RAISONNEMENT PLAUSIBLE VERSUS RAISONNEMENT DE NÉCESSITÉ : OÙ EST LA FRONTIÈRE ?

Richard CABASSUT

Formateur à l'IUFM d'Alsace
richard.cabassut@alsace.iufm.fr

Résumé :
Cet article présente l'une des facettes d'un travail de thèse en cours, sous la direction de B.PARZYSZ. L'auteur s'intéresse à deux types de raisonnements, le " raisonnement plausible " et le " raisonnement de nécessité " et s'interroge sur les modalités de passage de l'un à l'autre. Alors que le raisonnement dit " de nécessité " est reconnu car de la forme : *A est vrai et (si A alors B) vrai, donc B est nécessairement vrai*, le raisonnement dit " plausible " est moins étudié : *B est vrai et (si A alors B) vrai, donc A est davantage plausible*.
Il montre la présence de ces deux types de raisonnements dans les programmes, des outils pédagogiques et des productions d'élèves de l'école primaire. Il analyse que ce qui est souvent un raisonnement de nécessité pour l'élève n'est qu'un raisonnement plausible pour le mathématicien. Il s'interroge sur le rôle que doit jouer le professeur dans ces situations.

Éclairage théorique et questionnement

1.1 Argumentation et démonstration

En mathématique, l'école primaire est le lieu de l'initiation à l'argumentation alors que le collège est le lieu de l'initiation à la démonstration. Commençons par différencier ces deux notions.

1.1.1 pour les non-mathématiciens

Pour [Perelman 1999, pp. 1-3], “ l’argumentation est la manière de présenter et de disposer les arguments ; le terme désigne aussi l’ensemble des arguments qui résulte de cette présentation. En logique formelle, dans son sens technique, le mot “argument” indique une valeur déterminée, susceptible d’être substituée à une variable dans une fonction. Dans son sens usuel, l’argument est soit un raisonnement destiné à prouver ou à réfuter une proposition donnée, soit une raison avancée à l’appui d’une thèse ou contre celle-ci. Dans ce sens, on opposera l’argument à la preuve, et l’argumentation à la démonstration. C’est uniquement dans ce cas que l’argumentation présente une spécificité méritant une étude particulière. [...] L’étude de l’argumentation analysera les techniques discursives permettant de provoquer ou d’accroître l’adhésion d’un auditoire aux thèses qu’on présente à son assentiment. Cette définition met en évidence ce qui différencie profondément l’argumentation de la démonstration. Celle-ci est une déduction visant à prouver la vérité ou la probabilité calculable de sa conclusion, à partir de prémisses admises comme vraies ou probables. Par opposition à la démonstration, qui peut se présenter sous la forme d’un calcul, l’argumentation vise à persuader ou à convaincre, et n’est concevable que dans un contexte psychosociologique. Alors que la démonstration se déroule d’une façon abstraite, indépendamment de tout autre contexte que celui du système, qu’elle est correcte ou incorrecte, étant ou non conforme aux règles d’inférence du système, l’argumentation recourt à des arguments, relevants ou irrelevants, plus ou moins forts, plus ou moins adaptés à l’auditoire auquel ils s’adressent. Le raisonnement argumentatif se fonde non sur des vérités impersonnelles, mais sur des opinions concernant des thèses de toute espèce : le champ d’application de la théorie de l’argumentation dépasse ainsi largement celui de la théorie de la démonstration, car les argumentations portent sur tout ce qui peut être objet d’opinion, jugement de valeur ou jugement de réalité, l’adéquation d’une théorie ou l’opportunité d’une décision. Une démonstration fournit des preuves contraignantes, une argumentation présente des raisons pour ou contre une thèse déterminée ”. Dans cette approche la démonstration remplit une fonction de preuve par des raisonnements déductifs contraignants, à l’intérieur d’un système, que nous qualifierons de raisonnements de nécessité, alors que l’argumentation remplit une fonction de persuasion par des raisonnements, plus ou moins convaincants pour un auditoire, que nous qualifierons de raisonnements plausibles.

1.1.2 Pour des didacticiens des mathématiques

Par exemple, pour Houdebine [1990, p.26], une argumentation est un “ texte ou discours dont le but est de convaincre un partenaire. Le texte contient des arguments, c’est-à-dire des affirmations destinées à convaincre et ces arguments sont liés par des mots qui structurent le texte en vue de convaincre. L’argumentation dépend du partenaire à laquelle elle s’adresse. Elle n’a vraiment de sens que s’il y a quelqu’un à convaincre ” ; une démonstration est “ un texte argumentatif spécifique des mathématiques (structure particulière, arguments pris parmi des résultats déjà énoncés), dont la sémantique est liée à la résolution de problème et à la preuve ”.

Pour Duval [1992, p. 42-43], “ une argumentation n’est pas une démonstration [...] Pour qu’un raisonnement puisse être une démonstration, il est nécessaire qu’il soit un raisonnement valide[1]. L’argumentation, au contraire, est un raisonnement qui n’obéit pas à des contraintes de validité mais à des contraintes de pertinence. Cette différence est classiquement exprimée par le fait que l’une aurait pour objectif la vérité et l’autre viserait la vraisemblance et la conviction d’autrui ou de soi-même ”. Alors que pour Houdebine une démonstration peut être une argumentation, c’est impossible pour Duval. Cependant chez les deux auteurs se retrouve le fait qu’une démonstration est constituée de raisonnements de nécessité et ne peut pas être constituée de raisonnements de plausibilité. Par contre, dans une argumentation, il est possible d’utiliser un raisonnement de plausibilité pour accroître la conviction, la vraisemblance ou la pertinence.

Pour [Ermel 1999, p.42] “ dans une argumentation les arguments ne sont donc pas reliés en fonction d’un lien logique formalisé, mais en fonction de leur contenu. D’une certaine manière, le raisonnement déductif s’apparente à un calcul, l’argumentation à un discours ”. Voilà ici, pour la démonstration, les raisonnements de nécessité qui correspondent à la nécessité de la logique ou du calcul. Mais pour Ermel, l’argumentation est orientée vers le sémantique alors que la démonstration s’oriente vers le syntaxique.

[1] A propos de la validité d’un raisonnement, Duval [1995, p.212] précise : “ la validité d’un raisonnement dépend du respect de règles pour l’organisation des propositions entre elles, et non pas du contenu des propositions ”.

1.1.3 Y a-t-il une argumentation mathématique ?

On peut se poser la question de l'existence ou de la spécificité d'une argumentation mathématique.

[Balacheff 1999 a, p.1] s'interroge : " L'argumentation a-t-elle une place dans l'enseignement des mathématiques ? Certains répondent positivement, et on voit même déjà l'argumentation apparaître explicitement comme objet d'enseignement dans certains curricula. Je voudrais proposer ici au débat la thèse selon laquelle il n'y aurait pas de continuité ni celle de rupture entre argumentation et démonstration (ou preuve en mathématique), mais une relation complexe et constitutive du sens de chacune : l'argumentation se constitue en un obstacle épistémologique à l'apprentissage de la démonstration, et plus généralement de la preuve en mathématique. Comprendre la démonstration c'est d'abord construire un rapport particulier à la connaissance en tant qu'enjeu d'une construction théorique, et donc c'est renoncer à la liberté que l'on pouvait se donner, en tant que personne, dans le jeu d'une argumentation. Parce que ce mouvement vers la rationalité mathématique ne peut être accompli qu'en prenant effectivement conscience de la nature de la validation dans cette discipline, il provoquera la double construction de l'argumentation et de la démonstration. L'argumentation dans la pratique commune est spontanée, comme le soulignent ceux qui travaillent le discours. Forgée dans les échanges familiaux, dans la cour de l'école, dans des circonstances multiples et souvent anodines, la compétence argumentative de l'élève est à l'image des pratiques familières : elle va de soi. La classe de mathématique est l'un des lieux où l'existence de cette pratique peut être révélée parce que soudain elle apparaît inadéquate (mais les situations pour susciter cette prise de conscience sont difficiles à construire). Ce serait même à mes yeux une erreur de caractère épistémologique que de laisser croire aux élèves, par quelque effet Jourdain, qu'ils seraient capables de production de preuve mathématique quant ils n'auraient qu'argumenté ".

Pour [Ermel 2001 a, p.30-31] il existe une argumentation mathématique : " argumenter, c'est d'abord justifier ce qu'on dit, c'est-à-dire étayer un énoncé par un autre énoncé [...] Il ne faut pas perdre de vue la spécificité de l'argumentation en mathématiques où il s'agit d'établir la vérité d'une proposition, dans un domaine donné, en faisant appel à des connaissances et à des raisonnements, et où des règles du débat sont différentes puisqu'il s'agit d'administrer la preuve d'une proposition […] Apprendre à argumenter en mathématiques, c'est d'abord être capable de se dégager d'arguments extra-mathématiques. La vérité d'une proposition ne dépend pas du statut, social ou scolaire, de son énonciateur, une proposition n'est pas vraie parce que c'est un bon élève qui l'a formulée, mais pour de toutes autres raisons, parce qu'elle repose sur des connaissances mathématiques reconnues et acceptées de tous ".

" L'argumentation en mathématique (s'appuyant sur un corpus de définitions et de théorèmes bien établis), doit comporter, comme argumentation heuristique, des " sous-programmes " de raisonnement valide, même si on ne sait pas encore relier ces différents sous-programmes pour arriver à un arbre déductif complet qui corresponde à une démonstration. Selon nous l'argumentation mathématique consiste à établir au moyen de raisonnements la valeur de vérité d'une proposition mathématique (ce qui suppose que ces raisonnements sollicités soient reconnus comme licites lors des débats constitués par la classe). Ce travail d'argumentation mathématique se distingue donc de celui de l'argumentation tel qu'il peut se développer dans d'autres domaines par son cadre et son objet, mais aussi par les critères qui permettent d'évaluer les propositions " [Ermel 1999, p.43].

[Pedemonte 2002, p.291-292] précise : " L'argumentation en mathématiques a toujours une finalité, un objectif qui détermine son orientation [...] L'argumentation mathématique doit être justificative [...]Le caractère justificatif de l'argumentation mathématique s'exprime dans sa forme : le raisonnement, qui est " la démarche d'une inférence explicite qui dérive l'affirmation d'une proposition à partir d'une ou plusieurs propositions données " (Duval, 1995, p.209). C'est pourquoi l'argumentation en mathématiques doit convaincre, et non persuader. Elle doit modifier les opinions en faisant appel à la raison. Elle doit être acceptée par un auditoire universel et non particulier [...] Le but d'une démonstration est de valider (qui est plus que convaincre), et elle s'adresse à un auditoire universel (l'ensemble des mathématiciens). Finalement, la démonstration est une argumentation particulière ".

Après avoir montré la variété de points de vue, nous allons proposer une distinction entre argumentation et démonstration reposant sur la distinction entre raisonnement plausible et raisonnement de nécessité. Nous empruntons cette dernière distinction à Toulmin.

1.2 Arguments de nécessité et arguments de plausibilité

Toulmin propose " la distinction entre arguments nécessaires et probables : c'est-à-dire entre les arguments dont la garantie nous autorise à avancer sans équivoque la conclusion (qui peut donc être accompagnée du qualificatif modal “ nécessairement ”) et ceux dont la garantie ne nous habilite qu’à tirer une conclusion provisoire (nuancée par le mot “ probablement ”), sujette à de possibles exceptions (“ vraisemblablement ”) ou conditionnelle (“ pourvu que… ”) ”. [Toulmin 1993, trad. P.d.B., p.184]. Cette distinction rappelle la distinction d’Aristote entre les preuves analytiques et les preuves dialectiques. Les démonstrations mathématiques utilisent uniquement des arguments nécessaires qui expriment des conditions suffisantes pour la réalisation de la conclusion, et s’interdisent d’utiliser des arguments probables qui expriment des conditions nécessaires. Du fait de cette ambiguïté du mot “ nécessaire ” nous préfèrerons l’expression “ argument de nécessité ” où la nécessité se réfère aux conditions “ suffisantes ” pour réaliser la conclusion (et non pas aux conditions “ nécessaires ” de réalisation de la conclusion). De même nous préfèrerons le mot “ plausible ” au mot “ probable ” pour trois raisons essentielles : d’une part le mot “ probable ” est très connoté en mathématiques et l’usage de Toulmin dépasse largement cette connotation ; d’autre part le mot “ plausible ” utilisé en mathématiques par Polya [1958] correspond bien à des raisonnements dont la conclusion n’est pas nécessaire sans connotation probabiliste ; enfin dans le cadre d’une comparaison avec l’Allemagne (qui ne fait pas l’objet de cet article) le terme “ plausible ” correspond à des mentions répétées dans les programmes allemands [Cabassut, 2003, p.759-760].

1.3 Raisonnement plausible dans l’enseignement des mathématiques

Coppé a souligné l’importance du raisonnement plausible mis en jeu dans la vérification dans les travaux d’élèves du secondaire : “ nous soulignons que c’est la limitation de l’incertitude plutôt que la certitude absolue qui est visée par l’élève [...] il peut faire une vérification qui lui apportera plus ou moins de certitude ou bien qui lui montrera que son résultat est faux ” [Coppé 1993, p.211-215] même si “ les processus de vérification sont faits la plupart du temps, dans le cadre du travail privé de l’élève, c’est-à-dire qu’ils ne sont pas montrés au professeur ” [ibid. p.209].

Balacheff a mis en évidence chez les élèves de collège deux types de preuves pragmatiques qui relèvent du raisonnement plausible : “ l’empirisme naïf consiste à assurer la validité d’un énoncé après sa vérification sur quelques cas ” et l’expérience cruciale “ désigne une expérimentation dont le résultat permet de choisir entre deux hypothèses [...] ce type de validation se distingue de l’empirisme naïf en ce que celui qui y recourt pose explicitement le problème de la généralisation et le résout en “ pariant ” sur la réalisation d’un cas qu’il puisse reconnaître pour aussi peu particulier que possible ” [Balacheff 1999 b, p.206].

Pedemonte signale que le raisonnement plausible est introduit par Pierce sous le nom d’abduction, en utilisant également le terme de plausibilité et montre son utilisation par les élèves du secondaire dans la phase de conjecture précédant l’élaboration d’une démonstration [Pedemonte 2002, p. 68].

Pour Durand-Guerrier, “ une assertion est dite contingente si sa vérité et sa fausseté sont toutes deux possibles ” [Durand-Guerrier 1996, p.237], éventuellement à un instant donné où on n’a pas encore les moyens de savoir si l’assertion est vraie ou fausse. Elle montre l’existence d’énoncés contingents, non seulement chez les élèves du secondaire, mais également dans la classe de mathématiques tout au long de la scolarité obligatoire et au-delà, dans les pratiques de classe, dans des récréations mathématiques, dans les manuels. Pour certains de ces énoncés contingents, le raisonnement mobilisé peut être un raisonnement plausible. L’exemple de la preuve par 9 est éloquent : elle renforce la plausibilité du résultat sans le certifier.

Tietze classifie les différents “ arguments de plausibilité :

(a) preuve à travers des arguments, qui sans doute accroissent la plausibilité, mais qui ne présentent pas une justification suffisante : par exemple l’indication d’après des faits analogues ou semblables, déjà reconnus comme vrais, le dessin d’une image ou d’un graphique ;

(b) justification du fait qu'on déduit de déclarations à vérifier des déclarations exactes respectivement acceptées[2] ; (c) vérification sur des cas isolés (induction incomplète) ". [Tietze 2000, p.158 ; trad. R.C.].

Le (b) exprime la conception du raisonnement plausible qu'expose Polya : de A, à vérifier, on déduit B ; comme B est exact ou accepté, on en déduit que A est davantage plausible. Ce qui peut se reformuler en : (si A alors B) vrai, et B est vrai, alors A est davantage plausible [Polya 1958].

1.4 Raisonnement plausible versus raisonnement de nécessité

Au terme de cet examen des différents points de vue théoriques, nous proposons d'adopter les définitions suivantes. Considérant des propositions A et B :

- un raisonnement de nécessité est de la forme : A est vrai et (si A alors B) vrai, donc B est nécessairement vrai.
- un raisonnement plausible est de la forme : B est vrai et (si A alors B) vrai, donc A est davantage plausible.

Lorsque dans une validation, la vérité de la conclusion est nécessaire, nous appellerons le raisonnement de validation une preuve ou une démonstration ; lorsqu'elle est plus ou moins plausible nous l'appellerons argumentation.

Une démonstration est une validation qui ne mobilise que des raisonnements de nécessité.

Une argumentation est une validation qui mobilise des raisonnements de nécessité ou de plausibilité. En ce sens une démonstration est une argumentation limite, sans aucun raisonnement de plausibilité, la plausibilité devenant maximale c'est-à-dire certitude.

Une argumentation ou une preuve mathématiques sont des argumentations ou des preuves pour lesquelles les raisonnements précédents, les propositions A et B concernent des objets mathématiques et les énoncés conditionnels (si A alors B) sont des énoncés mathématiques (définition, axiome, propriété, théorème).

Le terme de " démonstration " est souvent réservé aux preuves abstraites ou formelles, comme par exemple les preuves mathématiques. Si la validation nécessite une réalisation matérielle (preuve expérimentale) ou se base sur ce que l'on voit (preuve visuelle) ou sur le contenu et non la forme d'une proposition supposée vraie (preuve sémantique), le terme de " preuve " à celui de " démonstration " est souvent préféré. Certains auteurs comme [Balacheff 1988, p. 31] limitent le terme de " démonstration " aux seules preuves mathématiques. Dans les traductions, aux mots " preuve " et " démonstration " ne correspondent bien souvent que le seul mot " Beweis " en allemand ou le seul mot " proof " en anglais.

1.5 Questions à partir d'un exemple

Considérons un exemple inspiré de [IREM Paris 7 2002, p.19-29][3]. Le problème suivant a été proposé à des élèves de sixième[4] : " dessinez un polygone à 6 côtés, à 7 côtés, à 8 côtés, à 9 et à 10 côtés. Trouver le nombre de diagonales pour chacun des polygones. Trouver le nombre de diagonales pour un polygone à 100 côtés. Faire une rédaction de la démarche qu'on a suivie ".

Voici une réponse inspirée[5] par le témoignage de l'élève Jules concernant un octogone (dont le nombre de diagonale vaut $5\times8/2=20$) :

---

[2] Begründung dadurch, dass man aus der zu überprüfenden Aussage richtige bzw. akzeptierte Aussagen herleitet.

[3] IREM Paris 7, *Expériences de narration de recherches en mathématiques*, IREM Paris 7/ ACL-Editions Kangourou, Paris, 2002.

[4] On pourrait également le proposer à des élèves de cycle 3.

[5] Nous avons modifié le texte de l'élève pour abréger l'exemple. Cet exemple n'est donc pas authentique et vise simplement à illustrer les questions.

“ [1ère partie] A ce moment là nous pensions qu'il fallait multiplier le nombre de diagonales partant d'un point par le nombre de côtés divisé par 2 […] j'ai refait un polygone et là j'ai trouvé 20 diagonales, notre logique marchait. Mais nous n'étions pas sûr sauf Alexi, Fabrice
[2nde partie] et nous avons fait le polygone à 9 côtés : on a trouvé 27 diagonales on était sûr que notre logique marchait ”.

Formalisons le raisonnement de la 1ère partie.

Soit la proposition A : “ Le nombre de diagonales D(n) d'un polygone à n côtés vaut le nombre de diagonales issues d'un sommet (n-3) multiplié par le nombre de côté n divisé par 2 ”

Soit la proposition B : “ pour un octogone dessiné D(8)=20”

Le raisonnement de la première partie peut être schématisé sous la forme suivante :

B est vrai par vérification par comptage sur l'octogone dessiné ;

(si A alors B) vrai d'après la règle logique d'instanciation valable en mathématiques : si (pour tout polygone à n côtés, D(n)=(n-3) ×n/2) alors (pour un polygone à 8 côtés, D(8)=20) ; cette règle est une règle de raisonnement déductif qui part du général pour déduire le particulier ;

d'où le raisonnement plausible : B est vrai et (si A alors B) vrai, donc A est davantage plausible.

L'élève n'est pas sûr de la vérité de A : “ nous n'étions pas sûr ”.

Ici il a coïncidence entre le raisonnement plausible produit dans l'argumentation de l'élève Jules et le raisonnement plausible d'une argumentation mathématique car la propriété “ si A alors B ” utilisé ici est une propriété logique reconnue en mathématiques.

Par contre dans la deuxième partie la schématisation du raisonnement de Jules peut être la suivante.

Soit la proposition A : “ Le nombre de diagonales D(n) d'un polygone à n côtés vaut le nombre de diagonales issues d'un sommet (n-3) multiplié par le nombre de côté n divisé par 2 ”.

Soit la proposition B : “ pour un octogone dessiné D(8)=20 et pour un ennéagone donné D(9)=27 ”.

B est vrai par vérification par comptage sur l'octogone et l'ennéagone dessinés ;

(si B alors A) est vrai d'après un raisonnement inductif partant du particulier et induisant le général. Il correspond à l'empirisme naïf de [Balacheff 1987, pp. 163-165] qui “ consiste à tirer de l'observation d'un petit nombre de cas la certitude de la vérité d'une assertion ”. Ce raisonnement n'est pas accepté en mathématiques ; par contre dans la vie quotidienne[6] ce raisonnement peut être pratiqué.

[Blanché 1999, p.8-9] rappelle que, sous une forme nettement plus élaborée que l'empirisme naïf, le raisonnement inductif fonde les sciences expérimentales : “ Depuis Aristote, qui l'a introduit, le mot d'induction s'est chargé peu à peu d'un sens nouveau. Outre la distinction, qu'Aristote connaissait, entre l'induction complète ou totalisante, qui est rigoureuse, et l'induction généralisante ou amplifiante, qui se risque à étendre à un ensemble ce qui n'a été reconnu que sur quelques-uns de ses éléments, le mot en est venu à désigner, à l'époque moderne, le procédé par lequel se construisent les sciences expérimentales, qui consiste à s'élever, de l'observation des faits, à l'hypothèse d'une loi explicative ”.

Dans cette seconde partie Jules déclare être sûr de la vérité de la proposition B : ce qui s'analyse comme un passage du raisonnement plausible, accepté par la logique mathématique,

---

[6] Rappelons que des chercheurs invoquent même une logique de la vie quotidienne sous différentes dénominations : “ logique de la vie quotidienne ” [Stein 1986, p. 14], “ logique naturelle ” [Grize, 1996], “ logique en action ” [Toulmin 1993 p.181], “ logique appliquée ” [Toulmin 1993 p.315], “ logique pratique ” [Toulmin 1993 p.320], “ logique de la pratique ” [Bourdieu 1980, p.134], “ le raisonnement pratique ” [Audi,1989]. On peut également étudier d'autres logiques dans d'autres institutions : en droit [Perelman 1963, Haarscher 1994], dans les sciences expérimentales [Carnap, Chalmers, Hempel], en philosophie [Perelman 1952]…

de la première partie, à un raisonnement de nécessité de la logique quotidienne, mais rejeté par la logique mathématique.
On voit donc que la différence entre ces deux raisonnements tient d'une part à l'énoncé conditionnel mobilisé (qui sont en quelque sorte[7] réciproques l'un de l'autre : si A alors B dans la première partie, si B alors A dans la seconde partie) et d'autre part à la modalité de la conclusion (A est davantage plausible dans la première partie alors que A est sûr dans la seconde partie). Les points communs entre les deux raisonnements correspondent aux données communes (B est vrai) et à la conclusion commune (A est vrai) à la modalité près (A est plausiblement vrai contre A est sûrement vrai).

Voici une justification utilisant des raisonnements de nécessité acceptés en mathématiques et proposés par [IREM Paris 7 2002, p.35] :
“ A chaque fois que le nombre de côtés augmente de 1, le nombre de diagonales partant de chaque sommet augmente aussi de 1 Donc, il ne nous reste plus qu'à multiplier le nombre de diagonales partant de chaque sommet par le nombre de côtés et de diviser par deux car 1 diagonale vaut deux sommets. Nous avons trouvé aussi que le nombre de côtés moins 3 nous donne le nombre de diagonales partant de chaque sommet donc pour 100 il fallait faire : (100-3)×100÷2=4850 ”.

La frontière entre les raisonnements de nécessité ou de plausibilité n'est donc pas toujours très claire, notamment lorsque les logiques de référence et les énoncés conditionnels mobilisés ne sont pas explicités.
Nous allons donc observer où se situe cette frontière dans les programmes d'enseignements, dans des manuels de classe ou dans des productions d'élèves. Nous essaierons d'observer la position du maître dans ce contexte.

Les programmes

1.6 Dans les domaines non mathématiques

Les nouveaux programmes[8] de l'école élémentaire rappellent dans les domaines transversaux l'importance de l'exercice du débat réglé “ la tenue de débats où chacun doit savoir réfréner sa parole, laisser la place à celle de l'autre et comprendre son point de vue - même quand on ne le partage pas -, chercher à le convaincre en argumentant, est la première forme d'éducation la démocratie ” [p.48]. “ En sciences les nouveaux programmes prévoient que l'enfant réalise lui-même ses expériences et tienne un cahier d'observations. Acteur et responsable de la manipulation qu'il accomplit, il rend compte par écrit de l'expérimentation. C'est l'occasion par excellence d'apprendre à argumenter, à décrire, à présenter des hypothèses, à en peser la valeur ” [p.9]. Des objectifs des sciences expérimentales et de la technologie sont : “ participer activement à un débat argumenté pour élaborer des connaissances scientifiques en en respectant les contraintes (raisonnement rigoureux, examen critique des faits constatés, précision des formulations, etc.), utiliser à bon escient les connecteurs logiques dans le cadre d'un raisonnement rigoureux ” [p.175]. L'argumentation est évoquée dans différents autres domaines (littérature de jeunesse [p.187], géographie [p.218], …).
On observe donc la pratique de l'argumentation et de raisonnement de preuve ou de justification dans des domaines autres que les mathématiques. Blanché[9] précise : “ Le raisonnement est d'abord un moyen de preuve ou de justification. La façon la plus normale d'établir une proposition qui n'est pas immédiatement évidente, c'est de montrer qu'elle se rattache […] à telle autre dont la vérité est reconnue : ou bien elle en est la conséquence et alors la preuve est rigoureuse (démonstration mathématique) ou inversement elle l'a comme conséquence et alors la conclusion est seulement probable

[7] La proposition B n'est pas tout a fait la même dans chaque partie mais correspond dans les deux parties à un cas particulier de la proposition A.
[8] Ministère de l'éducation, *Qu'apprend-on à l'école élémentaire ?* , CNDP/XO Editions, 2002.
[9] BLANCHE Robert, *Raisonnement*, Encyclopédie Universalis, 1995

(preuve expérimentale) ". Cette pratique peut donner lieu à des raisonnements plausibles comme c'est le cas pour les preuves expérimentales ou à des raisonnements de nécessité comme dans le travail sur les connecteurs logiques évoqués ci-dessus.

Il nous semble intéressant d'éclairer les programmes de l'école primaire par ceux du collège, ce qui permet de mieux marquer les continuités et les ruptures. La rénovation des programmes de collèges précise la place de l'argumentation et de la validation dans le pôle des sciences[10].
" Au-delà de la perception directe, l'observation est assistée au collège par l'emploi d'*instruments*, objets techniques qui étendent les possibilités des sens. Elle est complétée par l'utilisation d'appareils de *mesure* et par l'exploitation mathématique des résultats qu'ils fournissent. […] La *démarche expérimentale* contribue, au-delà de la simple observation à une représentation scientifique, et si possible explicative, du monde […] Dans la continuité de l'école primaire, les programmes du collège privilégient pour les disciplines scientifiques une *démarche d'investigation* […] La démarche d'investigation scientifique présente des analogies entre son application au domaine des sciences expérimentales et celui des mathématiques. La spécificité de chacun de ces domaines, liée à leurs objets d'étude respectifs et à leurs méthodes de preuve, conduit cependant à quelques différences dans la réalisation. Une éducation scientifique complète se doit de faire prendre conscience aux élèves à la fois de la proximité de ces démarches (résolution de problèmes, formulation respectivement d'hypothèses explicatives et de conjectures) et des particularités de chacune d'entre elles, notamment en ce qui concerne la validation, par l'expérimentation d'un côté, par la démonstration de l'autre " [p.2-3]. Parmi les différents moments d'une séance d'investigation on notera :

- " la formulation de conjectures, d'hypothèses explicatives, de protocoles possibles :

- formulation orale ou écrite de conjectures ou par les élèves (ou les groupes) ;
- élaboration éventuelle d'*expériences*, destinées à valider ces hypothèses ;
- communication à la classe des conjectures ou des hypothèses et des éventuels protocoles expérimentaux proposés ;

- l'investigation ou la résolution du problème conduite par les élèves :

- moments de débat interne au groupe d'élèves ;
- contrôle de l'isolement des paramètres et de leur variation, description et réalisation de l'expérience (schémas, description écrite) dans le cas des sciences expérimentales ;
- description et exploitation des méthodes et des résultats ;
- recherche d'éléments de justification et de preuve, confrontation avec les conjectures et les hypothèses formulées précédemment ;.

- l'échange argumenté autour des propositions élaborées :

- communication au sein de la classe des solutions élaborées, des réponses apportées, des résultats obtenus, des interrogations qui demeurent ;
- confrontation des propositions, débat autour de leur validité, recherche d'arguments ; en mathématiques, cet échange peut se terminer par le constat qu'il existe plusieurs voies pour parvenir au résultat attendu et par l'élaboration collective de preuves " [p.3]

Se voit très nettement la distinction, commune aux sciences expérimentales et aux mathématiques, entre :
- une phase hypothétique avec des hypothèses (explicatives) pour les sciences expérimentales et des conjectures pour les mathématiques, basée sur des raisonnements plausibles,
- une phase déductive de validation des hypothèses ou des conjectures, soit par le recours à un raisonnement plausible dans le cas de l'expérimentation dans les sciences expérimentales, soit par le recours à un raisonnement de nécessité dans le cas de la démonstration en mathématiques ou par exemples dans le cas de validations non mathématiques recourant seulement à des éléments de logiques.
Alors que le terme démonstration n'apparaît que pour les seules validations mathématiques, les termes justifications ou preuves sont utilisés pour les validations en sciences ou en mathématiques.

---

[10] Ministère de l'Éducation, *La rénovation des programmes du collège, Consultation sur les projets proposés par le groupe d'experts, Introduction commune à l'ensemble des disciplines du pôle* [des sciences], 31 mars 2004, consulté le 5/05/04 sur le site : http://eduscol.education.fr/index.php?./D0082/consultecoll.htm

1.7 En mathématiques au cycle 2

Dans le document d'application[11] des programmes de mathématiques du cycle 2, il est fait référence au développement de l'argumentation dans le débat sur le " vrai " et le " faux " et au statut particulier de la preuve en mathématiques [p.5] : " Faire des mathématiques, penser des objets "abstraits " comme les nombres, les figures, débattre du " vrai " et du " faux " en utilisant des connaissances partagées qui permettent de dépasser l'argument d'autorité, c'est commencer à s'approprier des éléments de la culture scientifique […] La confrontation des résultats et des démarches dans des moments de débat, où la classe s'apparente à une petite " communauté mathématique ", permet de développer les compétences dans le domaine de l'argumentation […] Ces situations d'argumentation offrent une première occasion de sensibiliser les élèves à la question du statut particulier de la preuve en mathématiques. Si dans certains cas, celle-ci relève d'une expérience, dans d'autres cas elle s'appuie sur des connaissances mathématiques ". Ici la preuve expérimentale et la preuve mathématique se distinguent bien. Dans la suite du document d'application du cycle 2, il est précisé à propos du calcul posé [p.6] qu' " une part essentielle de l'activité doit résider dans la recherche de la compréhension et de la justification des techniques utilisées ". La place centrale pour la résolution des problèmes [p.7] a pour " but de développer chez les élèves un comportement de recherche et des compétences d'ordre méthodologique : émettre des hypothèses et les tester, faire et gérer des essais successifs, élaborer une solution originale et en éprouver la validité, argumenter ". Le test des hypothèses ou la gestion des essais successifs correspondent à une démarche expérimentale dans Les recours aux calculatrices, tableurs et logiciels " offrent l'occasion d'une approche plus expérimentale des mathématiques " [p.9]. Mais " il convient de distinguer les tâches de constat ou d'observation, qui invitent l'élève à lire une réponse sur le matériel, des tâches d'anticipation qui lui demandent d'élaborer, de construire par lui-même une réponse dont il pourra ensuite vérifier la validité en revenant à l'expérience " [p.10]. La géométrie est le lieu de la confrontation entre le raisonnement qui s'appuie sur le constat et l'observation et le raisonnement qui s'appuie sur les connaissances ; au cycle 2 l' appui porte sur le premier de ces raisonnements : " Au cycle 2, lors de la résolution de la plupart des problèmes de géométrie, les élèves vont d'abord prélever des propriétés de façon perceptive, puis être amenés à utiliser les instruments de géométrie pour vérifier les hypothèses émises. Par exemple, pour tracer un carré en choisissant quatre points parmi un ensemble de points donnés, au début du cycle, les élèves tracent simplement ce qu'ils pensent être un carré, alors qu'en fin de cycle ils accompagnent ce tracé d'une vérification qui s'appuie sur des propriétés du carré (longueur des côtés et angles droits, par exemple) et fait appel à l'usage d'instruments de géométrie. Au cycle 2, toutes les propriétés utilisées peuvent d'abord être perçues, avant d'être vérifiées à l'aide d'instruments ". On remarquera que la vérification instrumentale reste de nature expérimentale et correspond à des définitions fonctionnelles et non pas formelles.

1.8 En mathématiques au cycle 3

Le document d'application[12] des programmes de mathématiques du cycle 3 confirme les intentions précédentes en mentionnant les approfondissements suivants. A propos de la résolution de problèmes est travaillée particulièrement la compétence " argumenter à propos de la validité d'une solution produite par soi-même ou par un camarade (ceci suppose que les élèves ne pensent pas que la démarche est unique, et donc que l'enseignant accepte des démarches différentes) " [p.13]. " Le calcul mental réfléchi est l'occasion de rencontrer diverses façons d'effectuer un même calcul et d'avoir à justifier celle qui a été choisie, ce qui peut donner lieu à des premières activités de preuves " [p.25]. En géométrie "l'objectif principal est de permettre aux élèves de se familiariser avec les objets du plan et de passer progressivement de géométrie où les objets et leurs propriétés sont contrôlés par la perception à une géométrie où ils le sont par un recours à des instruments et par la connaissance de certaines propriétés […] L'argumentation à propos des outils utilisés, des propriétés mobilisées et des résultats obtenus constitue une part importante du travail des élèves " [p.30]. S'amorce ici le passage du raisonnement plausible basé sur la perception et la vérification instrumentée au raisonnement de nécessité basé sur la connaissance des propriétés.

---

[11] Ministère de l'Éducation, *Mathématiques cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2),* CNDP, juillet 2002

[12] Ministère de l'Éducation, *Mathématiques cycle des approfondissements (cycle 3),* CNDP, juillet 2002

“ Argumenter à propos de la validité d’une solution ” [p.41] est une compétence d’école primaire. Cependant le raisonnement déductif n’est pas une compétence exigible en fin d’école primaire même si le recours aux connaissances mathématiques et aux propriétés en remplacement de la perception ou de l’expérimentation est encouragé et ouvre la voie au raisonnement déductif. Aucune distinction claire entre conjecture et propriété admise ou validée n’est proposée, sans doute parce que dans la plupart des cas une validation mathématique par le seul raisonnement n’est pas possible. Par exemple en géométrie “ les activités du domaine géométrique ne visent pas des connaissances formelles (définitions), mais des connaissances fonctionnelles ” [p.30]. De ce fait des connaissances fonctionnelles basées sur la perception ou la vérification instrumentale ne permettent pas une validation mathématique par le seul raisonnement. Deux cas très fréquents permettent une validation par le raisonnement : la réfutation d’une conjecture par un contre-exemple, et la vérification exhaustive d’une propriété sur un ensemble fini.

1.9 En mathématiques au collège

Dans le cadre de la rénovation des programmes de collège[13] “ les mathématiques participent à l’enrichissement de l’emploi de la langue par les élèves, en particulier par la pratique de l’argumentation ” [p.1]. En géométrie il s’agit de “ passer de l’identification perceptive (la reconnaissance par la vue) de figures et de configurations à leur caractérisation par des propriétés (passage du dessin à la figure) [p.1][…] La question de la preuve occupe une place centrale en mathématiques. La pratique de l’argumentation pour convaincre autrui de la validité d’une réponse, d’une solution ou d’une proposition ou pour comprendre un “phénomène ” mathématique a commencé dès l’école primaire et se poursuit au collège pour faire accéder l’élève à cette forme particulière de preuve qu’est la démonstration. Si, pour cet objectif, le domaine géométrique occupe une place particulière, la préoccupation de prouver et de démontrer ne doit pas s’y cantonner […] En particulier, l’enseignant doit préciser explicitement qu’un résultat mathématique qui n’est pas démontré est admis [p .2] […] Dans le prolongement de l’école primaire, la place accordée à l’oral reste importante. En particulier, les compétences nécessaires pour la validation et la preuve (articuler et formuler les différentes étapes d’un raisonnement, communiquer, argumenter à propos de la validité d’une solution) sont d’abord travaillées oralement en s’appuyant sur les échanges qui s’instaurent dans la classe ou dans un groupe, avant d’être sollicitées par écrit individuellement [p .3] […] Le travail expérimental (calculs numériques avec ou sans calculatrice, représentations à l’aide ou non d’instruments de dessin et de logiciels) permet d’émettre des conjectures. La résolution de problèmes vise à donner du sens aux connaissances travaillées, puis à en élargir les domaines d’utilisation. Ces démarches s’accompagnent de la formulation de définitions et de théorèmes. Les élèves sont conduits à distinguer conjecture et théorème, à reconnaître les propriétés démontrées et celles qui sont admises. L’initiation au raisonnement déductif permet aux élèves de passer de l’utilisation consciente d’une propriété mathématique au cours de l’étude d’une situation à l’élaboration complète d’une démarche déductive dans des cas simples ” [p.12]

Au collège l’objectif d’accès au raisonnement déductif et à la démonstration est clairement énoncé ; le collège est donc bien le lieu de passage de l’argumentation à la démonstration. On marque une dichotomie entre ce qui est admis et ce qui est démontré, sans évoquer de positions intermédiaires. Conjecture et théorème sont clairement distingués.

Des manuels scolaires et des productions d’élèves

1.10 problème de contraintes

Dans un manuel :

Ce problème est proposé par le manuel [Ermel 2001 b, p.68] sous l’énoncé suivant :

“ Dans ma tirelire j’ai 32 pièces de monnaie. Je n’ai que des pièces de 2 € et des billets de 5 €. Avec ces 32 pièces et billets j’ai 97 €. Combien y a-t-il de pièces de 2 € et de billets de 5 € dans ma tirelire ? ”

[13] Ministère de l’éducation, *La rénovation des programmes du collège, Consultation sur les projets proposés par le groupe d’experts, Mathématiques* , 31 mars 2004, consulté le 5/05/04 sur le site : http://eduscol.education.fr/index.php?./D0082/consultecoll.htm

Différentes procédures sont envisagées ; par exemple :
- par un premier essai aléatoire puis des ajustements successifs (soit diminution du nombre de pièces et augmentation du nombre de billets ou le contraire) ; il faut compléter en prouvant l'unicité de la solution trouvée ;
- par une procédure systématique en se fixant une des contraintes, par exemple le montant total disponible : commencer par partir du nombre maximum de billets possibles auquel on adjoint des pièces ; puis diminuer systématiquement le nombre de billets ; cette procédure exhaustive permet d'assurer l'unicité de la solution.

Concernant l'unicité, Ermel précise [p.72] : " Peu d'élèves sont capables de justifier en mettant en évidence le fait, par exemple, qu'échanger une pièce de 2 € pour un billet de 5 € de façon à conserver le nombre de pièces et de billets produit un changement en plus ou en moins de 3 €, ce qui, donc, modifie la somme et de conclure en disant qu'il est impossible d'avoir une autre solution avec un nombre différent de pièces de 2 € et de billets de 5 € ".

Le seul raisonnement plausible susceptible d'apparaître concerne l'unicité de la solution : " Si on modifie le nombre de pièces et de billets la somme ou le nombre de pièces change donc il n'y a pas d'autres solutions ". Cette affirmation est vérifiée sur quelques exemples puis induite.

<u>Production d'élèves :</u>

Examinons quelques productions d'élèves concernant la justification ou la réfutation de propositions relatives au problème précédent extraites de [Massardier, Taquet 2004 p.27-29].

Les élèves arrivent par différentes procédures (aléatoire, par réajustement ou systématique) à trouver une solution : les raisonnements conduits sont des raisonnements de nécessité s'appuyant sur le calcul. Lorsqu'une preuve proposée est incorrecte (une erreur de calcul ou une contrainte non respectée), elle est réfutée par un autre élève (correction du calcul ou mise en évidence de la contrainte non respectée).

Pour montrer son unicité les deux preuves envisagées par le manuel apparaissent dans l'extrait suivant [ibid. p.28-29].

" L'enseignante : Alors, y a-t-il d'autres possibilités d'obtenir 97 euros avec 32 pièces et billets que 11 billets de 5 euros et 21 pièces de 2 euros ?
L'enseignante : […] Léa, alors qu'est-ce que tu as répondu oui ? non ?
Léa : On a répondu non.
L'enseignante : Pourquoi ?
Léa : Parce que lui (en montrant son camarade) il a calculé la 2 et moi là 5.
L'enseignante : Est-ce que tout le monde a compris ce que ça veut dire 'on a fait la 2ou la 5' ?
Pas de réponse
L'enseignante : Alors qu'est-ce que tu veux dire par là ?
Léa : J'ai fait la table de 2 et il a fait la table de 5.
L'enseignante : Donc vous avez testé la table de 2 et de 5. Les autres est-ce que vous pensez que ceci est un bon argument ? Où est-ce que vous pensez que ce n'est pas un bon argument ?
Jean-Baptiste : Si on fait la table de 5 et que ça ne marche pas, c'est sûr que la table de 2 ça ne marche pas non plus.
L'enseignante : Tu veux bien expliquer s'il te plaît ?
Jean-Baptiste : Ca ne sert à rien de le faire avec la table de 2 c'est pareil.
L'enseignante : En fait tu veux dire que si on commence par la table de 2 ou de 5 c'est pareil car c'est une addition donc si on fait 5 x 11 + 2 x 21 ou 2 x 21 + 5 x 11 c'est pareil.
Jean-Baptiste : Oui
L'enseignante : Bon, alors est-ce que le fait d'avoir testé toute la table de 2 ou de 5 est un bon argument pour dire qu'il n'y a qu'une seule solution ?
La classe : Oui
L'enseignante : D'accord, bon qui a un autre argument ?
Pas de réponse
L'enseignante : Raquel ?
Raquel : Je n'ai pas trouvé

L'enseignante : Alors prouvez-moi qu'il n'y a qu'une seule solution ? Qui a un argument ? Pablo ?
Pablo : Il n'y a pas d'autres solutions car à partir de 2 x 20 + 5 x 12 ça fait 100 et on dépasse à chaque fois et donc si on rajoute 1 on dépasse encore plus.
L'enseignante : D'accord tu penses que quand on fait la table des 5, on commence par 5 x 19 car au delà c'est trop grand et que ce n'est pas possible.
Pablo : J'ai fait 20 x 2 c'est 40 et après 5 x 12 ça fait 60 et si on additionne les deux ça fait 100. Et à chaque fois si on enlève un multiple de la table de 2 et on rajoute 5, ça fera toujours + 3 et alors on dépasse 97.
L'enseignante : Pablo, est-ce que tu peux réexpliquer pour que tes camarades comprennent bien ce que tu veux dire ?
Pablo : Si on fait 5 x 11 + 2 x 21, ça fait 97. Si on fait 5 x 12 + 2 x 20, ça fait 100. Si on fait 5 x 13 + 2 x 19, ça fait 103. Donc à chaque fois on ajoute 3.
L'enseignante : Donc on aura une somme différente à chaque fois…Donc comme vous l'avez dit il y a deux façons de démontrer : soit on fait toute la table de 5 et on teste toutes les possibilités et on s'aperçoit qu'il n'y en a qu'une ; soit on s'aperçoit que quand on change le nombre de pièces et de billets d'un côté et de l'autre ça augmente de 3 ou ça diminue de 3 donc ça n'est pas possible d'avoir une autre solution. Donc il n'y a qu'une seule solution ".

L'unicité donne lieu à des raisonnements de nécessité s'appuyant sur une étude exhaustive ou sur un raisonnement par l'absurde.

1.11 problème d'optimisation

Dans un manuel :

[Ermel 2001 a, p.75] propose la situation problème suivante au niveau d'un CM1 : " chercher dans les décompositions additives d'un nombre celle(s) dont le produit est le plus grand ".

Examinons les différents raisonnements acceptés en mathématique et envisagés par le livre.

- Des réfutations qui constituent à l'aide d'un contre-exemple des preuves de la fausseté d'une proposition : " " ce n'est pas parce qu'il y a beaucoup de termes qu'on a forcément un grand produit ", " ce n'est pas en ne prenant que deux " grands nombres " (en décomposant 14 en deux nombres) que l'on a un grand produit "… " [ibid. p.76] " par exemple, pour 10 prendre 5 et 5 " proposition pouvant être infirmée : " Quand on a un 5, on fait 2 et 3 ", ce qui est validé par le calcul : 3×2=6 et 6 est plus grand que 5 " [ibid. p.77]
- Des raisonnements de plausibilité s'appuyant sur la vérification sur des exemples : "pour avoir le plus grand nombre, " il faut décomposer " ou bien " il faut beaucoup de nombres ", […] " si on veut un plus grand produit, on utilise 2, 3, 4 " "[ibid. p.77].
- Des raisonnements de nécessité pour valider une méthode de recherche du produit le plus grand.

Pour cette dernière catégorie " il ne s'agit pas d'institutionnaliser une solution mathématique, ni de faire une démonstration synthétisant les étapes de résolution. Si les élèves font des propositions de méthodes s'appuyant sur les multiples de 3, celles-ci peuvent aboutir à des formulations du type :
- " Si c'est un multiple de 3, on décompose en 3+3+3+…+3 et on fait le produit des 3 ".
- " Si c'est un multiple de 3 " plus 2 ", on décompose en 3+3+…+3+2 et on fait le produit ".
- " Si c'est un multiple de 3 " plus un ", on fait 3+3+…+3+4, on fait le produit (avec le dernier 3 et 1 on fait 4). "

Pour établir la preuve de ces propositions, le maître peut être amené à expliciter deux propriétés qui n'ont pas été formulées auparavant :
- si on remplace dans une décomposition tout nombre supérieur ou égal à 5 par deux termes différents de 1, le produit de ces 2 termes sera plus grand, donc on ne garde comme termes du produit que des 2 ou des 3 (4 étant égal à 2×2, 1 et 0 n'étant pas réellement utiles ! ;
- si on remplace 2×2×2 par 3×3, le produit sera plus grand, donc on conserve parmi les termes d'un produit que un ou deux 2 " [ibid. p.78].

On voit la prudence du livre qui rappelle que la production de démonstration n'est pas un objectif de l'école primaire. Le travail sur le raisonnement de nécessité exige un travail sur la de formulation des énoncés à valider et des propriétés utilisées lors des validations.

Production d'élèves :

Examinons quelques productions d'élèves concernant la justification ou la réfutation de propositions relatives au problème précédent extraites de [Massardier, Taquet 2004 p.30-37]. Des élèves proposent les différents arguments suivants :

" - " Les grands nombres ne permettent pas d'obtenir de grands produits. Par exemple : 12 x2=24 alors que 2x2x2x2x2x2x2=128 "

- " Un grand nombre de termes ne donne pas forcément un grand produit. Par exemple : 1x1x1x1x1x1x1x1x1x1x1x1x1=1 "

Pour Florina : " il faut prendre un chiffre, l'additionner plusieurs fois et le multiplier ensuite […] Pour 18, on fait 2 + 2 + 2 jusqu'à 18 puis après on multiplie les 2 et on trouve ". Jean-Baptiste réfute cette proposition en donnant un contre-exemple : " Non, ce n'est pas la meilleure méthode parce que le résultat ça fait 512 et j'ai trouvé 648[14] avec d'autres chiffres ". Paloma affirme " il ne faut pas utiliser 0 ". Thomas valide cette affirmation en énonçant une propriété : " On peut pas utiliser 0 parce que si on multiplie quelque chose par 0 on a toujours 0 "

Paloma continue " il ne faut pas utiliser 1 ". Alexander valide cette proposition en formulant avec ses mots une propriété : " Si on multiplie 1 par quelque chose on aura toujours la même chose ".

Pour Léa : " il ne faut pas prendre des grands nombres ". Thomas valide cela par un exemple : " si on a envie d'avoir 24 et qu'on utilise 22 par exemple, on n'a plus que 2 donc ça fera 44 mais si on utilise des petits nombres ça fera un plus grand nombre que 44 ".

Paloma suggère : " il faut utiliser les nombres 2 et 3 ". Ce à quoi un groupe réplique " faux car 4 = 2 + 2 → 2 x 2 = 4 ; le 4 peut être utilisé aussi ".

Il faut dire la difficulté pour un élève à expliciter son argumentation comme l'illustre l'extrait suivant :

" L'enseignante : Paloma ?
Paloma : Il faut utiliser des petits nombres des 2, des3.
L'enseignante : Pourquoi ?
Paloma : …
Thomas : Moi, je pense qu'en utilisant seulement des 2 et des 3 on n'obtiendra pas les plus grands nombres, il faut aussi utiliser 4, 5, 6
L'enseignante : Pourquoi ?
Thomas : Il faut pas que les nombres soient trop petits non plus.
L'enseignante : Ce n'est pas un argument ça…essaie d'être plus précis.
Thomas : …
L'enseignante : Bon pour toi il faut utiliser des nombres de 2 à 6.
Léa : Moi ; je pense qu'il faut prendre des 3 et des 2.
Jean-Baptiste : Moi aussi, c'est avec des 2 et des 3 que j'ai trouvé les plus grands nombres.
L'enseignante D'accord, puisqu'on n'arrive pas à se décider vous allez vous mettre par groupe de six et testez ces deux propositions (Proposition 1 : Il faut utiliser des nombres de 2 à 6 ; Proposition 2 : il faut utiliser les nombres 2 et 3). Vous écrirez pour chacune d'elles si vous pensez qu'elle est vraie ou fausse et vous expliquerez pourquoi " [ibid. p.35]

Le travail en groupe permettra de réfuter la proposition 2 à partir de contre-exemples mais ne permettra pas de prouver la proposition 1.

On observe que la plupart des argumentations produites sont des réfutations par contre-exemple.

Aucun groupe n'a pu produire une preuve correcte de la méthode générale proposée dans le manuel. Ce problème d'optimisation ne peut pas être résolu par une étude exhaustive dès que le nombre devient important (pour 100 l'étude exhaustive serait trop longue). Il exige un repérage des propriétés à utiliser (comme celles citées par le manuel) pour éliminer des

[14] En effet 648= 3 x3x3x3x2 x2x2

décompositions additives. La preuve est sans doute trop complexe en terme de résultats intermédiaires à repérer et d'enchaînement des arguments par rapport aux problèmes précédents.
Dans la réfutation suivante :
“ - il faut utiliser des nombres de 2 à 6 : faux car 6 = 3 + 3 → 3 x 3 = 9 (à l'oral les élèves ont rajouté qu'il valait mieux donc utiliser deux 3 plutôt qu'un 6) et 5 = 3 + 2 → 3 x 2 = 6 (toujours à l'oral les élèves en ont déduit qu'il valait mieux utiliser 2 et 3 plutôt que 5) ” on aperçoit l'amorce d'une méthode générale qui consiste à décomposer un facteur du produit en une somme dont le produit des termes est supérieur au facteur décomposé. Mais les élèves n'ont pas eu l'idée de cette généralisation.

1.12 Critère de divisibilité par trois

Relatons une séquence observée dans une classe de CM2 et consacrée à la découverte des critères de divisibilité par 3 ou 9. Les élèves sont confrontés au problème suivant : peut-on répartir 21 élèves autour de 3 tables, avec autant d'élèves à chaque table ? La consigne est de répondre sur le cahier, d'appeler la maîtresse qui contrôle individuellement le résultat. Puis la correction est proposée au tableau à partir de l'explication orale d'un élève. Le problème se résout par la division de 21 par 3 donne 7.
On réitère la même procédure avec des nombres plus grands 102, 231, 396 de personnes à répartir en 3 tables. Au bilan la maîtresse signale que la procédure est longue et demande si un élève connaît une procédure plus courte. Un élève propose d'effectuer la somme des chiffres d'un nombre : si elle est divisible par 3 le nombre est divisible par 3.
La maîtresse vérifie au tableau la procédure sur 102, 231, 396. Elle énonce la règle générale avec l'aide de l'élève. Puis elle propose de l'appliquer aux nombres de la liste suivante : 25, 56, 69, 152, 195, 212, 234, 804, 922.
Cette observation pose le problème de la validation d'une propriété mathématique dont la démonstration est hors des objectifs de l'école primaire. Ici la validation s'effectue par un raisonnement plausible. Est-il souhaitable d'indiquer qu'une preuve mathématique sera disponible au collège ? Le glissement d'un raisonnement plausible à un résultat admis, sans marquer clairement que le raisonnement plausible ne constitue pas une validation mathématique, ne risque-t-il pas d'entretenir l'équivoque chez l'élève ? Le marquage de cette distinction risque-t-il de troubler l'élève et d'entretenir le doute sur tous les résultats admis ?

Conclusion

A travers l'étude théorique, l'étude des programmes puis celles de manuels scolaires et de productions d'élèves nous avons voulu mettre en évidence les éléments suivants :
- les élèves mobilisent des raisonnements plausibles dans la vie quotidienne ou dans la formulation de conjectures en mathématiques,
- les élèves mobilisent des raisonnements de nécessité dont la rationalité n'est pas acceptée en mathématiques : par exemple des raisonnements inductifs ; pour mettre en évidence ces raisonnements il faut faire expliciter aux élèves les arguments qu'ils utilisent ;
- les élèves mobilisent des raisonnements de nécessité en mathématiques : il est important de faire expliciter les arguments qu'ils utilisent pour vérifier si ce sont des arguments mathématiques ;
- la principale difficulté des élèves est dans la formulation et l'explicitation des arguments : cette difficulté est normale au niveau de l'école primaire pour laquelle le raisonnement de nécessité n'est pas une compétence exigible.

Cependant il apparaît souhaitable que le maître aide à faire les distinctions entre le nécessaire et le plausible, entre la preuve mathématique et les autres types de preuves, entre preuve et argumentation. Ces distinctions prépareront au raisonnement déductif et à la démonstration qui sont des compétences à acquérir en fin de collège. Mais faire ces distinctions oblige souvent à expliciter ce qui est difficilement formulable pour l'élève. On voit une fois de plus le rôle délicat du maître comme passeur de frontière entre le plausible et le nécessaire.

Bibliographie

BALACHEFF Nicolas (1987) Processus de preuve et situations de validation, *Educational Studies in Mathematics* p.147-176.
(1988) *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de Collège.* Thèse, université Joseph Fourier de Grenoble.
(1999 a) L'argumentation est-elle un obstacle ? Invitation à un débat..., *La lettre de la Preuve*, Mai-Juin.
(1999 b) Apprendre la preuve, *Concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle*, Presse Universitaire de France, Paris, pp.197-236.
BLANCHE Robert (1995) *Raisonnement*, encyclopédie Universalis.
CABASSUT Richard (2003) Enseigner la démonstration en mathématiques c'est quoi ? pourquoi ? pour qui ? comment ? Eléments de réponses à partir de l'étude des programmes des premières années de l'enseignement secondaire en France et en Bade-Wurtemberg, in *Bulletin de l' APMEP*, n° 449.
COPPE Sylvie (1993) *Processus de vérification en mathématiques chez des élèves de première scientifique en situation de devoir surveillé,* Thèse , université Claude Bernard de Lyon.
DUVAL Raymond (1992) Argumenter, Démontrer, Expliquer: continuité ou rupture cognitive?, revue *Petit x*, n°31, pp.37-61, 1992.
(1993) Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif, en collaboration avec M.A. Egret, revue *Repère*s IREM, n°12.
(1995) *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels,* Peter Lang .
DURAND-GUERRIER Viviane (1996) *Logique et raisonnement mathématique Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication,* thèse de doctorat, Université Lyon1.
ERMEL Equipe de didactique des mathématiques (1999) *Vrai ? Faux ?...On en débat ! De l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle 3,* Institut National de Recherche Pédagogique, Paris.
(2001 a) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes, cours moyen (première année),* INRP, Hatier, Paris.
(2001 b) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes, cours moyen (deuxième année)*, INRP, Hatier, Paris, septembre 2001
HOUDEBINE Jean (1990) Démontrer ou ne pas démontrer, voilà la question, in revue *Repères* n°1, 1990
IREM Paris 7 (2002) *Expériences de narration de recherches en mathématiques*, IREM Paris 7/ ACL-Editions Kangourou, Paris.
MASSARDIER Sandryne, TAQUET Séverine (2004) *Comment préparer les élèves , dès l'école élémentaire, à l'apprentissage de la démonstration mathématiques ?,* mémoire de CAPE, IUFM d'Alsace.
MINISTERE de l'Education (2002) *Qu'apprend-on à l'école élémentaire ?* , CNDP/XO Editions.

(2002) *Mathématiques cycle des approfondissements (cycle 3)*, CNDP.
(2002) *Mathématiques cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2)*, CNDP.
(2004) *La rénovation des programmes du collège, Consultation sur les projets proposés par le groupe d'experts, Mathématiques*, consulté le 5/05/04 sur le site : http://eduscol.education.fr/index.php?./D0082/consultecoll.htm
(2004) *La rénovation des programmes du collège, Consultation sur les projets proposés par le groupe d'experts, Introduction commune à l'ensemble des disciplines du pôle* [des sciences], consulté le 5/05/04 sur le site : http://eduscol.education.fr/index.php?./D0082/consultecoll.htm
PEDEMONTE Bettina (2002) *Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques*, thèse Université Joseph Fourier, Grenoble.
PERELMAN Chaïm (1999) Argumentation, Encyclopédie *Universalis*, CDROM 1999.
POLYA Georges (1958) *Les mathématiques et le raisonnement plausible*, Gauthiers-Villars, Paris.
STEIN Martin (1986) *Beweisen*, Texte zur mathematische-naturwissenschaftlich-technischen Forschung und Lehre, Band 19, Verlag Franzbecker, Bad Salzdetfurth.
TIETZE Uwe-Peter , KLIKA Manfred, WOMPERS Hans, FÖRSTER F. (2000) *Mathematiksunterrichts in der Sekundarstufe II, Band I*, Vieweg.
TOULMIN Stephen (1993) *Les usages de l'argumentation*, (traduction), Presses universitaires de France, Paris.