'arithmétique regroupée avec la mesure et où l'accent est mis sur l'estimation.

Pour mieux comprendre le projet il est utile de savoir que dans le système éducatif néerlandais, tous les élèves vont à l'école primaire (jusqu'à 12 ans) puis dans les écoles basiques secondaires (jusqu'à 15 ans) où se met en place l'orientation des élèves vers quatre institutions différentes. Dans le cadre relativement élitiste de la filière dite « pré-universitaire » (30 % des élèves) deux types de mathématiques sont introduits : les Mathématiques A et B. Dans les premières, prioritairement destinées à tous les élèves qui ne suivront pas des filières de type ingénieur en physique, l'accent est mis sur le rôle outil des mathématiques sans envisager de justifier ou d'expliquer d'un point de vue mathématique la nature de ces outils. Par contre leur rôle dans la résolution de problèmes issus de la réalité est sans cesse mis en avant. Les problèmes que résolvent les élèves néerlandais ne sont pas très éloignés de ceux que nous avons vus dans l'étude PISA.

La mise en place de cette attitude nouvelle vis-à-vis des mathématiques est subtilement mise en place à travers de nouvelles évaluations et aussi de grandes compétitions comme les A-lympiades. Dans ce cadre, les élèves doivent résoudre des problèmes parfois très complexes de modélisation : ils travaillent par équipe et la présentation de leurs résultats est jugée comme très importante, reliant ainsi la forme et le fond. On pourra trouver un exemple de ces épreuves dans l'article de Case (2004).

III – 2 Un exemple de Géométrie I cohérente et presque assumée : le Chili

Suivant un modèle courant dans le monde hispanique, la scolarité au Chili se divise en enseignement élémentaire (Basica) jusqu'à 14 ans puis Lycée (Media) jusqu'à 18 ans. L'enseignement des mathématiques mis en place depuis 1998 tourne le dos à l'enseignement très abstrait qui avait prédominé antérieurement.

Pour illustrer le changement radical d'approche qui existe entre le Chili et la France, nous présentons un exercice extrait d'un ouvrage de 2 Medio (Seconde) (Ramon-Gonzales-Andrade, 2002). Ce problème est donné au début du chapitre sur la similitude. La solution ne sera donnée que plus tard dans le corps du chapitre.

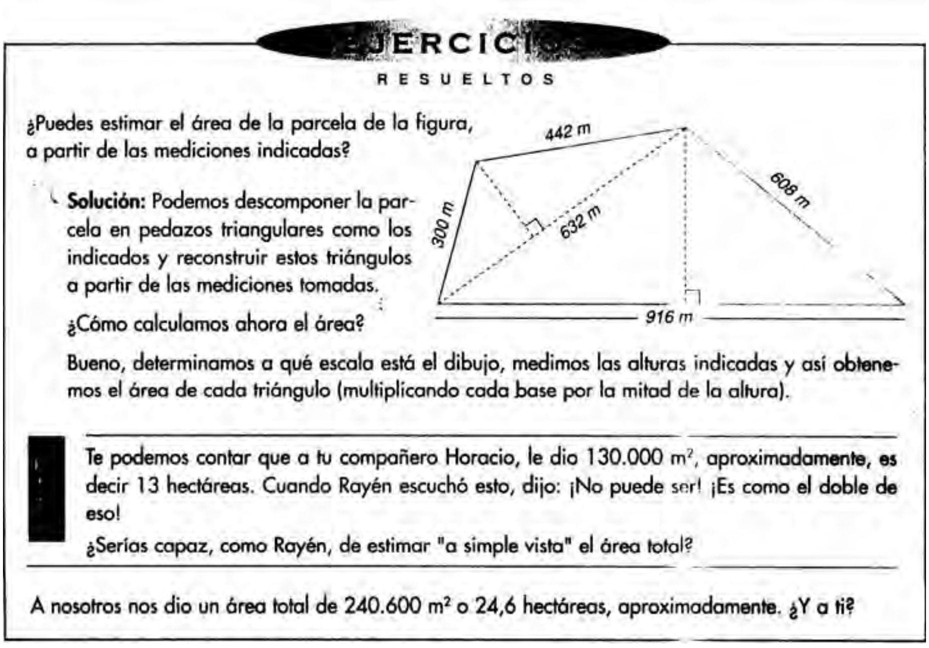
> Alfonso revient juste d'un voyage dans la précordillère, où il a vu un terrain en forme de quadrilatère qui a intéressé sa famille et dont il s'agit d'estimer l'aire. Pour cela, pendant son excursion, il a mesuré successivement les quatre côtés du terrain et il a trouvé approximativement : 300 m, 900 m, 610 m, 440 m. Pourtant, il n'arrive pas à trouver l'aire.
>
> En collaboration avec tes camarades, peux-tu aider Alfonso à déterminer l'aire du terrain ?

L'exercice est ensuite complété par l'indication suivante :

> Nous pouvons te dire, que pendant que vous réfléchissiez, Alfonso a expliqué son problème à son amie Rayen et lui a demandé de prendre une autre mesure du terrain : une diagonale ! Alfonso est revenu avec cette donnée : 632 m. A-t-il bien fait ? Pouvons-nous l'aider maintenant si nous ne pouvions pas avant ?

La solution commence de manière classique par proposer une décomposition de la figure à partir des indications données dans l'énoncé. Mais le plus surprenant pour un lecteur français reste à venir. En effet, les auteurs de manuels proposent de mesurer sur le dessin les hauteurs manquantes.

> *Comment peut-on calculer l'aire maintenant ?*
>
> *Bien, on détermine l'échelle du dessin, on mesure les hauteurs indiquées et comme cela on obtient l'aire de chaque triangle (en multipliant chaque base par la moitié de la hauteur).*


EJERCICIOS RESUELTOS

¿Puedes estimar el área de la parcela de la figura, a partir de las mediciones indicadas?

Solución: Podemos descomponer la parcela en pedazos triangulares como los indicados y reconstruir estos triángulos a partir de las mediciones tomadas.

¿Cómo calculamos ahora el área?

Bueno, determinamos a qué escala está el dibujo, medimos las alturas indicadas y así obtenemos el área de cada triángulo (multiplicando cada base por la mitad de la altura).

Te podemos contar que a tu compañero Horacio, le dio 130.000 m², aproximadamente, es decir 13 hectáreas. Cuando Rayén escuchó esto, dijo: ¡No puede ser! ¡Es como el doble de eso!

¿Serías capaz, como Rayén, de estimar "a simple vista" el área total?

A nosotros nos dio un área total de 240.600 m² o 24,6 hectáreas, aproximadamente. ¿Y a ti?

Ainsi le travail géométrique se situe clairement en Géométrie I avec un va et vient entre réalité et le dessin qui est un schéma de cette réalité : la mesure sur le dessin donne les données manquantes dans l'énoncé. De manière cohérente avec cette approche, le texte se termine par un travail sur l'approximation qui fait partie intégrante d'une géométrie basée sur la mesure.

III – 3 Questions de styles ?

Pour qui a eu l'occasion d'observer des classes dans un autre pays que le sien, l'existence d'un style particulier propre à chaque système d'enseignement paraît évidente au-delà des variations individuelles. Cette constatation s'est imposée avec force aux auteurs de la sous-étude TIMSS sur les pratiques dans six pays différents (Cogan et Schmidt, 1998). Mais évidemment la difficulté est de fonder l'étude sur des bases solides qui permettent de prouver ce que l'intuition donne comme évident.

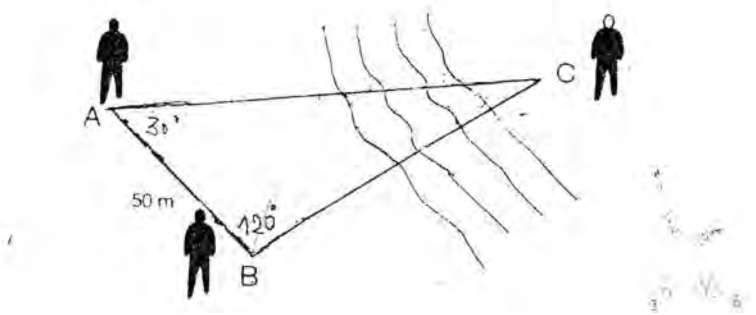
Dans l'étude TIMSS, les auteurs introduisent la notion de « characteristic pedagogical flow » pour rendre compte des formes récurrentes et typiques qu'ils ont pu observer. Une façon d'interpréter leur travail consiste à dire qu'ils tentent d'observer la nature des contrats pédagogiques mis en œuvre dans chaque système et d'en faire ressortir les spécificités. Ils sont ainsi conduits à observer plus particulièrement la gestion de certaines phases d'une séance d'enseignement.

Les contenus sont importants dans l'approche de la diversité mais comme nous l'avons vu, il importe également de savoir la composition effective des Espaces de travail personnels pour savoir la nature exacte du travail géométrique existant. Pour cela, il est intéressant de comparer des copies d'élèves de différents pays confrontés à un même exercice ou à des présentations de théorèmes standards comme celui de Pythagore. En France, des travaux récents ont été réalisés sur ce thème notamment par Knipping (2003), Cabassut (2003) et Celi (2003).

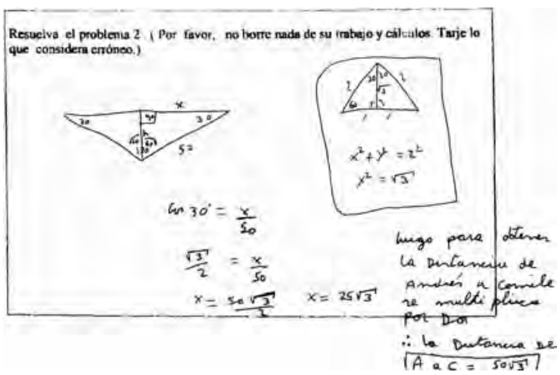
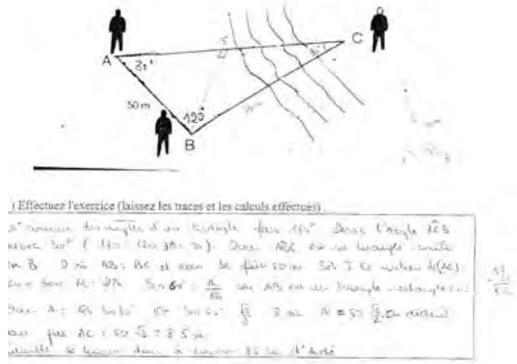
D’autre part, dans le cadre d’une recherche soutenu par ECOS, nous avons pu observer les différences d’approches et d’attentes entre le Chili et la France. Bien sûr il ne s’agit là que d’une approche pointilliste basée sur peu d’exemples mais qui nous semblent cependant significatifs de différences profondes dans la conception et de la géométrie et de son enseignement. Voici un exercice portant sur les grandeurs inaccessibles étudié par Castela, Houdement, Rauscher et Guzman, et que nous avons proposé à des futurs professeurs de Lycée en France (Université Louis Pasteur) et au Chili (Université catholique de Valparaiso) dans le cadre du projet ECOS.

Exercice 2

La figure montre André et Bernard qui se trouvent sur la rive d'un fleuve à une distance de 50m l'un de l'autre. Camille est sur l'autre rive. A quelle distance de Camille se trouve André ?



Nous retenons ici deux copies qui suivent exactement la même démarche de résolution mais adoptent un mode de présentation radicalement différent.

Copie chilienne	Copie française
	

D’un côté, au Chili, un dessin codé qui contient les résultats d’un raisonnement qui n’est pas explicité par écrit. De l’autre, en France, un texte très détaillé que nous transcrivons ici et où aucune assertion, même la plus triviale, n’est omise.

La somme des angles d'un triangle fait 180°. Donc l'angle $\widehat{ACB}$ mesure 30° (180-120-30). Donc ABC est un triangle isocèle en B. D'où $AB = BC$ et donc BC fait 50 m. Soit I le milieu de $[AC]$.
On a donc $AC = 2AI$. Sin 60°$=\frac{AI}{AB}$ car AIB est un triangle rectangle en I.
Donc $AI = AB \sin 60°$ Or $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D'où $AI = 50\frac{\sqrt{3}}{2}$. On déduit donc $AC = 50\sqrt{3} \simeq 85\ m$
Camille se trouve donc à environ 85 m d'André

L'observation des classes au Chili montre que les traces écrites des activités sur le tableau sont souvent semblables à cette production écrite. Elles sont accompagnées par un discours oral qui justifie les résultats alors qu'en France toutes les justifications doivent être écrites. Les travaux de Knipping font également apparaître une gestion différente du tableau et de l'articulation écrit/oral en France et en Allemagne.

De manière plus générale, Knipping et Cabassut ont montré la différence de gestion de l'argumentation dans des classes de plusieurs niveaux équivalents en France et en Allemagne. Ces travaux témoignent d'une mise en place d'Espaces de Travail Géométrique très différents qui montrent que même au sein du même paradigme, le travail géométrique peut revêtir des formes et des styles très différents d'un pays à l'autre. Il y a certainement là une piste de recherche à explorer.

IV – QUAND L'AILLEURS EST ICI : L'ENTRÉE ETHNOMATHÉMATIQUE

Les diverses études comparatives finissent toutes par constater l'importance de la culture locale dans l'enseignement des mathématiques même dans les pays développés. En un certain sens et contrairement aux attentes de certains, les mathématiques enseignées sont aussi dépendantes du pays que l'enseignement de la littérature ou de l'histoire (Cogan and Schmidt, 1999, p. 77). Particulièrement sensibles à l'importance des facteurs culturels dans l'enseignement des mathématiques et les plaçant au cœur de leurs préoccupations, un ensemble de chercheurs a développé à partir du milieu des années 80 un courant dit ethnomathématique.

Le courant ethnomathématique est né dans l'univers de pays anciennement colonisés, notamment lusophones avec d'Ambrosio au Brésil et Gerdes au Mozambique. Il réagit à la fois à des contenus mathématiques et à des formes d'enseignement importés des anciens pays colonisateurs. Cela passe par une réappropriation de la culture mathématique locale : en fait, il s'agit de reconnaître le caractère mathématique d'activités autrefois méprisées et qui supposent une connaissance du nombre ou des formes géométriques. Par exemple Gerdes (2001) observe la fabrication des paniers tressés chez les Tongas du Mozambique pour y découvrir les structures géométriques utilisées par les artisans.

Divers axes de recherches animent l'approche ethnomathématique. Parfois la volonté de retrouver des mathématiques dans les pratiques quotidiennes ne va pas sans quelques exagérations et une sorte d'effet Jourdain. Mais la forme sans doute la plus intéressante de ce mouvement apparaît dans les tentatives de programmes scolaires qui s'appuient sur des pratiques locales de calcul ou sur les conceptions du monde des sociétés en question. L'enjeu est d'importance dans des pays où la langue de l'enseignement est différente de la langue parlée par les enfants en dehors de l'école comme c'est fréquemment le cas en Afrique où jusqu'à présent l'enseignement ignorait la diversité culturelle.

L'intérêt des chercheurs se porte alors sur les manières de pensée propres aux peuples qu'ils étudient et qui transparaissent souvent dans leur langue. Ainsi une étude de Pinxen sur la culture navajo, montre que leur langue est essentiellement basée sur des formes verbales dynamiques : plus de 300 000 (?) formes du verbe « aller » alors qu'il n'existe pas de correspondance exacte pour le verbe « être ». Ainsi en géométrie des termes comme bord ou coté ne sont pas vus comme des lignes mais comme la cause d'une modification d'un mouvement : arrêt, passage *etc.* De même des enfants de tribus africaines villageoises restent perplexes devant un syllogisme de la forme suivante : tous les Kpelle sont paysans, M. Smitt n'est pas paysan, est-il Kpelle ? Cette question n'a pas de sens pour les élèves qui disent « si je connais M Smitt je sais s'il est Kpelle ou non ». Cette réticence n'est pas très éloignée de certains points de vue d'élèves français par rapport à des problèmes qui leur paraissent vides de sens mais un autre point se montre ici, c'est la sensibilité à la culture et au mode de pensée des élèves qui sont issus d'autres cultures. Ainsi, des chercheurs envisagent maintenant à travers ce prisme les difficultés de scolarisation rencontrées en Europe par les populations immigrées lorsqu'elles se regroupent en communauté.

Cette fois, le travail peut porter sur une sorte d'accommodation de l'enseignement dont le style est modifié pour tenir compte de l'origine culturelle de l'enfant (Bishop, 1994).

CONCLUSION

Étudier les manières de voir et de faire dans d'autres systèmes éducatifs permet de mieux comprendre notre système et ainsi de l'améliorer ou de justifier certains choix. Cette façon d'envisager la comparaison est certainement la plus courante au sein de la communauté des chercheurs en didactique. Grâce à l'observation de systèmes différents fonctionnant autrement, il est ainsi possible de répondre à de nombreuses questions comme par exemple le grand problème des différences entre filles et garçons dans leur réussite en mathématiques qui varient beaucoup d'un pays à l'autre. Ces études permettent aussi de quantifier l'effet du travail à la maison ou du temps de travail scolaire (Clarke, 2003).

Mais il ne faut pas perdre de vue qu'au-delà de la recherche classique et d'une certaine façon désintéressée se profilent des enjeux économiques qu'il serait naïf de négliger. D'une part l'éducation n'échappe pas à la logique des marchés et de la globalisation : en effet, nombreux sont les pays où existe une école privée et/ou un marché des produits éducatifs. D'autre part la question de la place des mathématiques dans le monde d'aujourd'hui ne se résume certainement plus à son aspect culturel ou purement scientifique. L'importance du courant des mathématiques dans la réalité témoigne de l'émergence d'une conception dominante qui considère les mathématiques essentiellement dans leur rôle d'outil. Cette conception est, comme nous l'avons vu, supportée par les enquêtes d'organismes comme l'OCDE qui cherchent clairement à imposer cette vision des mathématiques.

Différentes conceptions des mathématiques sont ainsi à l'œuvre qui renvoient réellement à des paradigmes différents dont témoignent les dénominations que l'on peut trouver dans les diverses études : Mathématiques A et B ou Mathématiques avec un grand M et un petit m. Comme toujours l'intérêt d'aller voir « ailleurs » contribue à la remise en cause des évidences entraînées par l'ethnocentrisme, il suggère aussi d'interroger l' « ici » avec des yeux plus ouverts sur la diversité sociale et ethnique de la France.

BIBLIOGRAPHIE

ASCHER M. ET D'AMBROSIO U. ED (1994) *Special issue on Ethnomathematics in Mathematics Education,* For the learning of mathematics, **14-2**, Vancouver.

Et notamment

BISHOP A. J. Cultural Conflicts in Mathematics Education : Developping a Research Agenda, 15-18.

ZASLAVSKY C. « Africa Counts » and Ethnomathematics, 3-8.

Pinxten R Ethnomathematics and its Practice, 23-25.

BARTON B. (1996) *Anthropological Perspectives on Mathematics and Mathematics Education* in International Handbook of Mathematics Education Kluwer, 1035-1054.

CABASSUT R. (2003) *Enseigner la démonstration,* Bulletin de l'APMEP, **449**, 757-770.

CASE R. W. (2005) *The Dutch Revolution in Secondary School Mathematics* Mathematics Teacher, **98-6**, 374-384.

CELI V. (2003) *L'enseignement de la géométrie en France et en Italie : quels choix et quels effets sur la formation des élèves,* Bulletin de l'APMEP, **449**, 771-783.

CLARKE D. (2003) *International Comparative Research in Mathematics Education* in Second International of Mathematics Education, 143-184.

GERDES P. (1996) *Ethomathematics and Mathematics Education* in International Handbook of Mathematics Education Kluwer, 909-944.

GERDES P. (2001) *Exploring plaited plane pattern among the tonga in Inhambane* Symmetry: Culture and Science, **12**, 115-126.

HOUDEMENT C. ET KUZNIAK A. (1999) *Quelques éléments de réflexion sur l'enseignement de la géométrie : de l'école primaire à la formation des maîtres,* Revue Petit X, **51**, 5-21.

KAISER G., LUNA E. ET HUNTLEY I. (1999) International Comparisons in Mathematics Education Falmer Press, ISBN 0-7507-09026-2.

Et notamment :

BEATON A. E. ET ROBITAILLE D. F. *An overview of the Third International Mathematics and Science Study,* 30-47.

COGAN L. S. ET SCHMIDT W. H. *An examination of Instructional Practices in Six countries*, 68-85.

KEITEL C. AND KILPATRICK J. *The Rationality and Irrationality of International Comparative Studies*, 241-256.

KNIGHT C. AND VALVERDE G. *Explaining TIMSS Mathematics Achievement : A Preliminary Survey*, 48-67.

KNIPPING C. (2003) *Processus de preuve dans la pratique de l'enseignement : analyses comparatives allemandes et françaises en quatrième*, Bulletin de l'APMEP, **449**, 784-796.

KUZNIAK A. (2003) Paradigmes et espaces de travail géométriques. Note d'habilitation à diriger des recherches, IREM Paris 7, ISBN 2-86612-2486-8.

KUZNIAK A. (2004) *Sur les espaces de travail géométriques*, Séminaire national de didactique des mathématiques, IREM Paris 7, 91-110.

NISS M. (2003) *Mathematical competences and the learning of mathematics : the Danish KOM-project* sur le site http://www7.nationalacademies.org/.

OCDE (2003) *The PISA assessment framework* sur le site www.pisa.oecd.org.

OCDE (2004) *Apprendre aujourd'hui, réussir demain. Premiers résultats de PISA 2003* sur le site www.pisa.oecd.org.

RAMON-GONZALES-ANDRADE (2002) Manuel Marenostrum 2 Medio (Seconde), Chili.

ROYAL SOCIETY (2001) *Teaching and Learning Geometry.*

VALVERDE G. A. et AL (2003) According to the Book Using TIMSS to Investigate the Translation of Policy into Practice Through the World of Textbooks 212 p., Kluwer ISBN:1-4020-1034-6 .

WINSLOW C. (2005) *Définir les objectifs de l'enseignement mathématique : la dialectique matières-compétences*, Annales De Didactique Et De Sciences Cognitives, **10**, 131-156.