

PREUVE PERCEPTIVE OU DÉMONSTRATION ?

LE RAPPORT DES PE 1 A LA GÉOMÉTRIE, ÉTUDIÉ À TRAVERS LEUR MÉTADISOURS

Bernard Parzysz

GReDIM¹ (IUFM Orléans-Tours)
et Equipe DIDIREM(Université de Paris 7)

Résumé :

Lors de la phase de mise en commun suivant la résolution d'une tâche de type méta menée par groupes à propos d'un exercice de géométrie dans le cadre d'une recherche menée à l'IUFM Orléans-Tours, le débat instauré chez les PE1 fait apparaître, à travers certaines contradictions constatées par eux-mêmes d'une production à l'autre, des rapports à la validation géométrique très divers, qu'ils justifient soit par des considérations de conviction perceptive, soit par le contrat habituel en géométrie, soit par la nécessité de savoir exactement... D'autre part, le rôle du formateur, tantôt synthétiseur, tantôt médiateur, tantôt provocateur, apparaît comme un élément important de l'évolution du débat. Des extraits de l'enregistrement vidéo de l'une des séances menées sur ce thème et de la transcription écrite qui en a été tirée permettront d'analyser ce rapport à la validation et d'en repérer des indices d'évolution chez certains PE.

Notre travail est parti de la constatation – étayée par l'analyse d'un questionnaire (cf. [Parzysz & Jore 2004]) - du fait que nombre de candidats au concours de professeur des écoles (PE1), même s'ils possèdent de bonnes connaissances en géométrie élémentaire, ne distinguent pas toujours clairement ce qui relève du perceptif et ce qui relève de la théorie. Estimant pour notre part que cette distinction est fondamentale pour un enseignant de l'école élémentaire qui est amené à valider les productions de ses élèves, nous avons entrepris de rechercher des situations géométriques censées rendre ambiguës les validations perceptives et permettre de déboucher sur la question de la preuve en géométrie. Nous en avons choisi deux (une en environnement papier-crayon et une en environnement informatique) que nous avons proposées à plusieurs groupes de PE1, non pas comme des questions de géométrie, mais comme des questions à propos de géométrie. Notre groupe a déjà présenté de telles séances dans des colloques précédents de la COPIRELEM ([Parzysz 2002], [Parzysz 2003]). Ayant procédé à la transcription d'enregistrements audio-visuels de certaines de ces séances, nous présentons ici un extrait de l'une d'entre elles, au sujet de laquelle nous nous intéresserons à un aspect particulier du débat sur la preuve.

¹ Groupe de Recherches en Didactique des Mathématiques. En font actuellement partie Ghislaine CAILLETTE, André GAGNEUX, Joëlle JAN-GAGNEUX, Claude LANDRÉ, Claudine RAPPENEAU, Edith RENON, Patrick WIERUSZEWSKI. Qu'ils soient tous chaleureusement remerciés pour leur intérêt et leur participation active au groupe

1- CADRE THÉORIQUE

a) En ce qui concerne la *géométrie*, notre cadre théorique² repose sur la distinction de deux paradigmes, qui de fait coexistent au niveau au début de l'enseignement secondaire, et que nous avons dénommés G1 et G2 :

- G1 est une géométrie dans laquelle les objets physiques ont subi un début d'idéalisation, en ce sens que seules certaines caractéristiques des objets matériels sont retenues comme pertinentes (ainsi, la couleur des traits d'un tracé sur une feuille de papier ou un écran d'ordinateur, le matériau dans lequel est réalisée une maquette ne seront pas pris en compte). C'est-à-dire que le regard porté sur les objets les a déjà quelque peu abstraits et simplifiés par rapport au réel (maquette, tracé sur une feuille de papier, sur un écran d'ordinateur) ; les techniques de validation y sont de nature perceptive, qu'elles soient ou non instrumentées (comparaison, mesure).

- G2 met en jeu des objets qui ne sont plus physiques, mais théoriques. Il s'agit d'objets "idéaux" au sens platonicien (traits et surfaces sans épaisseur, par exemple), et les images physiques qui peuvent en être faites, maquettes ou "figures" n'en sont que des représentations. Mais ces objets sont aussi des éléments d'une théorie (en l'occurrence, la géométrie affine euclidienne), et les validations n'y sont pas de nature perceptive : elles reposent sur cette théorie et sur un mode d'argumentation particulier, de type hypothético-déductif (la *démonstration*). C'est une géométrie de type axiomatique, mais qui ne l'est pas totalement du fait que certains éléments ne sont pas pris en compte, en particulier tout ce qui touche à la convexité. Elle possède certes des liens avec G1, en ce sens qu'elle a eu pour point de départ des propriétés d'objets physiques, mais la perception n'y est pas acceptée comme preuve.

Ces deux paradigmes relèvent de deux problématiques différentes : G1 se situe dans une problématique de la précision et G2 dans une problématique de la "rigueur" (au sens de : conformité à une théorie). Ils sont en quelque sorte concurrents dans les débuts de l'apprentissage de G2, puisque l'enseignement de l'école élémentaire, comme celui du collège, font constamment usage de "figures" (c'est-à-dire, en fait, de *dessins*). Dans G2, la "figure" fait office de support visuel ; elle joue un rôle heuristique (conjecture, recherche d'une démarche de démonstration) et de contrôle (vérification d'une conclusion), mais elle ne peut en aucun cas avoir un rôle de validation. Néanmoins le dessin, simple représentation visuelle de la situation géométrique définie par l'énoncé, risque, de par sa prégnance perceptive, d'induire certains effets, en particulier ce que nous avons appelé "contamination du su par le perçu" (ou CSP) : si l'on n'y prend garde (en se référant à l'énoncé), on peut être conduit à considérer comme une donnée une propriété seulement constatée sur le dessin, et à l'utiliser en tant que telle dans la démonstration. Certes, la démarche usuelle, dans la recherche d'un problème de géométrie élémentaire, consiste en un certain nombre d'allers et retours entre G1 et G2 (voir ci-dessus) ; mais, contrairement à l'"expert" qui sait à tout moment dans quel paradigme il se situe, le "novice" ne les distinguera pas forcément l'un de l'autre. Il ne s'agit en aucun cas pour nous de faire de nos étudiants des experts en géométrie, mais nous pensons néanmoins qu'il est possible de leur donner une conscience plus claire de l'existence de ces deux paradigmes de l'enseignement obligatoire, par le biais de la distinction des modes de validation qui leur sont respectivement associés. Il ne s'agit pas non plus de hiérarchiser ces paradigmes, mais d'amener les PE à les distinguer et à prendre conscience de leur (co)existence possible dans les situations géométriques rencontrées, tant en classe qu'en dehors.

² On en trouvera une présentation plus détaillée dans [Parzysz 2002].

b) En ce qui concerne la *didactique*, notre recherche reprend certains éléments de la théorie des situations didactiques (en particulier les quatre dialectiques : action, formulation, validation, institutionnalisation) [Brousseau 1998], ainsi que certains éléments de la théorie anthropologique du didactique (en particulier les "quatre T" : tâche / technique / technologie / théorie) [Chevallard 1999].

Nous reprenons aussi l'idée de l'intérêt d'une prise en compte du métadiscours en formation d'adultes [Robert & Robinet 1993]. Ces auteurs utilisent le mot "méta" "*s'il y a, pour le récepteur du discours, apport d'un élément sur des mathématiques à apprendre, en partie encore donc non acquises*" [Robert & Robinet 1993, p. 17]. En l'occurrence, nous distinguerons d'abord dans ce qui suit un niveau géométrique et un niveau méta, car c'est bien de ce dernier qu'il s'agit ici, étant donné que notre objectif est de travailler avec les étudiants sur leurs représentations de la géométrie ([Schoenfeld 1985]). Dans ce qui suit, nous réserverons plus précisément le substantif "méta" à un discours sur la géométrie enseignée (ⁱobjets ⁱⁱen jeu, validations), le niveau géométrique consistant en discours de géométrie enseignée. En outre, nous subdiviserons le méta lui-même en deux niveaux³:

- le premier (méta contextualisé, ou *méta 1*) étant un discours spécifique au problème géométrique support (par exemple : "*Ce que je ne comprends pas, c'est qu'on ne montre pas que CD passe par O*") ;

- le second (méta décontextualisé, ou *méta 2*) étant un discours général portant sur la géométrie ou même, plus généralement, sur les mathématiques enseignées (par exemple : "*En mathématiques, on nous demande toujours de démontrer*")⁴

Nous serons ainsi finalement amenés à distinguer trois niveaux de discours plus ou moins "superposés" : géométrique / méta 1 / méta 2.

Nous schématiserons comme suit le déroulement discursif :

- verticalement (de bas en haut) les 3 niveaux ci-dessus
- horizontalement (de gauche à droite) la succession des actes locutoires (identifiés par leur numéro d'ordre).

Le déroulement du débat sera alors représenté par une ligne brisée se référant à ces trois niveaux.

Remarque : Il arrive parfois que l'on n'arrive pas à identifier formellement à quel niveau de méta se rapporte un acte locutoire, en particulier :

- lorsqu'on manque d'information sur le référent (général ou particulier) ;
- lorsque le méta 2 est juste suggéré de façon fugace au sein d'un discours au niveau 1.

Par convention, dans le premier cas nous choisirons le méta 1 et dans le second nous nous situerons "au milieu" entre le méta 1 et le méta 2. Nous n'indiquerons donc le méta 2 que lorsqu'il n'y aura aucune ambiguïté sur le niveau de généralité du discours méta. Notons enfin que Schoenfeld (*op. cit.*) préconise, pour faire apparaître le niveau méta, une gestion de la classe de type « débat scientifique » (cf. [Legrand 1993]), ce que nous nous sommes efforcés de mettre en application.

⁴ Dans sa thèse [Tenaud 1991], I. Tenaud, traitant d'un enseignement de méthodes en terminale, distingue trois niveaux méta, se distinguant selon leur degré de précision et le fait de se référer ou non au problème à résoudre. Ici, s'agissant de conceptualisation et non de résolution de problèmes, deux niveaux nous suffisent.

2- LA SÉQUENCE.

La séquence d'enseignement à laquelle nous nous référons ici se situe à l'intérieur d'une séance de formation de candidats au concours de professeur des écoles, d'une durée de deux heures, réalisée sur le site IUFM de Bourges en novembre 2000⁵. L'objectif principal de cette séance était de mettre en évidence, pour les étudiants, l'existence des deux paradigmes géométriques évoqués plus haut, à l'occasion d'un débat suscité par une tâche relevant du méta 1 qui demandait, à propos d'un problème particulier, de réfléchir sur les moyens susceptibles d'apporter la réponse à une question. Nous suivons en cela Dorier *et al.*, qui préconisent de poser des questions relevant du méta, éventuellement mal formulées, de façon à modifier le contrat habituel et à faciliter la dévolution du problème à ce niveau [Dorier *et al.* 1993].

Les PE1, d'abord individuellement, puis regroupés par équipes de quatre, avaient à résoudre le problème suivant, en environnement papier-crayon :

Tracer une droite d . On appelle O un point de cette droite.

Tracer le cercle C_1 de centre O et de rayon 2. Ce cercle coupe la droite d en deux points A et B .

Tracer le cercle C_2 de centre O et de rayon 4.

Tracer le cercle C_3 de centre A et de rayon 4,5. Ce cercle coupe le cercle C_2 en deux points C et D .

Comment pouvez-vous faire pour savoir si la droite (CD) est, ou non, la médiatrice du segment $[AB]$?

Notons que le type de tâche ici défini consiste uniquement à lister un ou plusieurs moyens permettant de "savoir", c'est-à-dire de lever l'incertitude sur la réponse (oui / non) à la question : (CD) est-elle médiatrice de $[AB]$? Il ne s'agit donc pas de "prouver" la véracité de l'une des deux réponses possibles, donc de résoudre le problème. Or, pour beaucoup de groupes (dont les deux que nous allons voir dans la suite), l'affiche ne répond pas *stricto sensu* à la question posée mais expose en détail, au niveau géométrique, un moyen de savoir (qui en l'occurrence apparaît comme une démonstration de G2).

N.B. : Quatre versions de ce problème étaient réparties dans les différents groupes (une même version par groupe). Ces versions différaient uniquement par leurs données numériques (les rayons des trois cercles) : dans deux cas (versions B et D), la droite (CD) passait par le point O , et dans les deux autres (versions A et C) elle passait "presque" par O .

La consigne est que chaque groupe produise une affiche en réponse à la question posée. Au bout de 45 minutes, les affiches sont réalisées ; elles sont alors apposées sur divers murs de la salle, et l'enseignant détermine implicitement l'ordre de passage qui, selon lui, a les meilleures chances d'engendrer un débat fructueux parmi les étudiants. Puis le même scénario va se dérouler pour chaque groupe :

- un membre du groupe vient commenter l'affiche réalisée collectivement
- un débat s'engage au sein de la classe
- à la fin de ce débat, le professeur en fait une synthèse.

⁵Cette séquence est un peu différente de celle mise en œuvre à Orléans et détaillée dans [Parzysz 2002].

La consigne pour le débat est précisée par le professeur (codé P):

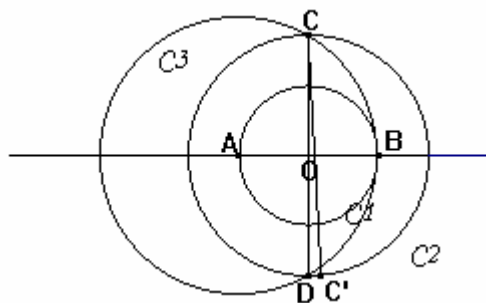
P : *Ce que vous présentez, ce n'est pas votre solution contre celle qui est affichée. Ce que vous présentez, c'est une discussion sur le produit qui vous est donné. C'est-à-dire, si à un moment donné vous avez des remarques à faire, eh bien vous les faites sur le produit. Mais vous ne donnez pas votre solution, votre produit à vous.*

Nous avons choisi ici de présenter la partie de la séquence étudiée correspondant au passage de deux groupes successifs (le groupe 4, puis le groupe 2) ; ces deux groupes ont travaillé sur la version A du problème, c'est-à-dire avec le triplet de valeurs numériques (2 / 4 / 4,5)⁶. Les étudiants ayant à produire des moyens pour "savoir", on peut s'attendre à ce que le débat s'oriente plus ou moins rapidement vers la valeur de preuve de ces moyens, et donc se situe le plus souvent au niveau méta. La question est donc de savoir s'il se cantonnera constamment au niveau méta 1 (celui de la consigne), s'il reviendra au niveau géométrique (exposé d'une solution au problème spécifique) ou s'il atteindra le méta 2 (discours sur la preuve dans les paradigmes géométriques), niveau qui est visé par le dispositif didactique.

Nous nous intéresserons plus précisément, dans ce qui suit, à un aspect particulier du débat : les passages d'un niveau à un autre (géométrique / méta 1 / méta 2) et les éléments déclenchants.

3- LE DÉBAT DU GROUPE 4.

Affiche



Soit le cercle C_3 de centre A et les points D et C qui appartiennent à C_3 .

Alors [AD] et [AC] sont 2 rayons de C_3 . Donc ADC est un triangle isocèle en A.

Soit O le milieu de [AB]. Par la symétrie de centre O :

$$S_O(A) = B$$

$$S_O(C) = C'$$

Donc C' et D ne sont pas confondus et $AD = BC'$ mais $AD \neq BD$.

Par conséquent D n'est pas équidistant de A et de B et (DC) n'est pas la médiatrice de [AB].

⁶ C'est la version présentée plus haut

L'examen de l'affiche du groupe 4 a fait apparaître au professeur une faille dans la démonstration ("*Donc C' et D ne sont pas confondus*"), et plus précisément une CSP : l'affirmation que les points C' et D sont distincts repose uniquement sur l'observation du dessin réalisé.

Une étudiante⁷ du groupe 4 (F4) vient présenter l'affiche de son groupe, en détaillant certains points (niveau géométrique). C'est en particulier le cas pour la fin du texte, où se trouve précisément la CSP (004)⁸ :

F4 : *Ici donc, on a dit que C' était différent de D, et étant donné que AD était égal à BC' et que AD est différent de BD, le ... D n'est pas équidistant de A et de B, donc DC n'est pas la médiatrice de AB.*⁹

C'est une autre étudiante (F2) qui pointe la faille résultant de la CSP (le point C' est distinct du point D) dans la démonstration (006-007), passant ainsi clairement au méta 1 :

F2 : *Là, ce que vous démontrez, c'est encore par rapport au dessin. Votre symétrie, c'est encore par rapport au dessin. Si votre dessin est un peu mal fait, si vous bidouillez, ça peut retomber dessus.*

F4 atteste de sa bonne foi, mais d'autres étudiants (H1, F5) renchérissent alors, et F2 récuse finalement cette démarche en tant que démonstration (013) :

F2 : *Tu démontres rien, tu le démontres pas !*

Le professeur rebondit sur cette affirmation pour tenter d'orienter le débat vers le méta 2, mais F2, restant dans le méta 1, pousse son idée jusqu'à sa conséquence ultime (014-015) :

P : *Oui, mais ... Faut-il démontrer ? Ou est-ce que ça suffit ?*

F2 : *On voit sur la figure, donc à la limite on n'a qu'à dire, sans utiliser la symétrie, C' ... et ... enfin...*

Même si cette dernière phrase est incomplète, son sens est on ne peut plus clair : si une validation perceptive est suffisante, toute démonstration est en effet inutile.

Le débat semble retomber ; aussi, pour le relancer, le professeur indique la technique de G1 utilisée par le groupe 4 et interpelle ce groupe (016-021) :

P : *Vos camarades ont même pris une précaution que je vais ajouter, c'est qu'ils ont agrandi leur dessin, hein. (...) Alors, est-ce que ça vous apporte quelque chose de l'avoir agrandi ?*

F4 : *Oui, parce que sur le dessin initial la différence de tracé entre CC' et CD était ... Ca allait de même pas un millimètre. (...) Mais en agrandissant l'écart s'est considérablement agrandi, donc là ça vient pas de la construction ... Enfin ... Je veux dire ... Ça vient pas de l'imprécision des tracés, ça vient bien de la construction qui fait que CC' et CD ne sont pas confondus.*

⁷ Dans les extraits du protocole qui seront présentés, les étudiantes (resp. les étudiants) seront identifié(e)s par la lettre F (resp. H) suivie d'un numéro correspondant à leur ordre d'"entrée en scène" dans la séance.

⁸ Les nombres à trois chiffres entre parenthèses renvoient à la numérotation des actes de parole dans le protocole de la séquence.

⁹ Un implicite de ce passage est que BC' est différent de BD, ce qui pourrait être justifié en se basant, d'une part sur le fait que C' est distinct de D, et d'autre part sur le fait que ces points n'appartiennent pas à un même cercle de centre B (étant donné qu'ils sont sur un même cercle de centre O).

F4 commet un lapsus –qu'elle rectifie immédiatement– en disant "construction" au lieu de "tracé" ; elle oppose ainsi "construction" et "tracé", ce qui pourrait permettre au professeur d'amorcer un nouveau débat relevant du méta 2 (Qu'est-ce qu'une *construction* en géométrie ?) et ayant également trait aux paradigmes géométriques. Mais il n'en fait rien et renvoie vers F2, qui n'est toujours pas convaincue. Puis il oriente de nouveau le débat vers le méta 2 en reposant comme ci-dessus, de façon générale, la question de la validation perceptive (022-029) :

P : *Et malgré ça, ta camarade ne reçoit toujours pas ton argument.*

(...)

F2 : *On le voit sur la figure, mais ...*

P : *Et voir sur la figure, ça ne te suffit pas ?*

Cette fois, le méta 2 est repris par une (nouvelle) étudiante, F5, qui intervient pour poser la question du contrat (méta 2) ; F4 se sent confortée, mais F2, se situant résolument dans G2, précise le rôle que peut y jouer le dessin. Puis on revient au méta 1, par F6 qui rappelle la consigne (030-037) :

F5 : *Ça suffit. Mais en fait, en mathématiques on nous demande toujours de démontrer, hein ? (...) Est-ce qu'on a le droit de se baser sur le dessin, à ce moment-là ?*

F4 : *Si on nous dit qu'on a le droit, alors ...(...)*

F2 : *On peut peut-être se baser sur le dessin pour dire d'abord, oui ça l'est, ou non, ça ne l'est pas. Ce qui nous permet après de le démontrer, c'est-à-dire de démontrer que ça l'est ou que ça ne l'est pas.*

F6 : *Moi je ... Moi j'ai cru que ça dépend de la façon dont on comprend la consigne. On nous demande pas de démontrer, donc ça peut très bien être suffisant.*

Le professeur suit F6 et précise la question initialement posée (méta 1), à laquelle répond F4 (méta 2 ?). Il essaie alors de la provoquer en déformant sciemment son propos, mais celle-ci –soutenue par F7– ne s'en laisse pas conter (039-042) :

P : *On vous demande quand même de répondre à une question, hein ? C'est, comment faites-vous pour savoir.*

F4 : *Ça peut être une explication, le dessin, pour savoir.*

P : *Le dessin sera l'explication ?*

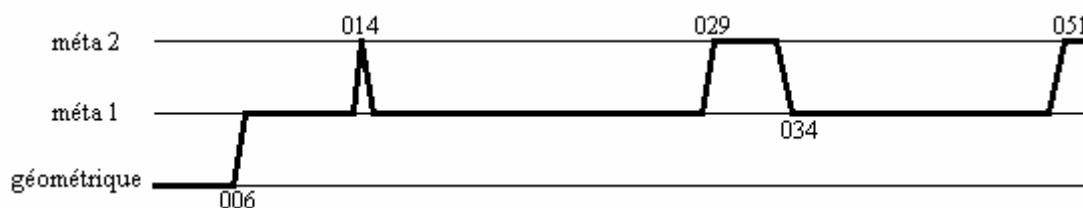
F7 : *Non, mais ça peut être. Je ne sais pas, ça peut être une façon commode, de regarder sur le dessin pour savoir.*

Le professeur coupe alors court à la discussion et en opère une synthèse qui, partant du méta 1 (pointage de la CSP), aboutit au méta 2 (fonctions possibles du dessin) (048-051) :

P : *On vient d'entendre, donc, le deuxième groupe, avec quand même quelque chose par rapport au discours qu'on avait tout à l'heure, qui était que, finalement, vos camarades ont tout de même essayé de faire des démonstrations, hein ? Ça il faut le noter. Essayé. À chaque fois il y a eu, à un endroit dans la démonstration, une utilisation du dessin. Et c'est ça qui est actuellement en discussion, c'est-à-dire, est-ce qu'on peut, ou est-ce qu'on ne peut pas, utiliser le dessin ? Et il semblerait, d'après les productions qu'on a vues là, c'est que, lorsque le dessin est très clair, hein ? ... est très*

clair, il y en a qui ont le sentiment qu'on pourrait peut-être s'en servir. Et peut-être même pour dire non, d'ailleurs.

Sur la base de ce premier extrait, on peut construire le schéma ci-après :



On voit que le changement de niveau peut éventuellement résulter d'une discussion entre les seuls étudiants : le repérage de la CSP par F2 fait dès le départ, passer du géométrique au méta 1 par la mise en évidence du "mélange des genres", c'est-à-dire d'une intrusion (involontaire) du perceptif dans un texte qui prétend, selon ses auteurs, au statut de démonstration. Mais il peut aussi provenir du professeur, de son seul fait (en 014 et en 051) ou à la suite d'une phrase d'un(e) étudiant(e) –F2 en 028– qu'il reprend au vol sous la forme d'une question (en 029), entraînant à sa suite une autre étudiante (F5 en 031).

4- LE DÉBAT DU GROUPE 2.

Affiche

Le diagramme illustre la construction de la médiatrice d'un segment $[AB]$. Trois cercles concentriques C_1 , C_2 et C_3 sont centrés en A . Le cercle C_1 est tangent à $[AB]$ en son milieu O . Le cercle C_3 coupe $[AB]$ en B et D . Le cercle C_2 coupe la droite (d) en C et D . La droite (d) est la médiatrice de $[AB]$.

Définition de la médiatrice de $[AB]$
C'est l'ensemble des points équidistants de A et de B
Cette droite est $\perp [AB]$ et la coupe en son milieu O .

C et D st sur C_3 de centre A ; ils st donc à égale distance de A : $AC = AD$.
 O est le centre de C_1 et $[AB]$ est un $\emptyset$ de C_1 , donc $OA = OB$.
 $\rightarrow B$ est la projection de A par rapport à O donc, comme on a $AC = AD$,
on a $BC = BD$.

Donc $ACBD$ est un quadrilatère où on a $AC = CB = BD = DA$.
On en déduit que $ACBD$ est un losange.
D'après cette propriété, ses diagonales CD et BA se coupent en leur milieu ; O étant le milieu de $[AB]$, O est aussi le milieu de $[CD]$. Et ses diagonales sont $\perp$.
Donc (CD) médiatrice de $[AB]$.

N.B. : On voit qu'un problème de terminologie apparaît dans cette affiche : il convient en effet de lire "symétrique" au lieu de "projection". Ce point fera d'ailleurs l'objet d'un débat que nous n'évoquerons pas ici.

Ce texte comporte deux CSP, reposant toutes deux sur l'appréhension perceptive du losange ACBD :

- la première (CSP1) aux lignes 6-7 ("comme on a $AC = AD$, on a $BC = BD$) ; ceci suppose en effet que la droite (CD) passe par O, ce qu'il s'agit précisément de prouver ou d'infirmer ;

- la seconde (CSP2) à la ligne 8 : des égalités $AC = AD$ et $BC = BD$ on ne peut déduire $AC = CB = BD = DA$ sauf à supposer que ACBD est un losange, ce qui est justement le but de cette partie de la démonstration. La façon dont se présente cette triple égalité révèle d'ailleurs qu'elle ne dérive pas des deux égalités précédentes : en fait, elle provient d'un parcours dans le sens des aiguilles d'une montre autour du quadrilatère ACBD.

On aura également remarqué -c'est important pour la suite- que, les données numériques étant ici les mêmes que pour le groupe précédent, la conclusion du présent groupe est néanmoins opposée : alors que le groupe 4 avait conclu par la négative, le groupe 2 conclut par l'affirmative.

Contrairement au débat précédent, le niveau méta apparaît ici dès le début, lors de la présentation de l'affiche par F8 (053-057) :

F8 : *Alors, on n'a pas fonctionné par...*

Enfin, on a fait le dessin pour voir, mais on a essayé de le démontrer.

Je ne sais pas si on arrive à lire, mais c'est souligné là.

On n'est pas tous d'accord sur ce qu'on a fait, mais peut-être qu'on n'a pas eu assez de temps ...

F8 prend du recul en pointant un désaccord persistant au sein du groupe, au sujet précisément de la partie de la démonstration qui correspond à la CSP1 (méta 1). Puis elle expose cette démonstration (058-065), en faisant part de ses doutes (060-063) :

F8 : *Et alors, c'est là qu'on n'est pas tout à fait d'accord.*

On a dit que, comme AC était égal à AD, quand on projette ... B est la projection de A par rapport à O, donc comme on a AC égale AD, on a BC égale BD.

Je n'sais pas ce que vous pensez d'ça ...

Et après on se sert de ça pour dire qu'on a un quadrilatère avec quatre côtés égaux qui est un losange.

Le professeur feint d'accepter cette démonstration comme telle, sans doute dans l'espoir de susciter ainsi une réaction analogue à celle qui était apparue lors du débat du groupe précédent (066-069) :

P : *Alors ? Voilà une démonstration, non ? Ils n'utilisent pas le dessin.*

F8 : *Et on n'utilise pas le dessin.*

P : *Et qui n'utilise pas le dessin.*

La réaction vient bien, mais cette fois de la part d'un membre du groupe 4 (F9) ; celle-ci se situe bien au niveau méta 1, mais sans doute pas dans la direction que le professeur attendait (*i.e.* le rejet de la démonstration présentée), car ce que pointe F9, ce sont les conclusions opposées auxquelles sont parvenus les deux groupes, à partir du même problème. F8 lui répond en récusant la preuve perceptive (méta 2 ?), enjeu du débat précédent (070-074) :

F9 : *Quant à nous ... Et en fait on avait fait une démonstration, et c'est en faisant le dessin et en agrandissant qu'on s'est aperçu que ça ne tombait pas juste.*

F8 : *Nous, ça ne tombe pas forcément juste non plus, mais on a décidé que le dessin, ça ne permettait pas de ...*

F9 : *Mais si tu veux, nous on avait la même démonstration, et le dessin nous prouvait qu'on avait faux, alors ...*

F8 : *Mais je ne crois pas que le dessin prouve.*

Le professeur semble ignorer cette discussion entre F8 et F9, qui est pourtant au cœur de la question, F9 se situant dans G1 tandis que F8 se place dans G2¹⁰. Il relance le débat vers la démonstration du groupe 2 (méta 1). Deux étudiantes (F2 et F9) s'appuient alors sur celle du groupe 4 pour récuser celle-ci (078-0086) :

P : *Alors, ils se sont basés sur le dessin, ou pas ?(...)*

F9 (en direction de F8) : *Vous l'avez respecté ? Vous l'avez grossi ? Parce que nous, en le grossissant, eh ben je ne sais pas, alors ...*

F2 : *Oui, en fait, là, en construisant, ça l'est pas. Le problème c'est qu'ils montrent que ça l'est, et qu'en fait ça l'est pas.*

F9 : *Je ne sais pas si ça ne l'est pas, mais nous, je sais qu'on l'a refait plusieurs fois, et qu'en fait ça l'est pas.*

N.B. : Le nœud de la situation est exprimé de façon limpide par F2 (toujours elle) : *"Le problème c'est qu'ils montrent que ça l'est, et qu'en fait ça l'est pas"*. Cette situation inhabituelle est extrêmement intéressante, en ce sens que l'opposition validation perceptive vs. démonstration tourne à l'avantage de la première du fait des failles de la seconde (les deux CSP). Elle débouche sur la question de leurs fonctions respectives : l'agrandissement du dessin permet effectivement de savoir si (CD) est médiatrice de [AB], mais il ne permet pas de savoir pourquoi il en est ainsi. Nous verrons bientôt que F2 pressent toutefois que la clé du dilemme réside dans les dimensions respectives des trois cercles, mais sans identifier "Pythagore" (G2).

Arrivé à ce point, le professeur résume la situation en opposant les deux modes de validation (ce qui pourrait permettre de passer au méta 2) (093-094) :

P : *On est quand même très embêté, parce qu'il y a un groupe qui nous a répondu oui et l'autre non. L'un s'appuie sur le dessin, l'autre s'appuie sur une démonstration. Est-ce que la démonstration tient la route ? Voilà ma question.*

Mais il oriente (en restant au niveau méta 1) le débat vers la question de la validité de la démonstration du groupe 2, qui est celle que, semble-t-il, il visait depuis le début, après avoir repéré les CSP sur l'affiche. S'ensuit une discussion au cours de laquelle F2 va effectivement invalider la démonstration présentée par F8, grâce à l'évocation gestuelle d'une "figure" tenant lieu de contre-exemple (097-102) :

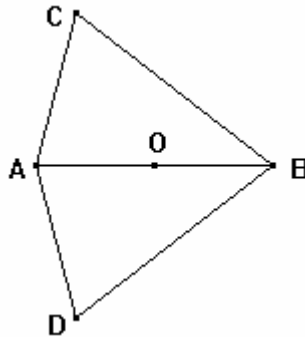
F2 : *Le problème, si D il est, admettons, tout à fait à gauche, on aura aussi AC égale AD, mais C sera pas du tout le ...*

F8 : *Ouais, ça se base sur ce qu'on a fait avant, tu ne peux pas avoir D complètement à gauche avec ce qu'on a fait avant, c'est pour ça qu'on prend ... En fonction de ta construction, tu ne peux pas avoir D à l'autre bout puisque (...)*

¹⁰ F8 se situe en outre au niveau méta 2.

F2 : *Il peut être totalement par là (geste du bras gauche tendu vers la gauche), l'autre là (geste du bras droit tendu vers le haut), par rapport à d.*

N.B. : Les gestes de F2 évoquent en fait la position suivante des points C et D par rapport à la droite (AB)¹¹ :



Cette intervention, pour pertinente qu'elle soit, n'emporte pas la conviction¹² et le débat semble alors s'enliser, les étudiantes campant sur leur position. En particulier, F9 pointe à nouveau la contradiction entre les réponses des groupes 4 et 2. Suite à une réflexion de F8, qui passe au méta 2 (en 116 : *"Est-ce qu'on peut comparer une démonstration par rapport à un dessin ?"*), le professeur décide cette fois d'intervenir à ce niveau, en hiérarchisant explicitement les deux types de preuve considérés (120) :

P : *Vos camarades disent, vous, vous étiez sur le dessin, donc c'est lié à votre œil, à des conditions de dessin, à la précision du dessin, et cætera. Tandis que nous, on a la réponse qui est assise sur une démonstration, et parce qu'elle est assise sur une démonstration elle est forcément meilleure que la vôtre, elle dit la vérité mieux que la vôtre.*

La position ainsi résumée est difficilement tenable, car à l'évidence c'est la preuve perceptive qui "dit la vérité" (celle de G2 aussi bien que celle de G1). Aussi le débat retourne-t-il tout de suite au méta 1 : F12 propose de chercher une *"troisième démonstration"* qui départagerait les deux précédentes, puis H2 repère la CSP 2 (en 136 : *"Le problème c'est pour arriver au losange"*). Et c'est alors qu'un mini-incident apparaît, lorsque H2 redemande la parole (145-149) :

P : *Oui, tu voulais dire quelque chose ?*

H2 : *Non, j'revenais à ce qu'on avait fait, c'est-à-dire ... On avait fait comme ça, et ensuite on a vérifié avec le théorème de Pythagore.*

P : *Ah, ah, ah. Oui, toi tu ...* (geste pour évacuer cette intervention)

H2 : *J'ai pas eu le droit de dire ce que j'disais.*

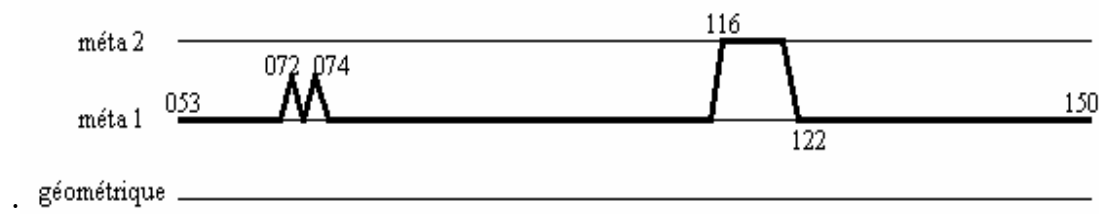
¹¹ On s'aperçoit ici que l'importance du triplet de données numériques (qui rendrait possible une orientation vers "Pythagore") n'est pas explicitée : en effet, la situation ci-dessus pourrait être obtenue, soit en augmentant le rayon de C_2 , soit en réduisant celui de C_3 , mais cette idée ne vient pas à F2, qui reste dans le qualitatif.

¹² On ne peut s'empêcher d'imaginer ce qu'aurait pu devenir cette explication dans un environnement de géométrie dynamique, dans lequel il suffit de faire varier le rayon d'un cercle pour faire apparaître que (CD) ne passe pas par O.

Si le professeur fait taire M2, c'est qu'il a bâti la phase de débat autour d'un ordre imposé pour les affiches, de façon à ne faire apparaître le "juge de paix"¹³ que constitue "Pythagore"¹⁴ que dans les dernières affiches discutées. L'intervention de M2 risque donc de court-circuiter sa démarche, et c'est pourquoi il la récuse. Il se contente enfin de donner une "conclusion" provisoire (150) :

P : *Bon , donc on en reste là, c'est indécidable ? Eh bien, c'est indécidable. Merci.*

On obtient cette fois le schéma suivant



On voit que le méta 2, même s'il vient très tôt dans ce second débat, n'apparaît finalement que très sporadiquement :

- peut-être une première fois (?) par F8 en 072 et 074 : *"Je ne crois pas que le dessin prouve"* (mais, dès 078, le professeur ramène le débat dans le méta 1) ;

- une seconde fois, toujours grâce à F8, en 116 : *"Est-ce qu'on peut comparer une démonstration par rapport à un dessin ?"* (cette fois, le professeur lui emboîte le pas en explicitant le problème, mais c'est la classe qui ne suit pas et revient au méta 1).

CONCLUSION

En conclusion, les deux mini-débats étudiés ici montrent que, si une situation basée sur un problème de géométrie dans lequel la perception risque de provoquer des CSP, et dont la consigne se situe dans le méta 1, permet effectivement de susciter chez les PE un débat à ce niveau, il n'est pas si évident que ce débat accèdera, à un moment ou à un autre, au méta 2, même si c'est là l'intention de l'enseignant. Et nous avons vu également que, lorsqu'il a lieu, le passage au méta 2 est le plus souvent dû aux étudiants – avec ou sans "coup de pouce" du professeur qui relance –, mais qu'il n'est cependant pas assuré ; il serait donc intéressant d'en identifier des sources de succès ou d'échec, tant chez les étudiants que chez le professeur. D'autre part, même si le débat accède au méta 2, il risque fort de revenir rapidement au méta 1, et s'il parvient à s'y maintenir, il faudrait pouvoir évaluer son impact, à court et moyen terme, sur les étudiants, et en particulier s'intéresser aux questions liées à l'institutionnalisation de ces métaconnaissances géométriques (nature, forme, moment...). Mais la condition première serait qu'un tel enseignement ne se cantonne pas à des séances ponctuelles et soit étalé sur toute la durée de la formation, car les représentations individuelles n'évoluent que très lentement. En effet, *"la perspective est celle du temps long : les interventions ne se conçoivent que sur une certaine durée, ne serait-ce que pour établir les changements d'habitude qu'elles impliquent pour les élèves"* [Robert & Robinet 1993 p. 32].

¹³ Comme il le dira plus tard.

¹⁴ C'est-à-dire, selon le cas, le théorème (sous la forme contraposée) ou sa réciproque.

BIBLIOGRAPHIE

- Brousseau, G. (1998) : *La théorie des situations didactiques*. Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Chevallard, Y. (1999) : L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, in *Recherches en Didactique des Mathématiques* vol. 19 n° 2, pp. 221-266..
- Colmez, F. & Parzysz, B. (1993) : Le vu et le su dans l'évolution des dessins de pyramide, du CE2 à la seconde, in *Espaces graphiques et graphismes d'espaces* (dirigé par A. Bessot et P. Vérillon), pp. 35-55. Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Dorier, J.-L. (1992) : *Illustrer l'aspect unificateur et simplificateur de l'algèbre linéaire*. Cahier de DIDIREM n° 14. Université Paris-7.
- Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet J., Rogalski, M. (1993) : L'enseignement de l'algèbre linéaire en première année. Nouveaux problèmes, nouvelles méthodologies, in *Actes du colloque de l'ARDM*.
- Houdement, C. & Kuzniak, A. (1998) : Géométrie et paradigmes géométriques, in *Petit x* n° 51, pp. 5-21.
- Legrand, M. (1993) : Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse, in *Repères-IREM* n° 10, pp. 128-153.
- Parzysz, B. (2002) : Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1, in *Actes du 28^{ème} colloque COPIRELEM (Tours , juin 2001)*, pp. 99-110. Ed. Presses Universitaires d'Orléans.
- Parzysz, B. (2003) : Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1, en environnements papier-crayon et informatique, in *Actes du 29^e colloque COPIRELEM (La Roche-sur-Yon, juin 2002)*, pp. 85-92. Ed. IREM des Pays de Loire.
- Parzysz, B. & Jore, F. (2004) : Le rapport à la géométrie des futurs professeurs des écoles, in *Actes du colloque "Quelles géométries au collège ? Geste physique, geste virtuel, geste mental ? "* (La Grande Motte, juin 2001), pp. 107-118. Ed. IREM de Montpellier.
- Robert, A. & Robinet, J. (1993) : *Prise en compte du méta en didactique des mathématiques*. Cahier de DIDIREM n° 21. Université Paris-7.
- Schoenfeld, A. (1985) : *Mathematical Problem Solving*. Academic Press.
- Tenaud, Isabelle (1991) : *Une expérience d'enseignement de la géométrie en Terminale C : enseignement de méthodes et travail en petits groupes*. Thèse université Paris-7. Ed. IREM Paris-7.
-