TECHNIQUES ET FONCTIONS DE LA MÉMOIRE DIDACTIQUE : APPROCHES D'UNE MODÉLISATION ET DE QUELQUES PROPOSITIONS

Yves Matheron
IUFM Midi-Pyrénées (GRIDIFE-ERTe 46)
IREM d'Aix-Marseille

Résumé :
La question de la mémoire, couramment considérée comme incontournable dans l'analyse de situations d'enseignement-apprentissage, demeure pourtant un point aveugle des analyses de séquences d'enseignement des mathématiques. Cet article a pour objet de montrer tout d'abord, à partir d'observations de classes ordinaires, une modélisation anthropologique de la mémoire didactique en mathématiques.

Diverses questions se posent alors, et l'on traitera dans un second temps, sur l'exemple des systèmes de deux équations à deux inconnues, celle qui porte sur la possibilité de fonder un enseignement permettant un authentique travail des mémoires pratiques des élèves.

LA QUESTION DE LA MÉMOIRE DIDACTIQUE : POSITION DU PROBLÈME

Il est assez simple de résumer, en quelques traits, la problématique générale au sein de laquelle peuvent être posées certaines des questions justifiant que l'on se penche sur le sujet de la mémoire dans les apprentissages scolaires des mathématiques.

D'une part, le professeur suscite régulièrement chez les élèves, au cours de son enseignement, la mobilisation de connaissances ou d'événements didactiques produits antérieurement dans la classe : les savoirs nouveaux s'appuient fréquemment sur d'autres, plus anciens, et l'enseignement s'inscrit généralement dans l'histoire d'une petite communauté, celle qui est constituée, pour une certaine durée, par des élèves et leur professeur.

D'autre part, il est attendu des élèves qu'ils parviennent à mobiliser les savoirs adéquats pour la résolution de problèmes ; savoirs plus ou moins éloignés, dans le temps didactique, du présent de l'enseignement, d'où la nécessité de “ se souvenir ”. Par ailleurs, il leur est souvent implicitement demandé “ d'oublier ” des techniques anciennement enseignées et apprises, au profit d'autres, plus économiques, et qui s'y substitueront : c'est par exemple le cas des techniques relatives à la proportionnalité, et dont on sait que l'enseignement s'étend du cycle III à certaines des classes de 1re et Terminales.

De la même manière, des définitions relativement satisfaisantes à un certain niveau du cursus scolaire doivent parfois être “ oubliées ” au profit de nouvelles, de plus grande portée et plus générales ou précises, à un niveau plus élevé : c'est par exemple le cas si la multiplication est définie à l'École élémentaire comme addition répétée d'entiers, définition dont la pertinence devient incertaine lorsqu'il s'agit de décimaux ou de rationnels au Collège, et plus du tout effective en ce qui concerne le produit d'irrationnels.

La prise en compte de la question de la mémoire apparaît ainsi comme un élément important ; tout d'abord pour la description et la compréhension des phénomènes didactiques puis, cette analyse ayant été menée, pour l'amélioration éventuelle des possibles de l'action enseignante.

Une première difficulté surgit alors. Il est en effet assez courant de considérer la mémoire, que nous définirons ici à travers ses manifestations en la capacité au souvenir et à sa reconstruction, ainsi que dans la capacité à l'oubli, comme une propriété individuelle des personnes ; l'approche psychologique de la mémoire s'inscrit dans ce cadre. Néanmoins, cette entrée ne paraît pas suffisamment large pour pouvoir embrasser les phénomènes mémoriels qui, dans l'étude des mathématiques, se jouent non pas uniquement au niveau des individus pris isolément mais, plutôt, au niveau des personnes prises au sein de petits groupes sociaux, comme c'est le cas des classes.

Si l'on se place alors dans le cadre plus satisfaisant, car plus englobant, des phénomènes mémoriels propres aux groupes, c'est-à-dire dans le cadre d'une mémoire sociale ou collective, il reste encore à circonscrire, pour les questions d'enseignement, la nature des objets auxquels se rapportent les phénomènes mémoriels. Tout événement se produisant dans la classe n'est, en effet, pas systématiquement intéressant du point de vue du souvenir ou de l'oubli. Plus précisément, ce ne sont pour l'essentiel que sur les phénomènes mémoriels en rapport avec l'étude des mathématiques que portera notre regard.

Afin d'appréhender la question, il a été proposé une modélisation en trois classes pour l'étude de la mémoire dans l'étude des mathématiques (Matheron, 2001). Elle se veut avant tout fonctionnelle, afin de permettre l'observation et l'analyse de la mémoire produite ou nécessitée par les mathématiques et leur étude.

On distingue ainsi essentiellement trois types de mémoire :

- *une mémoire pratique*, qui est sollicitée et mobilisée par toute personne (élève, enseignant, ou autre) qui s'engage dans l'accomplissement d'une tâche identifiée comme relevant d'un savoir mathématique
- *une mémoire du savoir*, qui est la mémoire institutionnelle de la pratique du savoir mathématique, ainsi que celle des outils et des objets de cette pratique
- *une mémoire didactique ostensive*, ou plus simplement *mémoire ostensive*, mémoire délibérément donnée à voir, par des moyens appropriés, à ses propres sujets ou à d'autres personnes par une institution ou un individu (par l'enseignant, par l'élève, par les moyens que se donne l'institution scolaire).

Dans ce court texte, nous n'évoquons pas les raisons qui ont conduit à modéliser ainsi la mémoire didactique. Signalons seulement qu'elles s'appuient sur des travaux menés d'une part en sociologie et anthropologie de la mémoire, et pour lesquels on peut citer, parmi les fondateurs ou continuateurs, les noms de M. Halbwachs, A. Leroi-Gourhan, G. Namer, J. Candau, et d'autre part, en didactique des mathématiques, sur les travaux de Y. Chevallard pour la théorisation anthropologique du didactique, et sur ceux de G. Brousseau et J. Centeno relatifs à la mémoire didactique de l'enseignant.

LIEN ENTRE MÉMOIRE PRATIQUE ET OSTENSIFS

L'engagement dans une activité de nature mathématique suppose la réunion de plusieurs conditions.

Elles passent tout d'abord par l'existence d'un dispositif constitué de moyens matériels (feuille, stylo, règle, énoncé écrit, compas, etc.) et techniques (savoir-faire mathématiques mis à disposition par l'institution et attendus pour la réalisation de la tâche). Mais, à lui seul, ce dispositif ne " produit " aucune mathématique sans une action nécessitant d'être outillée par des gestes appropriés, et qui mobilise pour cela des moyens personnels.

Par exemple, la simplification de la fraction $\frac{1183}{2873}$ nécessite que l'on dispose d'instruments matériels, mais qui peuvent être aussi visuels, sonores, tactiles et qui ont reçu le nom *d'ostensifs* parce qu'ils se " donnent à voir " (Bosch & Chevallard, 1999). Ce sont entre autres, pour le cas de la tâche consistant à simplifier cette fraction, les ostensifs scripturaux 13^2, $\times$, 7, $-$, =, / qui permettront d'accomplir la pratique mathématique suivante :

$$\frac{1183}{2873} = \frac{\cancel{13^2} \times 7}{\cancel{13^2} \times 17} = \frac{7}{17},$$

pratique qui, peut-être, fera aussi intervenir de manière appuyée l'ostensif gestuel consistant à barrer les 13^2, si l'on souhaite montrer à quelqu'un à qui on l'enseigne, " le geste de simplification " par 13^2.

Cet exemple laisse voir que l'engagement dans une pratique mathématique nécessite tout d'abord un dispositif, éventuellement complété par d'autres objets matériels, par exemple une calculatrice ou un algorithme de décomposition en produit de facteurs premiers dans ce cas. Mais il est tout aussi nécessaire de disposer d'une technique mathématique, d'instruments (les ostensifs), et évidemment de l'activation de l'ensemble par une personne qui possède la mémoire de cette pratique, et notamment la mémoire des gestes pour cette pratique.

Par ailleurs, cette mémoire résulte de l'incorporation de chaînes opératoires portées par une communauté. Dans l'exemple de la fraction à simplifier, ce peut être la classe où la personne étudie, la famille où elle pratique cette technique, ou encore tout autre collectivité ayant affaire avec cette technique, pouvant aider à son étude, en évaluer la maîtrise, etc.

Cette communauté, que l'on désigne sous le terme générique " d'institution " en anthropologie, joue les rôles de mémoire externe, dépositaire du savoir et des gestes de la pratique, et de médiateur pour son apprentissage. On retrouve en ce point l'approche de la mémoire qui est celle de Leroi-Gourhan (1964) : " Le fait fondamental, relatif à la mémoire humaine, a déjà été discuté : comme l'outil, la mémoire de l'homme est extériorisée et son contenant est la collectivité ethnique. "

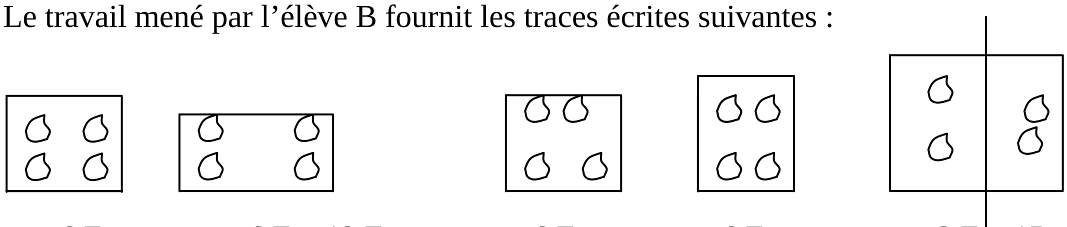
Dans le cas des mathématiques, la mémoire externe est celle d'un savoir ; c'est en ce sens que l'on peut parler de *mémoire du savoir*. Il porte avec lui la mémoire, ou tout au moins l'histoire, des choix qui ont été faits au sein des institutions qui l'ont produit ou transposé. L'aspect mémoriel du savoir mathématique, qui soulage la mémoire de celui qui accomplit le travail mathématique, a été très tôt souligné, notamment par Descartes dans ses *Règles pour la direction de l'esprit* et, évidemment, dans le *Discours de la méthode*.

Au cours de sa trajectoire scolaire, un élève rencontre, au sein des institutions qu'il fréquente, divers éléments de dispositifs, de techniques, etc., plus ou moins organisés et relatifs à des savoirs transposés. À l'issue du processus, en grande partie non objectivable, de ses divers assujettissements plus ou moins heureux, se constitue une mémoire pratique de cet élève, contenue dans des épisodes de sa biographie didactique, selon la formule d'A. Mercier, et à laquelle nous pouvons parfois accéder. Le cas se présente lorsque nous pouvons relever un certain nombre des traces significatives qui subsistent de l'activité mathématique accomplie.

Même s'il peut apparaître en partie fictif, car il est construit pour un concours, un extrait du CRPE de l'académie de Grenoble en 1995, dans lequel est demandée l'analyse de productions d'élèves, fournit un exemple d'objectivation de la mémoire pratique. Il s'agit de la résolution du problème suivant : “ 4 petits pains coûtent 6 F. Combien coûtent 8 petits pains ? Combien coûtent 10 petits pains ? ”

Du document de l'épreuve, on extrait les productions de deux élèves, désignés B et C, et reproduites ci-dessous :

Le travail mené par l'élève B fournit les traces écrites suivantes :



6 F + 6 F = 12 F 6 F + 6 F + 3 F = 15

Le travail mené par l'élève C fournit les traces écrites suivantes :

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 2 \\ \hline 12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6 \\ \times 3 \\ \hline 18 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 18 \\ -3 \\ \hline 15 \end{array}$$

L'élève B a utilisé la technique didactiquement transposée au cycle III, que l'on peut désigner comme “ la décomposition en combinaison linéaire ”, pour les nombres 8 et 10, associée à l'implicite portant sur une modélisation proportionnelle de la situation.

Plus précisément, il a utilisé ce que nous écrirons, pour simplifier :

$f(8) = f(4 + 4) = f(4) + f(4) = 6 + 6 = 12$ et

$f(10) = f(4 + 4 + \frac{1}{2} \times 4) = f(4) + f(4) + \frac{1}{2} \times f(4) = 6 + 6 + \frac{1}{2} \times 6 = 15.$

Comme il ne dispose évidemment pas du commode ostensif $f(x)$, ni *a fortiori* de son utilisation pour écrire les propriétés de linéarité dont il a une connaissance certaine, il utilise d'autres ostensifs, graphiques, à l'appui de la technique : il dessine des représentations de ses calculs. Celles-ci permettent de montrer, au lecteur sans doute, mais plus sûrement à l'élève lui-même au cours de son travail, les éléments technologiques qui justifient la technique choisie, en même temps qu'ils commandent et contrôlent sa bonne mise en œuvre.

L'élève C utilise la même technique “ de décomposition en combinaison linéaire ” que l'élève B, même s'il n'utilise pas les mêmes coefficients pour cela. On peut la décrire ainsi :

$f(8)=f(2 \times 4) = 2 \times f(4) = 2 \times 6 = 12$ et

$$f(10) = f(3 \times 4 - \frac{1}{2} \times 4) = 3 \times f(4) - \frac{1}{2} \times f(4) = 3 \times 6 - \frac{1}{2} \times 6 = 18 - 3 = 15.$$

D'autres techniques auraient pu être mobilisées pour résoudre ce problème : retour à l'unité, coefficient de proportionnalité par exemple. Elles sont sous-jacentes aux divers exemples donnés dans les commentaires du document d'application du cycle III, pages 16 et 17, relatifs à la proportionnalité.

Au-delà des variations numériques au sein de la même technique, l'intérêt de cet exemple réside dans l'usage par ces deux élèves d'ostensifs différents, et de ce que l'on peut en inférer pour leur mémoire pratique. Dans le cas de l'élève C, il n'y a pas de recours aux dessins, mais simplement à la pose des opérations qui interviennent dans la mise en œuvre de la technique. On a vu que les dessins figuraient, pour l'élève B, les éléments technologiques (propriétés de linéarité) qui justifient et permettent d'accomplir la technique utilisée. Ces derniers restent donc implicites dans les écrits de l'élève C, bien qu'on en soupçonne la trace à travers les opérations marquées.

On peut alors en déduire que les ostensifs utilisés par B ont pour fonction de soulager la mémoire des propriétés de linéarité, qu'il doit avoir et qui doivent lui rester disponibles tout au long du travail qu'il mène, pour la mise en œuvre convenable de la technique choisie.

Pour l'élève C, au contraire, même si ce sont toujours les mêmes éléments technologiques (propriétés de linéarité) qui justifient et commandent l'accomplissement de la technique utilisée, leur présence donc leur souvenir, ne passe pas par des ostensifs qui les montrent.

Cet exemple fournit ainsi deux types de travail mémoriel pour la pratique d'une même technique, en montrant à travers les ostensifs, utilisés ou non, une réorganisation des souvenirs attestant d'un certain travail d'étude.

Sans doute peut-on noter que l'usage, fait par l'élève B, de dessins figurant des petits pains pour la résolution du problème, est en principe appelé à disparaître dans la progression au sein du cursus scolaire ; dans le cas présent, au sein du cursus secondaire. Généralement, le travail routinisé de ces problèmes de proportionnalité entraîne la mémoire pratique à se passer de ce type d'aide ; ceci afin que le rapport personnel à ce type de problèmes coïncide avec le rapport institutionnel à venir qui exclut que l'on montre publiquement ce qui peut être vu comme étant des " béquilles " ou des puérilités.

Le propos qui précède n'a évidemment pas pour fonction de dénigrer cet usage. Il s'agit au contraire, dans la perspective de favoriser l'apprentissage, d'identifier et d'analyser, afin de les mettre ou non à disposition des élèves, quels sont les outils nécessaires, à un moment donné, pour ouvrir l'espace d'une certaine liberté, ou d'une " capacité génératrice " des élèves dans l'accomplissement et dans l'étude de certaines tâches mathématiques. " La production libre de pensées " par les élèves s'inscrit en effet " dans les limites inhérentes aux conditions de sa production " (Bourdieu 1980), limites fixées par le savoir mathématique transposé et précédemment rencontré, ainsi que par les occasions de travail de mémoire pratique de ce savoir, et qui ont ou non été fournies aux élèves.

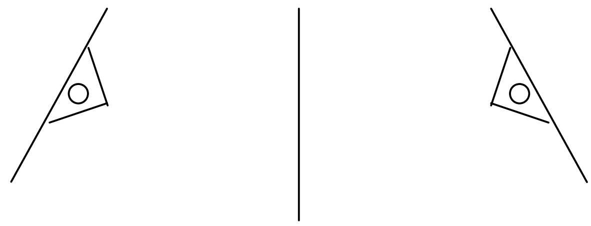
DANS LA CLASSE, UNE MÉMOIRE QUI SE MONTRE OU UNE SOURCE DE MALENTENDUS ?

Nous n'en dirons pas davantage sur la mémoire du savoir, ainsi que sur les ostensifs et ce que l'on appelle les non-ostensifs, c'est-à-dire les concepts et les idées mathématiques, qui la soutiennent. Il est cependant nécessaire de revenir sur l'un des termes de la modélisation proposée pour la mémoire didactique, et qui concerne la *mémoire ostensive*.

C'est une mémoire qui est délibérément *donnée à voir* à la classe, à des élèves, au professeur, par une ou des personnes (professeur ou élève), ou par une institution. Cette ostension peut être réalisée, comme c'est le cas pour les ostensifs définis comme outils du travail mathématique, au moyen de *divers registres perceptifs* : gestuel, discursif - langagier, graphique, scriptural. C'est donc une mémoire qui s'exprime, se dit, se montre, est perceptible, etc., et qui est à destination des autres.

Un exemple permettra d'illustrer l'usage de la mémoire ostensive et les malentendus qui risquent alors d'apparaître au cours de la reconstruction mémorielle qui est engagée. L'observation est faite dans une classe Sixième, après une séance d'observation de phénomènes liés à la symétrie orthogonale à l'aide d'un logiciel de simulation : cette activité préliminaire était supposée fournir la matière de la leçon du jour.

P : " Vous vous rappelez qu'il y avait une figure comme ceci ? " *P reproduit la figure telle qu'elle était présentée aux élèves sur l'ordinateur :*



P : " À l'aide de la souris, on vous a demandé d'attraper un certain point qui se trouvait ici et de faire tourner. Qu'est-ce qui s'est passé ? Ça revient un petit peu dans votre mémoire ?… […] Alors, y'avait un point qui vous permettait de faire tourner. "
Des élèves : " Ah oui ! Le point J ! "
P : " Alors vous vous rappelez ce que ça faisait ? Quand ça tournait là *(P montre une des figures)*, qu'est-ce que ça faisait ? "
Des élèves : " Y'avait l'autre qui tournait " […]
Un élève répond.
P reprend : " Celui d'à côté, il faisait pareil. C'est-à-dire par exemple, si on faisait tourner celui-ci comme ça, celui d'à côté, il tournait comme ça ". *P dessine des flèches de couleur indiquant le mouvement*
[…]
P : " Donc, il tournait lui-aussi, mais en sens inverse. Vous vous rappelez bien de ça ? "
Les élèves répondent oui.
P : " Ensuite, qu'est-ce qu'on a fait ? "
Un élève répond : " On l'a fait glisser " P : " On l'a fait glisser. Comment on faisait glisser ? "
Un élève : " En piquant sur le cercle et après on le faisait… "
P : " Vous vous rappelez qu'en piquant sur le cercle, on l'attrapait. Vous aviez une main comme ça qui permettait de faire glisser. Qu'est-ce qu'on a observé ? "

[…]
P : " Ensuite, qu'est-ce que vous avez remarqué d'autre ? "
Akim répond et vient montrer les déplacements.
P : " Qu'est-ce qu'on pouvait faire à part le faire monter par là ? "
Akim : " Le faire descendre "
P : " Le faire descendre. Par exemple si on le faisait descendre par ici ? " *P dessine une flèche de couleur*
P : " Qu'est-ce qui se passait ? Tu fais la flèche. Ça partait par là, et l'autre qu'est-ce qu'il faisait ? " et Akim répond " pareil ". P : " Pareil, ça veut dire quoi, ça veut dire ça ? ". *Les élèves répondent non après que P a dessiné la deuxième flèche dans le même sens. Karim dessine alors correctement la flèche correspondante indiquant le mouvement.*
P : " Voilà, je te remercie. Vous avez remarqué qu'en les faisant glisser de la sorte les deux figures, eh bien, les figures, on les retrouvait de l'autre côté de manière… "
Un élève : " Qui se ressemble "
P : " Qui se ressemble de quelle manière ? "
Un autre élève : " Identique "
P interroge quelques élèves qui répondent tous " identique ". P écrit au tableau : **symétrique**

Tout au long de ce passage, l'action enseignante reconstruit une mémoire collective officielle pour la classe. Professeur et élèves peuvent la montrer afin de désigner à tous les problèmes posés et de mener à bien le projet d'enseignement. Cette mémoire ostensive, répond à la réalisation de deux moments de l'étude des mathématiques.

D'une part, le professeur construit, avec les élèves, *un milieu pour l'enseignement des savoirs nouveaux*. Le milieu, tel qu'il a été défini par Guy Brousseau en didactique, est le système dénué d'intentions qui est l'antagoniste du sujet apprenant. La dialectique des actions du sujet sur le milieu et des rétroactions produites par le milieu en retour est un élément important du processus d'apprentissage. À cet effet, le professeur produit avec les élèves un ensemble de souvenirs (soit qu'il les juge tels *a priori*, soit qu'il ait préalablement organisé les conditions de leur production), et il donne à voir leurs éléments pertinents (supposés dorénavant se rapporter à des notions communes à un nombre suffisant d'élèves de la classe). Il montre ainsi que l'intention d'enseigner rencontre l'intention d'apprendre et il engage chacun dans une activité didactique collective. Dans cette observation, lorsqu'ils ne sont plus accomplis mais rappelés, désignés et montrés, les gestes des élèves évoqués par le professeur l'engagent à produire un système sémiotique *ad hoc* : les flèches.

D'autre part, le professeur désigne *les pratiques relatives au savoir qui vont devenir officielles, donc attendues, et qu'il faudra avoir apprises*. Cette institutionnalisation passe par l'homogénéisation des pratiques personnelles antérieures des élèves, ce qui suppose une reconstruction du passé. Cela n'implique ni le souvenir ni la mémorisation exacte, mais un " travail de mémoire " à deux niveaux : public, par la production de la mémoire ostensive, et privé, par la transformation conjointe d'une mémoire personnelle idoine à cette dernière.

À la conjonction des deux démarches de reconstruction mémorielle, publique et privée, apparaissent souvent les malentendus. C'est ce qu'illustre l'épisode qui suit :

P : " Qu'avez-vous remarqué en faisant tourner la figure verte ? *[P lit la question écrite sur la feuille]* On va écrire une petite phrase. Alors, on l'a dessiné au tableau ".
Un élève : " On a remarqué que l'autre figure tourne en même temps "
P : " Elle tourne en même temps et dans le sens inverse. Alors l'autre figure, comment on va l'appeler ? On va l'appeler… "
Des élèves répondent : " Verte "
P : " On va l'appeler la figure symétrique… "

La séance se poursuit et le travail est proposé sans que la transformation de la mémoire personnelle de certains élèves ne puisse se produire : il s'ensuit, pour eux, une grande incertitude qui se manifeste au mieux par un brouhaha (l'un cherche son cahier, l'autre fait tomber son crayon, le troisième demande à son voisin ce qu'il en est, etc.), au pire par des mouvements de chahut spontané (des petits bruits auxquels le professeur répond en arrêtant le cours pour faire de la discipline).

DIRIGER DE MANIÈRE SYNCHRONE LA CONSTRUCTION DES MÉMOIRES PRATIQUE ET OSTENSIVE : UN EXEMPLE

Il s'agit d'un dispositif d'ingénierie didactique mis en place dans une classe de 3^{e}, qui vise à enseigner la résolution des systèmes de deux équations à deux inconnues, et dont on décrit rapidement les grandes lignes dans ce qui suit. On donne tout d'abord aux élèves des problèmes du premier degré, du même type, donc qui relèveront tous de la même technique lorsqu'elle aura été enseignée, en leur disant simplement qu'ils sont capables de les résoudre. Voici l'un d'entre eux :

Deuxième problème :
Un grand hôtel dispose de 50 chambres et peut recevoir 83 personnes. Il y a des chambres pour une personne et des chambres pour deux personnes. De combien de chambres pour une personne et de combien de chambres pour deux personnes dispose cet hôtel ?

Les groupes d'élèves se lancent dans la résolution, en utilisant pour cela des types variés d'ostensifs. Voici quelques-unes des productions recueillies :

Deuxième problème.
Pour trouver le résultat, nous avons encore effectué une soustraction. Nous avons soustrait le nombre de personnes au nombre de chambres. Donc 83-50 est égal à 33. Alors il y a 33 chambres de 2 lits et 17 chambres à 1 lit. "

Ou, plus laconiquement :

2ème problème
83 – 50 = 33
Donc il y [a] 33 chambres de 2 lits.
50 – 33 = 17
Donc il y [*de nouveau manque le a*] 17 chambres de 1 lit.

La rédaction suivante introduit, quant à elle, de nombreux ostensifs (encadrements, flèches, disposition des calculs, signes) à propos de l'usage desquels le groupe s'est sans doute accordé :

Problème n°2
Il y a 50 chambres et 83 personnes.
Pour 80 personnes et toujours 50 ch.

30	chambres à 2 lits	$\rightarrow$	$30 \times 2 =$	60
+				+
20	chambres à 1 lit	$\rightarrow$	$20 \times 1 =$	20
$\downarrow$				=
50				80
				+3
$30 + 3 = 33$	$(33 \times 2) + 17 =$	$\longrightarrow$		83
$20 - 3 =$ + 17				
50				

À ce stade, les élèves n'en sont encore qu'à l'exploration d'une solution. C'est donc “ par tâtonnement ” qu'ils parviennent à trouver les nombres du résultat.

Dans un deuxième temps, après avoir vu que ces problèmes peuvent être modélisés par des systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues, les élèves sont invités à y revenir afin de réaliser la modélisation et de les résoudre ; la technique de résolution n'est évidemment pas encore enseignée et c'est l'objectif d'enseignement visée.

Dans les lignes qui suivent, on suit l'évolution des productions de la même élève pour le même problème :

Troisième problème :
Dans un refuge de montagne, il n'y a que des chambres à deux lits et des chambres à 4 lits. Aujourd'hui elle affiche complet, 30 randonneurs occupant tous les lits des 12 chambres du refuge. Combien de chambres à 2 lits et combien de chambres à 4 lits y a-t-il dans le refuge ?

Avant qu'elle ne dispose des ostensifs associés à l'écriture d'un système d'équations, elle avait résolu ce problème de la manière suivante :

> $\left.\begin{array}{l}\textit{Chambres à 2 lits}\\ \textit{Chambres à 4 lits}\end{array}\right\}$ *30 randonneurs*
>
> ---
>
> 12 chambres
> 12 → au moins 2 personnes = 24
> 30 – 24 = 6÷2✕
> ↓
> si on divise 6 par 2 ça fait 2 × 3 randonneurs à placer 2 + 2 = 4
> donc
> 3 chambres à 4 lits et 9 chambres 2 lits

Maintenant qu'elle dispose des ostensifs appropriés, elle peut alors les utiliser pour écrire :

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 2x + 4y = 30 \end{cases}$$

Ce qui la conduit à développer sa propre " créativité " mathématique, sous la forme de deux techniques lui permettant de retrouver la solution précédente. La première est la suivante :

> $2x+4y=30$
> $x+y=30-x-3y$
> $12=30-x-3y$
> $x+3y=30-12$
> $x+3y=18$
> $x+y=18-2y$
> $12=18-2y$
> $2y=18-12$
> $2y=6$
> $y=3$
> $x=12-3=9$

La technique, " inventée " par cette élève, consiste donc à faire apparaître la première équation à partir de l'autre afin de substituer à la première la constante à laquelle elle est égale, et à itérer le procédé jusqu'à " disparition ", dans la deuxième équation, d'une des inconnues. Ceci permet, au bout d'un certain nombre d'étapes, de la résoudre comme équation du premier degré à une inconnue, et à en tirer la valeur de la deuxième inconnue.

Cette élève parvient, dans un deuxième temps, à perfectionner sa technique, et elle écrit alors :

> $\begin{cases} x + y = 12 \\ 2x + 4y = 30 \end{cases}$
>
> Plus court → $2x + 4y = 30$ $\quad\quad$ $2(x + y) + 2y = 30$

$2(x + y) = 30 - 2y$
$2 \times 12 = 30 - 2y$
$24 = 30 - 2y$
$2y = 30 - 24$
$2y = 6$
$y = 3$
$x = 12 - 3 = 9$

Il s'agit donc d'une amélioration de la technique précédente, qui va dans le sens d'une économie, dans la mesure où la double itération du procédé consistant à faire apparaître $x + y = 12$ dans $2x + 4y = 30$ peut être remplacée par une factorisation par 2 après décomposition de $4y$.

Cette pratique ostensive permet un travail de la technique qui va dans le sens d'une économie, identifiée par l'élève, et qui contient et s'appuie sur la mémoire de la technique précédente, moins élaborée. C'est ainsi, encore une fois, un travail de la mémoire pratique qui permet un travail de la technique. Il n'a pas échappé que cette technique n'a pu être créée et vivre que grâce aux coefficients particuliers du système et que, par ailleurs, les techniques dont l'enseignement est l'objet, techniques d'addition et de substitution d'une inconnue, et non d'une équation comme le fait cette élève, n'émergent pas encore du travail d'étude qu'elle mène.

Cet état de fait peut alors être judicieusement utilisé par le professeur, en engageant la classe à travailler sur la portée de cette technique. La technique montrée nous mène-t-elle à la solution à tout coup ? Sinon, dans quels cas fonctionne-t-elle ? Et comment faire dans les cas de systèmes pour lesquels elle est inapplicable ? Que sont ces systèmes et pourquoi est-elle inopérante alors ? Dans ces cas peut-on l'adapter, l'améliorer ou doit-on la rejeter ?

La dimension technologique qui produit, commande, justifie et rend compréhensibles les techniques disponibles à cet instant, peut alors être travaillée par la classe ; ce qui tend à synchroniser la mémoire ostensive, publique et montrée, et la mémoire pratique qui se construit simultanément dans le travail de production d'éléments de réponse.

Arrivé en ce point, un constat s'impose : la voie préconisée dans cet article semble n'en être encore qu'au stade expérimental. C'est sans doute vrai, ce qui n'empêche évidemment pas de tenter son exploration. Elle est néanmoins délicate car elle tend à rendre l'élève, ou plutôt le collectif des élèves, chronogène : c'est-à-dire producteur du temps de l'étude des questions mathématiques desquelles émerge le savoir que l'on souhaite enseigner, ce qui n'est guère dans les habitudes générales d'enseignement.

En outre emprunter cette voie suppose, d'une part, une solide analyse mathématique préalable de la notion à enseigner, des ostensifs et non-ostensifs qui lui sont attachés et qui permettent le travail mathématique qui lui est associé et, d'autre part, une analyse et une imagination didactiques tout aussi solides pour concevoir et mettre en œuvre le dispositif afférent.

Signalons pour conclure que la difficulté ne relève pas du domaine de l'impossible puisque l'expérience a été tentée et réussie au niveau du CM2 à propos de l'enseignement des fractions ; le lecteur curieux pourra en trouver le compte rendu dans Sensevy 1998.

BIBLIOGRAPHIE

Bosch M. & Chevallard Y. (1999) : *La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique,* Recherches en didactique des mathématiques, 19/1, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 77-124.

Bourdieu P. (1980) : *Le sens pratique*, Éditions de minuit, Paris.

Brousseau G. (1990) : *Le contrat didactique : le milieu*, Recherches en didactique des mathématiques, 9/3, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 309-336.

Brousseau G. & Centeno J. (1991) : *Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant*, Recherches en didactique des mathématiques, 11/2&3, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 167-210.

Candau J. (1998) : *Mémoire et identité*, PUF, Paris.

Centeno J. (1995) : *La mémoire didactique de l'enseignant*, thèse posthume inachevée, LADIST, Bordeaux.

Descartes R. (1637; 1947) : *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences*, Éditions Pierre Cailler, Genève.

Halbwachs M. (1925 ; 1994) : *Les cadres sociaux de la mémoire*, Postface de G. Namer, Albin Michel, Paris.

Halbwachs M. (1950 ; 1997) : *La mémoire collective*, Préface et postface de G. Namer, Albin Michel, Paris.

Leroi-Gourhan A. (1964) : *Le geste et la parole II*, *La mémoire et les rythmes,* Albin Michel, Paris.

Matheron Y. (2001) : *Une modélisation pour l'étude didactique de la mémoire,* Recherches en didactique des mathématiques, 21/3, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 207-245.

Matheron Y. & Salin M-H (2002) : *Les pratiques ostensives comme travail de construction d'une mémoire officielle de la classe dans l'action enseignante,* Revue Française de Pédagogie, n° 141, INRP, Paris, pp. 57-66.

Mercier A. (1995) : *La biographie didactique d'un élève et les contraintes temporelles de l'enseignement,* Recherches en didactique des mathématiques, 15/1, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 97-142.

Namer G. (1987) : *Mémoire et société,* Méridiens Klincksieck, Paris.

Sensevy G. (1998) : *Institutions didactiques. Étude et autonomie à l'école élémentaire.* PUF, Paris.