

Une proposition pour traiter perpendicularité et parallélisme à partir d'une étude dynamique des formes

Jean-François Grelier

Professeur de Mathématiques, IUFM de Midi-Pyrénées

Comment approcher les concepts d'orthogonalité et de parallélisme ? Doit-on partir des formes polygonales ou du pliage de papier ?

Cet article présente une recherche action, menée dans une école de Toulouse, qui pose les questions précédentes et propose quelques pistes.

1. La recherche-action

Cette présentation est tirée d'une recherche-action menée à l'école Buffon à Toulouse, dans la ZEP du Mirail, et qui s'est conclue par la publication d'un ouvrage au CRDP Midi-Pyrénées : « Apprentissages géométriques aux cycles 2 et 3 ». Ce travail se situe dans le vaste mouvement qui depuis une vingtaine d'années vise à faire passer l'école d'une pédagogie de la restitution à une pédagogie de la compréhension. De ce point de vue, les progrès ont été spectaculaires dans le domaine numérique, en particulier grâce aux travaux de l'équipe Ermel. Mais ça n'a pas été le cas en géométrie, faute d'un travail systématique de recherche et de production d'outils didactiques. C'est donc parce qu'il leur manquait les activités permettant de vraies manipulations en géométrie que les auteurs ont engagé depuis septembre 98 une recherche-action pour produire ces activités d'abord pour leur propre usage.

Il faut dire un mot de la méthode employée. L'attitude classique des chercheurs est de commencer par éclaircir le champ théorique, et d'en déduire dans un second temps les conséquences pratiques, ici les activités de classe : recherche fondamentale, puis recherche appliquée. Au contraire, la démarche s'est voulu (faussement ?) naïve : prendre les programmes de géométrie au sérieux, en cherchant à construire les compétences exigées, avec les méthodes actives qui ont fait leurs preuves dans le domaine numérique. Parce que c'est en faisant qu'on apprend, les problèmes théoriques ont été traités au fur et à mesure qu'ils se posaient, et dans les termes où ils se posaient, avec le critère pratique de la réussite des élèves. Et c'est donc progressivement que la compréhension théorique s'est enrichie, en construisant une cohérence globale au travail. Et cette cohérence s'est formalisée dans l'ultime étape, dans le travail d'organisation des activités dans des progressions par niveau respectant les programmes.

2. La problématique proposée à l'atelier

a) Comment articuler les apprentissages de la géométrie et de la spatialité ?

Les programmes insistent aujourd'hui sur la nécessaire distinction entre l'appréhension de la spatialité et la construction des compétences géométriques. Cela est souvent compris par les enseignants comme la formalisation d'un nouveau domaine géométrique qui doit précéder la

géométrie traditionnelle, et qui s'appellerait spatialité ou espace. Un domaine qui serait un développement réfléchi des activités de repérage que l'on faisait traditionnellement au cycle 1.

Dans ce cas, les nouvelles instructions seraient comprises comme le rajout d'un nouveau domaine, et non comme une refonte de toutes les activités géométriques. Comme si l'enseignement traditionnel qui s'organise autour de l'apprentissage des formes fonctionnait, alors que l'apprentissage des relations - orientation, alignement, orthogonalité et parallélisme, devait être réformé, et qu'il peut l'être en étant pris en main autrement, et plus tôt.

Au delà de ce qui n'est peut-être qu'une incompréhension locale sans beaucoup de conséquences, reste le problème de savoir comment on articule l'enseignement des formes et des relations. Comme pour la question de l'ordre dans lequel on doit organiser les enseignements de l'espace et du plan, la réponse n'est jamais tout l'un ou tout l'autre. Il ne s'agit pas d'aller des formes vers les relations ou de travailler d'abord les relations pour aborder dans un second temps les formes. Il faut réfléchir à leurs apprentissages conjoints.

b) L'hypothèse à questionner

Il semble incontestable que l'étude traditionnelle des formes prépare mal aux apprentissages géométriques, mais n'était-ce pas en grande partie parce qu'elles sont présentées statiquement, et en général sur papier ? Commençons par réfléchir à ce que pourrait être un travail innovant sur des formes dynamiques, et voyons en quoi cela permet de mieux construire les concepts liés aux formes, mais en quoi cela facilite aussi l'apprentissage des relations.

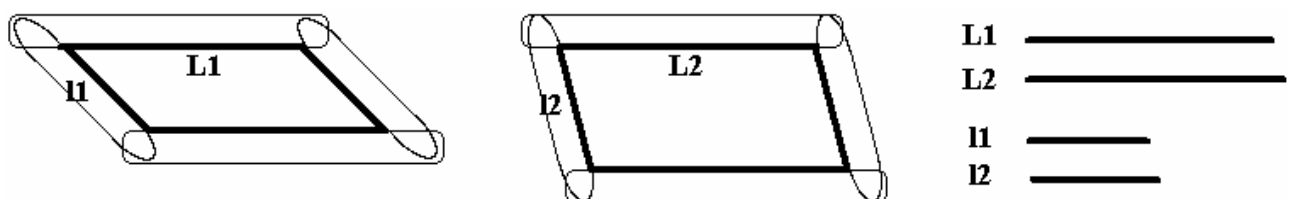
On peut certes déplacer et déformer des formes sur ordinateur, mais cela demande déjà une certaine expertise. Nous avons donc recherché et mis au point un matériel beaucoup plus simple qui permet aux élèves de manipuler directement des objets qui sont des passages vers le concept.

Construire des polygones articulés permet d'engendrer des familles de polygones, et à chaque fois de recenser ressemblances et différences. Pour les polygones à quatre côtés égaux par exemple, cela construit les solidarités entre les losanges et le carré, mais fait apparaître aussi des critères pour les différencier. En déformant un carré, on voit ce qu'il conserve et ce qu'il perd.

3 - La mise au point du matériel dans la recherche-action

C'est dans ce but que nous avons donc cherché à produire des polygones articulés. Une première idée est d'utiliser un matériel de type « mécano ». Il présente l'intérêt de pouvoir articuler les côtés des polygones, mais présente des difficultés pour passer à la représentation. En effet quand on utilise ce matériel comme gabarit pour représenter, modifier les angles modifie aussi les longueurs des côtés.

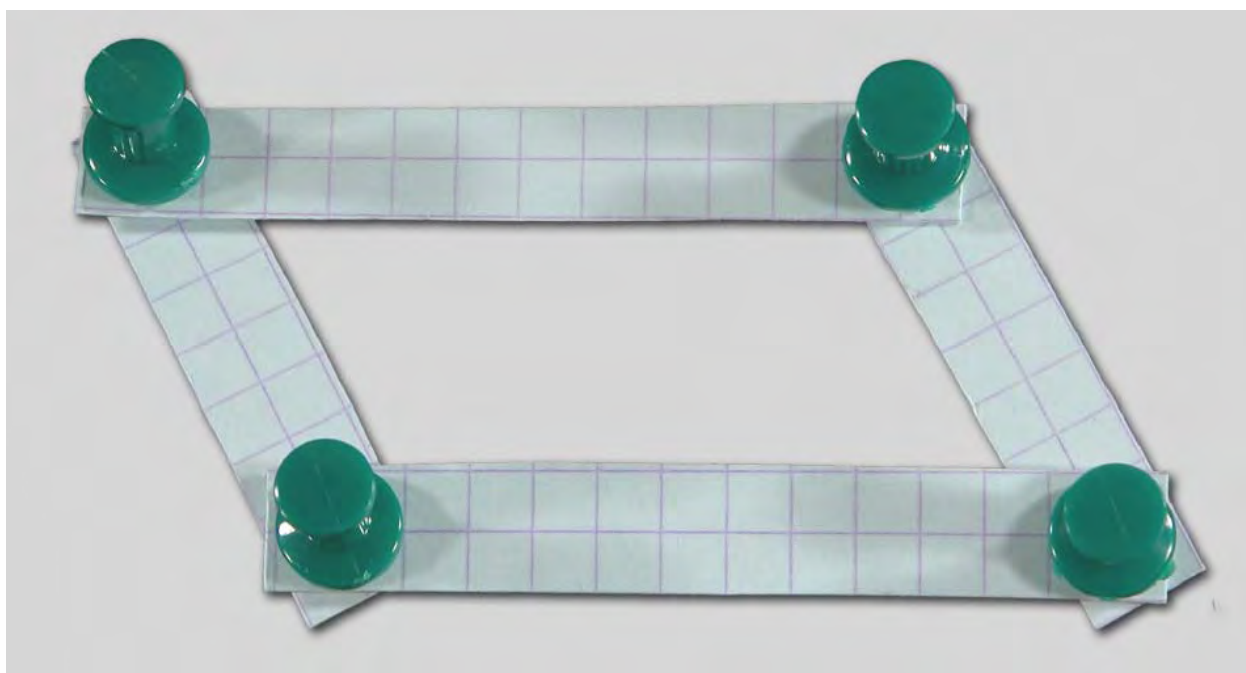
Matériel abandonné



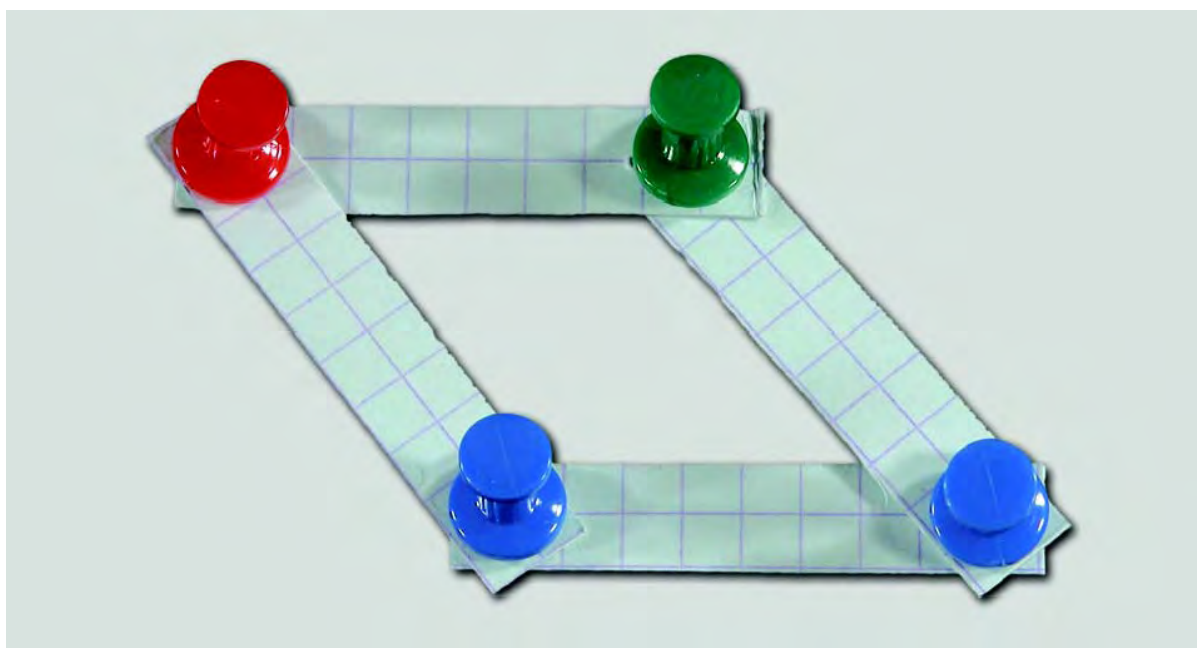
Finalement ce matériel n'a été conservé que comme traceur de parallèle, et après beaucoup de tâtonnements, une meilleure solution a été trouvée.

Pour ce faire, on fabrique des réglettes de papier de 1 cm de large dans du bristol quadrillé et plastifié. On forme le polygone en plantant des punaises aux deux avant-derniers nœuds de ces bandes, et on intercale, entre le montage articulé et le support carton (ou moquette), une feuille de papier qui va donc être également trouée par les punaises aux emplacements des sommets.

Quadrilatères formé avec deux fois deux réglettes



Quadrilatères formé avec quatre réglettes égales



On obtient ainsi très naturellement une représentation du polygone en reliant au crayon à papier les trous des punaises, et cette représentation conserve la longueur des côtés. Son gros avantage est de permettre un passage immédiat à la représentation.

Dans notre recherche, nous avons eu le souci permanent d'organiser le passage de la manipulation à une représentation où on traite le problème sans manipuler, car sans ce transfert, on ne fait pas de mathématiques, on bloque la conceptualisation. Cela a même été le principal critère de sélection du matériel : aussi gratifiant qu'il soit, un matériel qui ne permet pas un passage rapide à la représentation ne peut être exploité mathématiquement.

Ce matériel nous semble un bon compromis entre plusieurs contraintes : il permet d'engendrer tous les polygones de mêmes côtés, il est de faible coût et facile à réaliser, et surtout il permet un passage immédiat à la représentation.

Les élèves ont ainsi dès le cycle 3 des figures de très bonne qualité, sur lesquelles un travail multiforme pourra être mené.

Dans une première séquence (Po1)¹ d'appropriation du matériel, les élèves apprennent à monter des polygones articulés, à engendrer plusieurs formes de la même famille, et à les représenter sur une feuille blanche en rejoignant les trous laissés par les punaises. Une des modalités peut être un jeu de la marchande, où les élèves commandent les réglettes et les punaises nécessaires pour construire un polygone de leur choix.

Dans une deuxième séquence (Po2), les élèves vont travailler avec quatre réglettes de même longueur. Par groupe de deux, ils vont produire trois polygones différents, et les représenter. Puis ils vont devoir trier ces quadrilatères. Deux catégories s'imposent à tous : les carrés et les losanges. Mais il n'est pas toujours facile de décider à quelle catégorie appartiennent certains « quasi-carrés ». Un critère incontestable est nécessaire. Les angles droits sont difficile à vérifier, aussi un autre critère émerge, la longueur des diagonales, et c'est induit par le matériel qui se déforme de carré à losange quand on tire sur une diagonale. Et quand on tire sur une diagonale en l'agrandissant, visiblement l'autre diagonale diminue. Et on peut vérifier cette conjecture immédiatement en mesurant à la règle graduée. Il faudra se mettre d'accord sur la marge d'appréciation.

Les élèves vont alors formuler par écrit les ressemblances et les différences entre les deux catégories, les carrés et les rectangles, et la classe pourra ainsi recenser après confrontation et bilan collectif les propriétés de ces deux quadrilatères.

Dans une autre séquence (Po4), les élèves travailleront avec deux fois deux réglettes égales. Dans une démarche analogue, ils découvriront les propriétés des rectangles, des parallélogrammes et des cerfs-volants.

Chacune de ces séquences pourra se diviser en deux, trois ou quatre séances de 45 minutes.

4. Présentation de la proposition

Il nous semble que la plupart des manuels usuels présente l'orthogonalité à partir d'une réflexion sur les droites, hors situation fonctionnelle. L'utilisation de la technique du pli sur pli pour produire un gabarit d'angle droit donne l'alibi de la manipulation pour faire « passer en contrebande » le caractère ostensif de la démarche. Ici au contraire on propose d'essayer de structurer cette notion en situation. Dans la séquence précédente, les élèves ont engendré la famille des quadrilatères à quatre côtés égaux. Ils ont trié les carrés des losanges, et ont cherché des critères objectifs permettant de les différencier. L'angle droit est un critère, mais l'équerre s'avère être un piètre outil de discrimination, pour des raisons pratiques. Comme on

¹ Voir annexe

vient de le voir, un deuxième critère beaucoup plus fonctionnel apparaît alors : le carré a ses deux diagonales égales, et le losange non.

Et surtout on a là de quoi construire une image mentale très forte, avec ces deux droites qui bougent au cœur de la figure tout en restant perpendiculaires.

Et c'est là qu'intervient l'activité Po3 dont voici le descriptif :

1. *Classe entière* : on reprend les quadrilatères articulés à côtés égaux. On les décrit collectivement. Les élèves proposent des formulations des propriétés communes à tous ces quadrilatères (ressemblances et différences).
2. *Groupe de deux* : on cherche les symétries par pliage exact. On obtient un angle droit que l'on va utiliser comme critère. On se construit une équerre personnelle sur ce modèle.
3. *Groupe de deux* : on écrit une phrase pour expliquer les propriétés des diagonales.
4. *Classe entière* : bilan et écriture dans le memento de géométrie. On vise la définition des droites perpendiculaires : (par exemple « deux droites qui se coupent en formant des angles droits »)

Pour peu que l'on fasse tracer les diagonales en rouge, leurs positions « en croix », renforcées par le fait qu'elles sont médiatrices l'une de l'autre, fait de cette situation –commune au carré et aux losanges de la famille- une image mentale emblématique de la situation de perpendicularité. Le gabarit d'angle droit, est ici introduit par le pliage d'un losange en liaison avec la reconnaissance de symétries, donc en liaison avec le sens.

De même le parallélisme peut se construire avec les séquences Po4 et Po5, par les quadrilatères que l'on engendre avec deux fois deux bandes égales. Ici, c'est le parallélogramme qui offre une situation de référence par le parallélisme qu'il montre sur ces deux grands côtés. Et un critère permettant de vérifier le parallélisme de deux droites pourra apparaître : les segments découpés par les perpendiculaires communes aux deux parallèles sont égaux, et ce critère pourra aussi servir de définition pour le parallélisme de deux droites.

5. Discussion, conclusion et pistes de recherche

Après avoir testé le matériel et produit des polygones, les participants de l'atelier ont lancé une discussion qui s'est articulée autour de ces thèmes :

- Faut-il partir des formes et tout tirer des formes ? C'est-à-dire comprendre les relations dans les formes et donc traiter la perpendicularité et le parallélisme à partir des formes.
- Ou faut-il envisager une approche des notions de perpendicularité et de parallélisme sans prendre appui sur les formes ? On peut par exemple mener des activités autour de :
 - la perpendicularité observée et définie à partir d'activités de pliage (notion de droite, d'intersection, de partage du plan en 4 parties superposables)
 - la perpendicularité observée et définie à partir du monde physique (horizontalité et verticalité, descendre une droite sur une oblique comme un fil à plomb sur une horizontale)
- Peut-on sortir d'un enseignement ostensif de ces relations ?

- Faut-il ou non travailler l'inclusion des familles de figures géométriques à l'école primaire ? Si les points de vues divergent, il y a unanimité pour reconnaître la nécessité de travailler le changement de point de vue et de faire percevoir la notion de propriété commune comme critère de classification.
- Il faut une vraie réflexion pour choisir, suggérer, s'appuyer sur des images mentales, car il faut des référents communs et / ou personnels. On est donc amené à faire des choix sur les images mentales à faire construire et les situations fondamentales qui les feront émerger.

Si cet atelier n'a pas pu répondre définitivement à ces questions, au moins a-t-il eu le mérite de les poser publiquement, et de proposer des pistes de réponses.

Cet article a été rédigé avec l'aide de Danièle Arhel qui a écrit le compte-rendu de l'atelier.

Annexe

Proposition de progression

Po1 Découverte des polygones articulés (CE2) Découverte et appropriation du matériel. Apprentissage de la représentation. Réalisation de polygones par la commande de réglettes de punaises.
Po2 Carrés et losanges (CE2) Produire les quadrilatères articulés à quatre côtés égaux, trois par groupe. Les découper et les afficher au tableau. Les trier en deux familles. Trouver un critère rigoureux. Bilan et écriture dans le memento de géométrie de la définition du carré.
Po3 Droites perpendiculaires (CE2) Rechercher les caractéristiques communes des losanges et des carrés. Recenser oralement les différences et les ressemblances. Faire émerger la propriété des diagonales.
Po4 Rectangles et parallélogrammes (CM1) Fabriquer des quadrilatères à côtés égaux deux à deux. Dessiner trois quadrilatères différents par polygone articulé. Trier ces quadrilatères : les rectangles, les cerfs-volants et les parallélogrammes. Recenser les différences et les ressemblances. Bilan et écriture dans le memento de géométrie.
Po5 Droites parallèles (CM1) Rechercher les caractéristiques communes aux rectangles et aux parallélogrammes. Faire émerger la propriété des côtés opposés. Recenser les situations éclairant différentes conceptions du parallélisme.
Po6 Traceur de parallèles (CM1) Reprendre le polygone articulé aux côtés opposés égaux. Fixer un des côtés et tracer plusieurs polygones. En déduire une méthode pour tracer la parallèle à une droite par un point.
Po7 Périmètre sur polygones articulés (CM1) Construire des polygones admettant un périmètre donné. Comparer leurs aires.
Po8 Quadrilatères articulés par le squelette (CM2) Apprendre comment on peut tracer des quadrilatères avec deux bandes qui se croisent. Structuration du procédé de fabrication. Recherche des quadrilatères particuliers : on les obtient si les diagonales se coupent en leur milieu.
Po9 Quadrilatères à diagonales égales (CM2) Produire des quadrilatères dont les diagonales se coupent en leur milieu : les trier. On obtient les carrés et les rectangles. Ecrire sur des bandelettes des propriétés de ces figures, et les afficher au tableau. Faire un bilan dans le memento.
Po10 Quadrilatères à diagonales quelconques (CM2) Produire des quadrilatères dont les diagonales se coupent en leur milieu : les trier. On obtient les losanges et les parallélogrammes. Ecrire sur des bandelettes des propriétés de ces figures, et les afficher au tableau. Faire un bilan dans le memento.
Po11 Bandes sécantes et parallélisme On commence par définir les bandes. Puis on cherche à identifier l'intersection de deux d'entre elles. On en déduit de nouvelles propriétés des quadrilatères.