LE CALCUL PAR LES INSTRUMENTS À CALCULER

Caroline Poisard,[1]

Doctorante à l'Université de Provence, Laboratoire du Cirade

Alain Mercier[2]

UMR ADEF, Université de Provence, INRP, IUFM d'Aix-Marseille

Résumé : Cet atelier s'appuie sur des travaux de thèse. Cette recherche s'intitule : « analyse didactique d'une innovation pédagogique ».

Il s'agit d'étudier l'originalité d'une démarche pédagogique qui consiste à construire et à utiliser des objets mathématiques - boulier chinois ; bâtons à multiplier de Néper et réglettes de Genaille-Lucas ; règle à calcul pour additionner ou soustraire - hors du temps scolaire, dans le contexte d'un centre d'animation scientifique et technique, mais en liaison avec le travail en classe.

1 - INTRODUCTION

L'objectif principal de cet atelier est d'étudier des instruments à calculer. Cette étude ne vise pas seulement à montrer comment enseigner de nouveaux savoirs mais plutôt à se confronter à des œuvres. Le sens du mot œuvre est ici emprunté à Chevallard (2001). En se basant sur le principe que la réponse à une question peut être fournie par le recours à des connaissances et des savoirs, il considère ces connaissances et ces savoirs comme des œuvres, dans le sens où elles créent un milieu de production d'une réponse (pour une certaine institution). Pour illustrer cette remarque l'auteur développe l'exemple des TPE (travaux personnels encadrés) au lycée. Le problème actuel de l'école est le manque des questions et la tendance à fournir directement des réponses ce qui n'engendre qu'une reproduction d'œuvres. L'enjeu des TPE est donc de donner des questions et ainsi de produire des œuvres.

Notre objectif est aussi de produire des œuvres, par l'étude d'instruments de calcul. Les questions que nous proposons pour ce travail sont : Comment ça marche ? Pourquoi ça marche ? A quoi ça sert ? Qui s'en sert ? Pour quoi faire ?

1.1 Projet de recherche

Pour résumer notre sujet de thèse, nous dirons qu'il se bâtit sur une « analyse didactique d'une innovation pédagogique ». L'originalité de la démarche pédagogique étudiée consiste à construire et utiliser des objets mathématiques, à les manier. Une autre

[1] Doctorante à l'Université de Provence, Laboratoire du Cirade avec le soutien financier de la Région Paca. Merci à l'Ardm pour le soutien financier pour la participation à ce colloque. poisard@unimeca.univ-mrs.fr

[2] UMR ADEF, Université de Provence, INRP, IUFM d'Aix-Marseille.

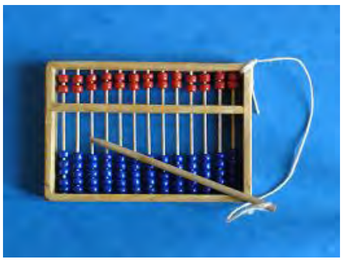
particularité essentielle est que nous ne nous situons pas dans le cadre classique des observations en didactique des mathématiques, celui de la classe intra muros. Nous analysons des situations qui vivent en relation avec le milieu de la classe, mais physiquement dans un autre lieu : un centre d'animation scientifique et technique qui reçoit des scolaires.

L'enseignement qui nous intéresse est celui des mathématiques, le niveau celui du cycle 3 du primaire. Notre questionnement touche différentes strates et différents acteurs de ces pratiques d'animation, en particulier le temps des animations et leur impact sur l'activité cognitive. Quels sont les moments importants pour l'apprentissage qui se réalisent au centre ? Quand ? Comment ? En mathématiques ou dans un autre domaine, scolaire ou non ? Existe-t-il un lien à faire entre l'école et le centre ? Qui ? Comment ? Quand ?

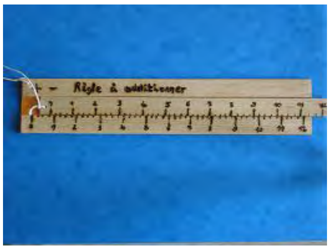
Quels peuvent être les objets matériels intéressants pour un apprentissage du calcul ? Comment caractériser ces objets ? Quel est leur effet cognitif ? Les contraintes d'utilisation ?

1.2 Observations

Les observations ont porté (d'octobre 2003 à mai 2004) sur quatre classes de CM2 qui sont venues au centre d'animation sur le thème des instruments à calculer (entretiens enfants, instituteurs, animateurs, questionnaires enfants, films des séances au centre, expression écrite en classe après chaque séance). Ce choix a été motivé par les contraintes du centre et par la thématique à aborder : les mathématiques. Chaque classe vient trois journées au centre, celle-ci est divisée en trois, deux groupes sont avec des animateurs pour construire des instruments avec divers outils (scies, perceuses électriques...) et le troisième groupe travaille avec l'instituteur. La réalisation des objets n'inclut pas une phase de réflexion sur la conception comme c'est le cas pour la démarche de projet en technologie au collège. Le double objectif de l'animation scientifique : celui de recherche de plaisir pour les enfants avec une finalité d'apprentissage est un des points délicats à produire dans de bonnes conditions. Une grosse part des explications est laissée volontairement à l'école, la démarche de l'instituteur va donc déterminer l'intérêt didactique des séances. Le thème des instruments à calculer comporte la fabrication et l'étude du boulier chinois, des bâtons à multiplier (Néper et Genaille-Lucas) et de la règle à additionner (règle à calcul pour l'addition et la soustraction). Voici quelques photos d'instruments réalisés par les enfants.



Le boulier chinois



La règle à additionner

Les bâtons de Néper

Les réglettes de Genaille-Lucas

Le temps des animations constitue un moment important de l'apprentissage où les enfants sont fortement valorisés par la réalisation d'une œuvre personnelle. Même si, l'utilisation rapide des objets pendant les animations ne semble pas permettre aux enfants une appropriation des modes de fonctionnement des instruments, ces moments sont décrits par les enfants comme « héroïques » lors des entretiens où chaque détail est mentionné et où le déroulement des séances est repris point par point ce qui montre bien une activité extraordinaire c'est à dire qui sort de l'ordinaire.

Lors des séances avec l'instituteur, nous avons choisi d'étudier les instruments en posant aux enfants la question : Comment ça marche ? Pourquoi ça marche ? L'hypothèse est que l'exploration produit une activité qui s'organise bien autour d'un enseignement de mathématiques. Dans l'atelier, nous mettons au travail les participants autour de ces mêmes questions.

2 -LE BOULIER CHINOIS OU SUAN-PAN

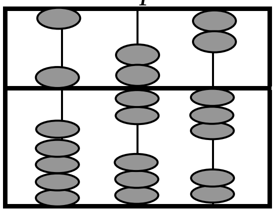
L'usage du boulier remonte au moins au 13ème siècle en Asie, sûrement même aux tous premiers siècles après J-C. Il constitue un instrument portatif (à l'inverse des abaques), d'usage simple et efficace pour les opérations élémentaires. Pour nous, le boulier est un support d'activité en mathématiques, l'utilisation que nous montrons ici n'est pas obligatoirement celle d'une utilisation courante, machinale comme c'est le cas lorsqu'on apprend à l'utiliser en Chine ou au Japon depuis l'enfance. Le but est de comprendre pourquoi un tel objet est efficace pour faire des calculs et non pas d'apprendre par cœur les règles de son utilisation.

2.1 Comment ça fonctionne ?

Cette question est posée aux participants avec un boulier pour deux (au moins). Après un temps de réflexion et une mise en commun des résultats, quelques exemples intéressants sont travaillés.

Dans chaque tige le boulier chinois possède deux quinaires (qui valent chacune cinq) et cinq unaires (qui valent chacune un) et chaque tige représente une position du système décimal : unités, dizaines, centaines, etc. en partant de la droite vers la gauche. La position zéro s'obtient lorsque les boules sont vers le cadre extérieur c'est à dire que pour marquer un nombre on ramène les boules vers la barre transversale afin de déplacer les unaires et les quinaires en un seul mouvement.

Regardons cet exemple :



Comment lire ce nombre écrit sur le boulier ? Comment écrire autrement 12 centaines ? Combien de possibilités a-t-on sur le boulier chinois ?

2.2 Remarques importantes

Pour faire vivre une telle séance en classe, il faut anticiper les idées possibles des élèves pour relancer la recherche. Il semble nécessaire de faire une analyse complète du boulier avant de l'étudier en classe car le professeur doit montrer les limites d'utilisation si la proposition de l'élève n'est pas optimale : Comment écris-tu 8 ? Et 26 ? Et 1789 ? Quel est le plus grand nombre que tu peux écrire avec cette méthode ? Peux-tu lire facilement un nombre ? Souvent les enfants séparent le cadre du boulier en deux : les unités (là où il y a le plus de boules) et les dizaines (chaque boule vaut cinq), avec cette méthode, le nombre maximal inscriptible est 195. Mais alors est-il possible qu'un instrument de calcul comme le boulier réputé très efficace ne permette de compter que jusqu'à 195 ? !

En fin de primaire, l'enjeu de l'étude du boulier est de renforcer des notions de base, de les aborder autrement, c'est à dire de réorganiser des connaissances pour s'approprier la théorie dont ils connaissent la pratique. Par exemple faire le lien entre la numération positionnelle et le fait qu'un chiffre n'a pas la même valeur suivant sa position sur le boulier, ou encore retrouver le sens mathématique des additions qu'ils font en papier et crayon. Ces situations pourraient aussi être proposées en début du primaire pour découvrir ces notions.

2.3 L'addition puis la soustraction

Comment réaliser une addition puis une soustraction sur le boulier ? Avec le boulier on voit le passage des retenues car on l'effectue à la main. Il comporte une très bonne gestion de celles-ci car on peut commencer une opération par la gauche pour avoir un ordre de grandeur du résultat, sans avoir de soucis de retenue. Les nombres sont inscrits et cette inscription est dynamique, ce qui est impossible avec papier et crayon. Ce souci du report des retenues a été un point crucial pour la mécanisation des calculs : Quant est-il des retenues pour les multiplications ?

On peut l'écrire de cette manière :

	7	8	5
+	1	6	3
	8	12	8
	9	2	8

Ou encore :

	7	8	5
+	1	6	3
			8
+	1	2	0
+	8	0	0
	9	2	8

Peut-on réaliser 12,56+34,129 ? Oui, il est alors nécessaire d'établir une convention pour placer les unités, par exemple la quatrième tige en partant de la droite, ce qui laisse 3 chiffres inscriptibles après la virgule. On peut donc aussi travailler avec les décimaux sur le boulier.

2.4 La non unicité d'écriture

Pour aborder ce point, nous proposerons aux participants d'inscrire 10 de trois manières différentes et de réfléchir sur la manière la plus économique. Comment et pourquoi la définir ? On rencontre une situation similaire avec les fractions que l'on apprend à écrire de façon irréductible, on a bien plusieurs manières pour écrire un même nombre : 10/2=5 ou 18/12=3/2. Avec les entiers, c'est la même chose : 0,9999…=1.

Enfin, nous effectuerons l'opération 1038-55 afin de montrer que comme en algèbre, sur le boulier il est parfois nécessaire de décomposer une écriture pour arriver au résultat. Par exemple il faut parfois passer par $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ c'est à dire l'inverse de la factorisation pour trouver un résultat.

Récapitulatif des notions mathématiques

Les savoirs disciplinaires mathématiques mis à jour par l'étude du boulier sont :

La numération de position en base 10 ainsi que la notion d'unicité d'écriture d'un nombre

L'addition et la soustraction avec la recherche de méthodes économiques qui se rapprochent du raisonnement du calcul mental (par exemple la décomposition (-9=-10+1) et la manipulation réelle des retenues

L'écriture et la lecture des grands nombres

La multiplication : par la méthode d'additions successives qui devient rapidement inadaptée aux grands calculs et en connaissant les tables de multiplication avec le décalage du zéro

La division : par la méthode des soustractions successives et en connaissant les tables.

Ces savoirs concernent d'une part la numération et le calcul ; mais aussi le raisonnement, le mode de pensée propre aux mathématiques (Grenier et Payan, 2003), en particulier l'unicité d'écriture et la méthode économique.

3 -TRAVAIL PAR GROUPES DES PARTICIPANTS

3.1 Les questions de recherche

L'ensemble des participants est divisé en quatre groupes avec chacun une question de travail (et environ 30 minutes de réflexion).

Comment réaliser une multiplication avec le boulier chinois ? Par exemple multiplier 27 par 82.

Le boulier chinois : combien peut-on enlever de boules pour pouvoir encore compter ?

Les bâtons de Néper : comment ça marche ? Peut-on les améliorer c'est à dire prendre en charge la retenue ?

Les réglettes de Genaille-Lucas : comment ça marche ? Comment gérer les retenues pour les multiplications ?

3.2 La mise au point

3.2.1 La multiplication avec le boulier

La méthode classique s'écrit sur une feuille :

		3	7
	x		5
	1	8	5

On dit à l'oral ou dans sa tête :
« 5 fois 7 : 35 je pose 5 et je retiens 3. 5 fois 3 15 et 3 : 18 »

		3	7	
	x		5	
		3	5	5x7
+	1	5	0	5x30
	1	8	5	

Avec le boulier le calcul se décompose de telle manière que l'on n'a pas de retenue (le « je retiens 3 » de précédemment). Ce qui est intéressant avec cette méthode c'est que l'on voit mieux le décalage, on remonte au sens mathématique. Pour écrire la seconde ligne, on se place dans la tige de dizaines, on laisse la tige des unités vide car on va multiplier 5 unités par 3 dizaines.

3.2 2 Enlever des boules au suan-pan

La question de départ peut se décliner de deux manières : Combien peut-on enlever de boules au maximum par tige pour pouvoir calculer à la manière traditionnelle ? Ou bien : Peut-on avoir une écriture unique de tous les nombres en base 10 ?

Cette recherche nous fait (re)découvrir le boulier japonais ou soroban qui possède le nombre de boules minimales c'est à dire quatre unaires et une quinaire. Son apprentissage nécessite beaucoup plus de dextérité. Cette amélioration du suan-pan date des années 1950.

En fait si on pousse le raisonnement du nombre minimum de boules, il suffit d'une boule par tige pour pouvoir inscrire n'importe quel nombre en binaire !

On peut aussi explorer d'autres pistes : Quelles valeurs peut-on donner aux boules pour que l'on puisse écrire tous les nombres (toujours en base 10)? Si certaines boules sont collées entre elles, peut-on encore utiliser le boulier ? Sous quelles conditions ?

3.2 3 Les bâtons de Néper

En 1617, le mathématicien écossais John Néper publie *Rhabdologia*, dans lequel il explique le principe de fonctionnement de bâtons pour réaliser des multiplications en ne faisant que des additions. Le principe est le même que celui de la multiplication per gelosia utilisé dès le 13ème siècle et qui sera d'usage en Islam, en Chine et en Europe. Ces bâtons seront utilisés en Europe jusqu'à la moitié du 19ème siècle.

Regardons l'exemple de 246 par 63.

Multiplication per gelosia (additions diagonale par diagonale)

	2	4	6
6	1 / 2	2 / 4	3 / 6
3	0 / 6	1 / 2	1 / 8
15	4	9	8

Décomposition de l'algorithme traditionnel

			2	4	6	
		x		6	3	
				1	8	3x6
+			1	2	0	3x40
+			6	0	0	3x200
+			3	6	0	60x6
+		2	4	0	0	60x40
+	1	2	0	0	0	60x200
	1	5	4	9	8	

3.2 4 Les réglettes de Genaille-Lucas

Edouard Lucas est un mathématicien français qui proposa d'améliorer les bâtons de Néper c'est à dire de rendre automatiques certains calculs. C'est Henri Genaille, un ingénieur français qui donna une réponse en 1885. Ces réglettes qui seront utilisées jusque dans les années 1910, permettent une lecture directe en supprimant les additions intermédiaires. On soulève ici l'étude des retenues lors des multiplications. Quelle est la retenue maximale possible pour une addition de deux nombres ? Et pour une multiplication de deux nombres ?

4- CONCLUSION

Dans l'étude des instruments à calculer, nous pointons bien des savoirs mathématiques visibles. L'enjeu n'est pas de devenir expert du boulier comme le sont par exemple les marchands chinois qui apprennent par cœur dès le plus jeune âge les règles d'utilisation du boulier. Le boulier ne fait pas partie de notre culture, il est le support d'une activité en mathématiques et peut permettre à la classe de se poser de nouveaux problèmes et de revisiter (à la fin du primaire) certaines notions familière depuis plusieurs années que nous pouvons aussi appeler des œuvres.

Ce thème des instruments semble intéressant pour aborder des connaissances sous un autre angle avec la particularité d'avoir un support matériel, comme l'élève doit apprendre à le faire avec une calculatrice. D'ailleurs, c'est dans ce contexte qu'il est intéressant de remonter à la source et d'imaginer une progression qui permette de comprendre pourquoi de nos jours la calculatrice est devenue familière en classe. Comment faisait-on avant ? En commençant par la numération égyptienne, puis par la numération décimale avec le texte de Stévin en continuant sur les abaques, bouliers, réglettes puis sur le problème de la mécanisation des retenues (Pascal, Schickard) et les instruments analogiques (règle à calculs) on arrive jusqu'à l'ordinateur.

D'après les instructions officielles, l'usage de la calculette doit donner au calcul posé (technique opératoire) le rôle de renforcer la compréhension. Cette compréhension peut aussi se construire autour du boulier, des bâtons de Néper, des réglettes de Genaille, de la règle à calcul…

D'autre part, ce travail s'inscrit dans une définition des mathématiques comme une science expérimentale qui se construit autour d'expériences, de réalisations matérielles, de manipulations, d'observations et de mesures comme c'est le cas en sciences physiques et en sciences de la vie et de la terre. Notre objectif est de déterminer les contraintes pour qu'un travail expérimental soit aussi un travail mathématique.

Quelques références

AYMÉ, N. (1997). Le boulier chinois. Actes du colloque : L'Océan Indien, au carrefour des mathématiques arabes, chinoises, européennes et indiennes. IUFM de La Réunion. Disponible sur :
http://www.reunion.iufm.fr/dep/mathematiques/Seminaires/ActesKol.html

BARBIN, E. & LE GOFF J.-P. (2000). Si le nombre m'était conté… Paris : Ellipses.

BOSCH, M. & CHEVALLARD Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Recherche en Didactique des Mathématiques, 19, 77-124.

CHABERT, J.-L., BARBIN, E., GUILLEMOT, M., & al (1994). Histoires d'algorithmes : du caillou à la puce. Paris : Belin.

CHEVALLARD, Y., (2004). Enseigner les maths aujourd'hui, Cahiers pédagogiques, 427, 34-36.

CHEVALLARD, Y. (2001). Les TPE comme problème didactique, Actes du Séminaire National de Didactique des mathématiques.
Disponible sur : www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fdf/topos3.html

CUMIN, J., HOSSENLOPP, J. (1994). Le boulier : initiation. Paris : Chiron.

CUMIN, J., HOSSENLOPP, J. (1998). Le boulier : perfectionnement. Paris : Chiron.

Ermel Enseignants, apprentissages numériques en CE1, 1993, INRP, Paris : Hatier.

DEFORGE, Y. (1990). L'oeuvre et le produit. Seyssel : Champ Vallon.

GODIN, F., TIMON, R., WOROBEL, M. (2000). Math CM2, Paris : Hachette.

GRENIER, D. & PAYAN, C. (2003). Situations de recherche en "classe", essai de caractérisation et proposition de modélisation. Les cahiers de laboratoire Leibniz, 92. Disponible sur : www-leibniz.imag.fr/LesCahiers

HÉBERT, E. (Dir.). (2004). Instruments scientifiques à travers l'histoire, Paris : Ellipses.

IFRAH, G. (1981). Histoire universelle des chiffres, Paris : Robert Laffont.

MARGUIN, J. (1994). Histoire des instruments et machines à calculer : trois siècles de mécanique pensante, 1642-1942. Paris : Hermann.

MARTZLOFF, J.-C. (1987). Histoire des mathématiques chinoises. Paris : Masson.

Mathématiques CM2, Paris : Hachette éducation.

MERCIER, A., SALIN, M.-H. (1988). L'analyse a priori, outil pour l'observation. Actes de l'université d'été de didactique des mathématiques. IREM de Bordeaux.

SHÄRLIG, A. (2001). Compter avec des cailloux. Lausanne : Presses Polytechniques Universitaires Romandes.

Sites intéressants

Sur le boulier :

http://www.reunion.iufm.fr/dep/mathematiques/Seminaires/ActesKol.html
http://www-cabri.imag.fr/nathalie/boulier/boulier.htm

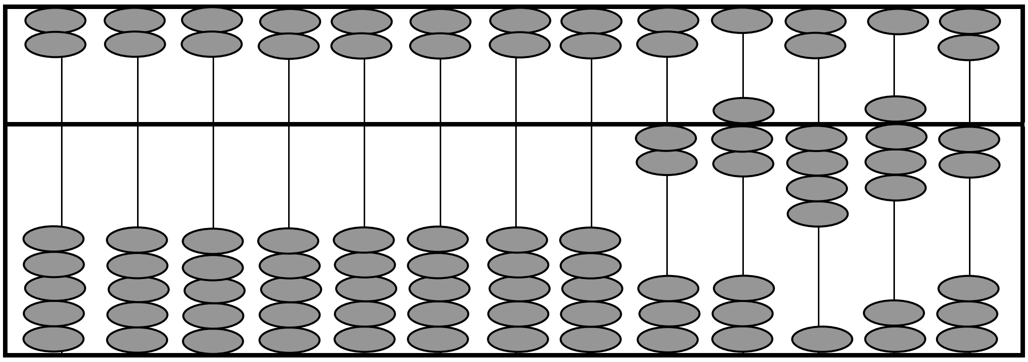
Sur les bâtons :

http://infohost.nmt.edu/~borchers/napier/napier.html : modèles
http://www.animath.fr/UE/Charb/Charb.html#B
http://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/maths/apmep/activites/Neper.htm (attention, erreur sur la baguette du 8 du premier dessin pour Genaille)
http://www.arts-et-metiers.net/magic.php?P=183&ID=19&lang=fra&flash=f&s1=&s2= (attention au sens des diagonales)

Annexe : Compléments sur le mode de fonctionnement des instruments

Nous donnons ici quelques compléments mais le but de l'atelier était de donner des questions pour chercher : Comment ça marche ? Pourquoi ça marche ?

• Le boulier chinois (ou suan-pan)



Sur ce boulier est inscrit le nombre 27 482 qui se décompose :

$$27482 = 2\times10^4 + 7\times10^3 + 4\times10^2 + 8\times10 + 2$$

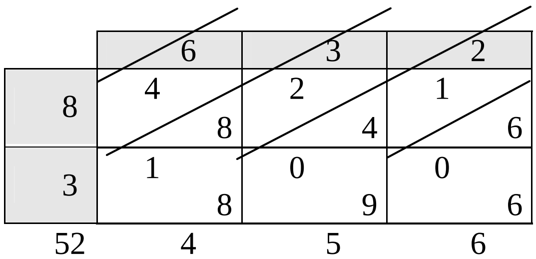
• Les bâtons à multiplier

Regardons l'exemple de 632 par 83.

Méthode traditionnelle
(ou de Fibonacci) :
632x83 = 632x3 + 632x80

			6	3	2	
		x		8	3	
		1	8	9	6	3x632
+	5	0	5	6	0	80x632
	5	2	4	5	6	

Multiplication per gelosia
(ou par grillage) :
632x83 = 632x80 + 632x3



Méthode par décomposition :
632x83 = 3x2 + 3x30 + 3x600 + 80x2 + 80x30 + 80x600.

			6	3	2	
			x	8	3	
					6	3x2
+				9	0	3x30
+		1	8	0	0	3x600
+			1	6	0	80x2
+		2	4	0	0	80x30
+	4	8	0	0	0	80x600
	5	2	4	5	6	

Avec les bâtons de Néper :
632 x 83 = (632x8x10) + (632x3) = 50560 + 1896. Attention à ne pas oublier les retenues.

X	**6**	**3**	**2**
1	0/6	0/3	0/2
2	1/2	0/6	0/4
3	1/8	0/9	0/6
4	2/4	1/2	0/8
5	3/0	1/5	1/0
6	3/6	1/8	1/2
7	4/2	2/1	1/4
8	4/8	2/4	1/6
9	5/4	2/7	1/8

		6	3	2
1	0	6	3	2
2	0	2	6	4
	1	3	7	5
3	0	8	9	6
	1	9	0	7
	2	0	1	8
4	0	4	2	8
	1	5	3	9
	2	6	4	0
	3	7	5	1
5	0	0	5	0
	1	1	6	1
	2	2	7	2
	3	3	8	3
	4	4	9	4
6	0	6	8	2
	1	7	9	3
	2	8	0	4
	3	9	1	5
	4	0	2	6
	5	1	3	7
7	0	2	1	4
	1	3	2	5
	2	4	3	6
	3	5	4	7
	4	6	5	8
	5	7	6	9
	6	8	7	0
8	0	8	4	6
	1	9	5	7
	2	0	6	8
	3	1	7	9
	4	2	8	0
	5	3	9	1
	6	4	0	2
	7	5	1	3
9	0	4	7	8
	1	5	8	9
	2	6	9	0
	3	7	0	1
	4	8	1	2
	5	9	2	3
	6	0	3	4
	7	1	4	5
	8	2	5	6

Avec les réglettes de Genaille-Lucas :

632x83 = (632x8x10) + (632x3) = 50560 +1896.

Ici les retenues sont gérées par les réglettes. On commence la lecture par les unités, les triangles noirs indiquent le sens de lecture.