Conférence

PROGRAMMES DE MATHÉMATIQUES 2002 : CONCEPTIONS, PERSPECTIVES ET LIMITES

Catherine Houdement
IUFM de Haute-Normandie, DIDIREM Paris 7

Résumé :
Les programmes de l'école primaire 2002 se caractérisent par une abondance de textes ministériels relatifs aux enseignements disciplinaires et la mise en avant d'une dimension culturelle. Comment cela se décline-t-il en mathématiques ? Quels éléments ont motivé, contraint, limité cette écriture ?

Je remercie la COPIRELEM de m'avoir demandé de faire un point sur les programmes 2002 en mathématiques dans l'école primaire française. Je remercie les collègues, notamment de la COPIRELEM, qui m'ont fourni questions et remarques. Je remercie Roland Charnay de sa contribution à ce texte.

Je voudrais avant de commencer préciser ma position : je suis chercheuse en didactique des mathématiques au sein de l'équipe DIDIREM de Paris 7, je suis formatrice à l'IUFM de Haute Normandie pour les Professeurs des Ecoles essentiellement. Mais concernant la rédaction de ces textes, ma position est différente : je suis engagée dans un processus institutionnel auquel je participe de mon plein gré. Mes deux fonctions précédentes influencent ma participation, mais le texte final est un projet d'écriture en équipe. Dans cet exposé, j'essayerai de tenir ce cadre, comme dirait S. Nadot.

Cela dit, ce texte vise à éclairer certains aspects de la conception des programmes de mathématiques de l'école primaire. Bien entendu cette conception est nourrie des travaux de toute une communauté. Je citerai quelques auteurs, mais je ne le ferai pas systématiquement, que ceux qui ne sont pas cités me pardonnent.

I POINTS DE DÉPART OU LES ENTRÉES POUR LA RÉFLEXION

1 Les finalités de l'enseignement des mathématiques, les enjeux éducatifs

Une culture scientifique

Pourquoi enseigner les mathématiques ? Cette question n'est pas habituelle dans la communauté mathématique alors qu'elle est souvent fondamentale dans d'autres disciplines (Coquidé, Lebeaume 2003). Il est pourtant important de questionner l'existence d'une rubrique Mathématiques dans les différents niveaux d'enseignement, et de les rattacher aux Sciences, comme d'ailleurs le projet de programme de collège 2004 le mentionne explicitement.

Pour les mathématiques, nous avons voulu les intentions suivantes, appliquées à toute l'éducation scientifique et technologique : « éclairer les enfants, exercer leur raisonnement et permettre leurs actions ». C'est une des raisons pour laquelle la résolution de problèmes garde une telle importance.

Préparer le citoyen de demain

Nous avons cherché dans les mathématiques à concilier, si j'ose dire, l'Utile à l'Agréable : l'Utile correspondrait à l'acquisition de techniques et des savoirs, l'Agréable au développement de la compréhension, de la prise de pouvoir sur le réel par la capacité à anticiper.

Concernant « l'Utile », nous avons essayé d'aller vers une « numeracy », en résonance avec la volonté internationale de préciser une culture numérique minimale du citoyen au même titre qu'une « literacy » (pour viser la réduction drastique du nombre de citoyens illettrés). C'est en effet la tendance de nombreux pays d'Europe, comme l'a pointé le colloque de la Sorbonne en janvier 2002.

Mais cette culture doit être mise en relation avec l'explosion de moyens de calcul : entraînement et apprentissage du calcul doivent d'une part préparer à l'utilisation des machines (notamment le fait de savoir instancier tel ou tel calcul pour le faire exécuter par la machine), et d'autre part dépasser cette fonction des machines : puisque ce ne peut pas être du côté de la puissance de calcul, ce le sera en termes de compréhension des principes de calcul, d'intelligibilité, de transférabilité, de générabilité…

Concernant « l'Agréable », l'école est le lieu de l'initiation progressive au raisonnement (mais pas seulement en mathématiques) et à la « spécificité de la validation mathématique » (d'abord par confrontation au réel -pourquoi 7 et 3 font 10 ?-, puis par cohérence avec des savoirs et connaissances avérés -pourquoi 5,7 > 5,32-). Même s'il est nécessaire de débattre démocratiquement (en permettant à chacun d'exprimer son avis), les avis sont examinés à l'aulne des savoirs et la conclusion d'une confrontation sur des mathématiques n'est pas démocratique.

2 Les contraintes déclarées

Il nous a été commandé une réécriture des programmes 1995 pour fournir une nouvelle plaquette des programmes du primaire, compte tenu notamment de l'intégration de nouveaux domaines : langue vivante, TICE. Il n'était pas question à l'époque (novembre 2000) de réécriture des programmes de collège. Nous avons donc aussi travaillé pour préparer aux contenus de collège de 1995. Autrement dit il s'est donc agi de revisiter les contenus de 1995 et de dégager l'essentiel des mathématiques à l'école début du XXI siècle.

Seuls sont parus au Bulletin Officiel (BO) de l'Éducation Nationale les Contenus. Les Documents d'Accompagnement, ni ceux d'Application n'ont pas le même statut, ils ne présentent le même caractère d'obligation. Certains nous reprochent de ne pas avoir mis dans le texte du BO conseils et éclairages. Mais il a fallu faire avec ces contraintes matérielles. Il est vrai qu'au début de notre engagement, les Documents d'Accompagnement correspondaient à la version que nous souhaitions voir mettre au BO ; compte tenu du poids, il a fallu en extraire seulement une partie : les contenus mathématiques et les compétences liées.

3 La constitution de l'équipe

La constitution de l'équipe (7 personnes) par R.Charnay a permis de concilier des points de vue divers (didactique, terrain 1^{ier} degré, terrain collège, formation IEN, formateurs, enseignants 1^{ier} degré) avec, pour chacun, une implication personnelle, même s'il est représentant d'une institution : INRP (Roland Charnay), terrain école et formation (Nicole Matulik : PEMF) terrain et formation, (Luce Dossat IEN et Guy Picot CPC), APMEP et collège (Jean Fromentin), collège et formation (Paul Planchette), COPIRELEM puis CREM (moi-même). Il s'agissait donc de mettre en commun une culture de groupe et des sensibilités institutionnelles : la commande n'était pas faite à un groupe de chercheurs ou d'enseignants, mais à un groupe mixte où différentes sensibilités sont représentées.

Pour les Documents d'accompagnement (uniquement en ligne), cette équipe a contacté des spécialistes des questions traitées qui ont accepté (ou non) de se lancer dans la rédaction : ainsi F.Boule pour *Calcul Mental,* M.H..Salin pour *Espace et Géométrie* (à paraître*).*

Les rencontres de travail ont commencé en décembre 2000 à raison de 9 journées par an les deux premières années, maintenant plutôt sept. Trois ans et demi déjà….

4 Les appuis sur les divers apports des recherches

Les ressources étudiées sont celles diffusées depuis les années 1990 (apports didactiques et sur l'enseignement), dans la mesure où l'équipe jugeait que leur intégration était possible dans les pratiques uniquement par une écriture textuelle ou que leur prise en compte pouvait se faire par les manuels scolaires. Certes il s'agit là d'un pari ou d'un choix… Ces propositions ont été relues par le Conseil National des Programmes qui a émis un avis (positif) et fait des suggestions que nous avons prises en compte (ou non).

Les théories de l'apprentissage dominantes depuis une vingtaine d'années sont celles dites constructivistes ou socio-constructivistes. Nous suivons M.Artigue (2004) qui déclarent qu'elles ont été parfois transformées, de façon simplifiée, en théories de l'enseignement, sans doute pour lutter contre des pratiques enseignantes trop axées sur l'apprentissage de techniques, qui ont montré leurs limites. Par exemple, dixit Artigue, le calcul a été péjoré Nous avons essayé d'être vigilants, en renforçant la place des activités d'entraînement de familiarisation, en accordant une plus grande place au calcul.

5 Les autres textes ou propositions

Les autres textes consultés, même si certains étaient simultanés, furent des rapports du Ministère (par exemple le rapport de la Commission Kahane sur le calcul), diverses réactions de collègues ou d'institutions (APMEP, SMF…)

S'il est vrai que dans l'écriture de tout texte, les premiers concepteurs sont seuls garants de sa scientificité, le passage par le CNP (Conseil National des Programmes) tempère les contenus et les intentions, enrichit la communicabilité et l'accessibilité. Grâce à la consultation nationale de septembre 2002 nous est parvenu un certain nombre de textes qui ont tous été discutés et ont plus ou moins influencé les versions définitives.

Programmes de mathématiques 2002 : conceptions, perspectives et limites.

Les remarques du terrain ont surtout été faites sur les Programmes et moins sur les Documents d'Accompagnement.

II LES ENTRÉES POUR LA RÉDACTION

1 Le regard sur les différents utilisateurs et bénéficiaires de ces textes

Les élèves

Nous nous sommes appuyés sur les résultats des évaluations nationales et en particulier sur les items mal réussis ou manquants : résolution de problèmes, calcul mental, mesures.

Les enseignants et les outils mis à leur disposition

Enseignants aguerris

Les expériences des différents membres de l'équipe ont permis de lister un certain nombre de points noirs de l'enseignement des mathématiques ; nous avons retenu les points sur lesquels nous avons pensé avoir une influence grâce à l'appui des textes de programmes et des manuels.

Par exemple :

- une entrée dans les apprentissages numériques par des techniques, une réduction du mot mathématique **calcul** aux techniques opératoires : dénombrer, associer un nombre écrit à une quantité et vice versa, combiner des nombres entre eux selon des algorithmes définis par des signes (+, - , x) au détriment de « vrais » problèmes ;

et simultanément :

- un manque d'enseignement des technologies associées aux techniques (au sens de Chevallard) peut-être lié à une méconnaissance de ces technologies : pourquoi un décalage vers la gauche dans la deuxième ligne de la technique posée usuelle française de la multiplication, etc.
- un déficit de pratique de calcul mental par les maîtres et de compétences calculatoires orales par les élèves

et encore

- la mécompréhension des phénomènes en jeu dans la résolution de problèmes relayée en cela par la rédaction de 1995 qui donne l'illusion d'un détour efficace par des exercices dénués d'intention mathématique, diffusée ensuite par certaines progressions dans les manuels.

L'explicitation des Documents d'Application vise à permettre à des maîtres généralistes d'entrer dans la compréhension des phénomènes en jeu et dans la complexité des apprentissages. La mise à disposition de progressions de cycles (à la fin des Documents d'Application) a comme objectif de promouvoir et faciliter le travail d'équipe dans les écoles et les circonscriptions.

Enseignants en formation

La disponibilité de textes s'intéressant à une certaine progressivité des apprentissages selon les cycles nous paraît être une aide aux différentes formations utiles en particulier en première année.

Professeurs de mathématiques de collège ou lycée

L'objectif visé est de faire comprendre l'idée de niveaux de conceptualisation, qu'un objet mathématique peut être fréquenté, utilisé en acte, sans et avant d'être connu sous sa forme « officielle » (Douady 1986)

Les formateurs

Conseillers Pédagogiques et Inspecteurs de l'Éducation Nationale : CPC et IEN

Notre volonté est de leur fournir des textes de référence pour analyser des pratiques de classe : notamment, et cet impact a bien eu lieu, d'abord de constater, puis de chercher à changer le fait que les enseignants, dans leur grande majorité, ne proposent pas de problème en début d'apprentissage et n'acceptent pas de la part des élèves de stratégies différentes.

Les auteurs de manuels,

Une de nos ambitions est d'entraîner certains auteurs de manuels dans une nouvelle dynamique, en précisant, autant que faire se peut, les développements attendus sur les différentes notions

Formateurs

Beaucoup de formateurs ont bien souvent reconnu dans la nouvelle rédaction la trace des recherches antérieures et une explicitation plus fine des démarches supposées opérationnelles en 2002.

2 Penser les articulations pour une meilleure cohérence d'ensemble

Il est nécessaire de penser la cohérence des enseignements sur la scolarité obligatoire, donc de la maternelle (Découvrir les monde) au collège (les Mathématiques comme partie des Sciences) : nous avons donc cherché à travailler et respecter les articulations ; les programmes 1995 du collège nous ont donc fourni une limite supérieure. Mais simultanément il a fallu définir une progressivité.

- Cycle 1 au cycle 2 : passer d'expériences sur le monde (Découvrir le monde) – où figurent ce que certains appellent des savoirs proto-mathématiques- à des séances à visée explicitement mathématique.
- Cycle 2 au cycle 3 : affiner les niveaux de conceptualisation sur les entiers et les calculs associés : compréhension de l'écriture décimale des entiers, apprentissage des propriétés numériques élémentaires -règle des zéros, commutativité, associativité, distributivité- affinement des techniques opératoires composées -soustraction, multiplication, division- affinement du raisonnement dans le calcul et

les problèmes, construction du sens sur les structures additives ; passage d'une géométrie intuitive à une géométrie expérimentée, voire raisonnée (déductive)

- Cycle 3 – sixième : affiner le niveau de conceptualisation du nombre (entier, décimal, rationnel…), et la compréhension des écritures (entier, décimal, rationnel…), passer d'une géométrie naturelle essentiellement intuitive et expérimentale à une géométrie naturelle déductive (cela plutôt en sixième), pour préparer à une géométrie théorique (cinquième...)

L'articulation intra-mathématique consiste à revenir sur les objets mathématiques avec un point de vue différent selon les cycles, d'une part pour permettre la fixation des connaissances, d'autre part pour enrichir le niveau de conceptualisation.

Il est vrai que, pour certaines notions, deux choix s'offraient à nous : « boucler » sur un objet en cycle 3, par exemple la connaissance des fractions, ou bien définir des approches exigibles sur cet objet par niveau d'école : la fraction comme partage au cycle 3 et les autres aspects au collège. Effectivement nous avons tranché, aussi dans la nécessité de ne pas « alourdir » le programme..

III LES PROGRAMMES POINT PAR POINT ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

1. Le découpage

Le texte est organisé en différentes rubriques :

- exploitation de données numériques,
- connaissance des nombres (entiers, fractions, décimaux),
- calcul,
- espace et géométrie,
- grandeurs et mesure ;

la résolution de problèmes coiffe toutes les rubriques

Si les contenus de 1985, conformément aux hypothèses retenues déjà à l'époque pour les apprentissages de masse, envisageaient bien la résolution de problèmes comme transversale, la rédaction de 1995 (dans le libellé des compétences) avait juxtaposé la rubrique 'Résolution de problèmes' aux autres rubriques (Nombres, Calcul, Géométrie, Mesure)[1], semblant ainsi la mettre en parallèle.

Les manuels ont, dans leur grande majorité, suivi ce découpage en proposant des progressions spécifiques à chacune des cinq rubriques, différentes et séparées. La résolution de problèmes mal intégrée dans son moment « première rencontre d'une notion ou d'une technique » s'est ainsi souvent trouvée affublée d'un caractère général et dénuée d'intention mathématique (avec des questions du type : lire un énoncé pour le comprendre, pas pour le résoudre, trouver l'opération sans le résoudre). Il fallait donc revenir sur cette rédaction

Je vais maintenant parcourir chaque domaine en pointant certains aspects

[1] MEN DE (1995) *Programmes de l'école primaire*. Pages 106 à 111. CNDP et Savoir Lire.

2. Pourquoi la résolution de problèmes explicitement en transversal ?

Une entrée classique dans un certain nombre de présentations que nous faisons, R.Charnay et moi, sur les programmes est la suivante.

Considérons le problème des images, posé aux évaluations nationales à l'entrée en sixième en 2002 et 2003 et les taux de réussite.

Xavier range les 50 photos de ses dernières vacances dans un classeur.
Chaque page contient 6 photos.

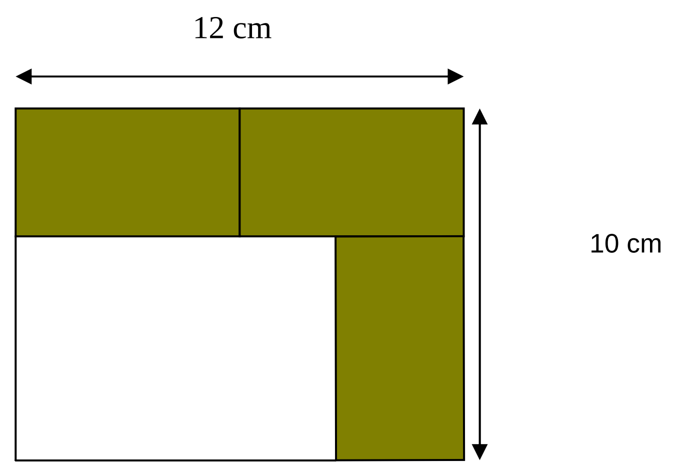
a) Combien y aura-t-il de pages complètes ?
b) Combien y a-t-il de photos sur la page incomplète ?
Il y a ……… pages complètes. **58 %** en 2002 et **53,6%** en 2003
Il y a ……… photos sur la page incomplète. **57 %** en 2002 et **57,2%** en 2003

Ce résultat est très faible compte tenu des connaissances que les élèves peuvent mobiliser pour le résoudre : schéma et dénombrement ; addition itérée ; essais de produits ; division. Certaines de ces connaissances sont acquises en général au cycle 3. Ainsi l'élève ne se sent sans doute pas autorisé à utiliser ses propres ressources pour répondre. Il se sent peut-être dans l'obligation pour un problème numérique de passer par un calcul voire une opération.

Prenons un autre exemple et les réussites en 2000.

Sophie a dessiné et colorié trois étiquettes rectangulaires toutes identiques sur une plaque de carton,

comme le montre le dessin. La plaque est rectangulaire et a pour longueur 12 cm et pour largeur 10 cm.



a) Calcule la longueur réelle d'une étiquette. Écris tes calculs. **44 %**
b) Calcule la largeur réelle d'une étiquette. Écris tes calculs. **23 %**

22 % des élèves ont mesuré

Deux difficultés sont certes inhérentes à ce problème :

- une première, que l'on pourrait ranger du côté de la prise d'informations : il s'agit de prendre conscience que les longueurs du dessin ne sont pas les longueurs réelles (si on contrôle instrumentalement le 12 cm) et d'en déduire qu'il s'agit d'un schéma

et non d'un dessin à l'échelle (cela a aussi à voir avec l'utilisation du dessin pour modéliser) ;
- une seconde, dans la capacité à opérer des déductions.

Dans les deux cas, du raisonnement est nécessaire, le contrôle de la réponse est possible par calcul.

C'est pourquoi nous avons cherché à rédiger de la façon la plus explicite la nécessité d'un fil conducteur par les problèmes
* d'une part pour restaurer ou construire une certaine autonomie des élèves *: problèmes pour chercher* en faisant des hypothèses, mais aussi en déduisant de nouvelles informations….
* d'autre part pour ancrer les nouvelles notions dans des expériences et anticipations sur du réel ou de l'évoqué : *problèmes pour construire des connaissances*

Les formateurs du premier degré au fait des avancées des hypothèses sur l'enseignement des apprentissages mathématiques depuis 20 ans sont en général persuadés de la nécessité de travailler cette double fonction des problèmes. Mais nous savons tous ici la difficulté à faire passer cela dans la pratique quotidienne des enseignants, d'une part du fait de leurs conceptions rétives à ce type d'approche, mais aussi, ne nous leurrons pas, du fait de connaissances mathématiques et didactiques souvent insuffisantes pour gérer *l'incertitude* de la mise en commun qui suit.

Revenons sur la rédaction qui a suivi : elle se décompose en trois temps.

<u>Un premier temps</u> est celui de la typologie des problèmes : dans les programmes de 1995, cette typologie pouvait sembler absolue, dans ceux de 2002 il est précisé son caractère relatif aux connaissances de l'élève, et la nécessité pour l'enseignant de toujours savoir accueillir des procédures personnelles

> *Un même problème, suivant le moment où on le propose, suivant les connaissances des élèves à qui on le destine et suivant la gestion qui en est faite, peut être résolu par élaboration de* ***procédures personnelles*** *ou, plus tard, par reconnaissance et utilisation d'une* ***procédure experte*** *appropriée. Ainsi, au tout début du cycle 2, un problème comme « De cette enveloppe qui contient 7 images, on retire 3 images. Combien l'enveloppe contient-elle d'images ? » est un véritable problème de recherche pour beaucoup d'élèves, dans la mesure où ils ne disposent pas encore de la procédure experte (utilisation de la soustraction) pour le résoudre. Ils peuvent cependant répondre à la question posée en utilisant des procédures personnelles (par exemple, schématisation de la situation et comptage, comptage en arrière de 3 à partir de 7)*
>
> Document d'Application cycle 2 page 13

Les activités relatives à la résolution de problèmes portent sur :
- *des* ***problèmes de recherche***[2]*, c'est-à-dire des problèmes pour lesquels l'élève ne dispose pas de démarche préalablement explorée : certains de ces problèmes sont utilisés* ***pour permettre la construction de connaissances***

[2] La distinction entre ces quatre types de problèmes est explicitée dans l'*Introduction* commune aux deux DA § *Une place centrale pour la résolution de problèmes* DA cycles 2 et 3 page 7.

***nouvelles**, d'autres sont davantage destinés à placer l'élève **en situation de chercher, d'élaborer une solution originale** ;*
- *des **problèmes** destinés à permettre **l'utilisation des acquis antérieurs** dans des situations d'application et de réinvestissement ;*
- *des **problèmes** destinés à permettre **l'utilisation conjointe de plusieurs connaissances** dans des situations plus complexes.*

(…) Un même problème, suivant le moment où on le propose, suivant les connaissances des élèves à qui on le destine et suivant la gestion qui en est faite, peut relever de l'une ou l'autre des catégories.

Document d'Application cycle 3 page 13

Extrait de la fiche d'application 'Problèmes pour chercher'

Quatre types de problèmes sont évoqués et peuvent être associés à des objectifs d'apprentissage différents.
- *Problèmes dont la résolution vise la construction d'une nouvelle connaissance.*
- *Problèmes destinés à permettre le réinvestissement de connaissances déjà travaillées, à les exercer.*
- *Problèmes plus complexes que les précédents dont la résolution nécessite la mobilisation de plusieurs catégories de connaissances.*
- *Problèmes centrés sur le développement des capacités à chercher : en général, pour résoudre ces problèmes, les élèves ne connaissent pas encore de solution experte.*

<u>Un second temps</u> est celui évoqué en début d'exposé : faire renoncer aux progressions de type méthodologique préconisées par certains manuels et entraîner vers la résolution de problèmes en liaison avec des connaissances : c'est l'idée portée par les activités liées d'un part aux **problèmes pour chercher** (voir fiche d'accompagnement), d'autre part aux **problèmes complexes :** dans cette fiche sont mis en avant les différents raisonnements : par émission d'hypothèses, par traitement exhaustif des cas, par déduction… Un certain nombre d'articles de *Grand N* (numéros 63-66-68-69-71) font avancer sur ce point, l'apport de Jean Julo gagne à être connu et travaillé.

<u>Un troisième temps</u> consiste à rappeler les moments fondamentaux d'une résolution de problèmes

*" Dans ces activités, **l'enseignant doit créer les conditions d'une réelle activité intellectuelle des élèves…** Les élèves doivent être mis en situation de prendre en charge les différentes tâches associées à la résolution d'un problème :*
- *faire des hypothèses, les tester ;* CHERCHER
- *élaborer une démarche pertinente afin de produire une solution personnelle ;*
- *vérifier par eux-mêmes les résultats obtenus ;* CONTROLER
- *formuler une réponse dans les termes du problème ;* REDIGER
- *expliquer leurs méthodes, les mettre en débat, argumenter. "* EXPLIQUER, ARGUMENTER DEVANT LES PAIRS

*" Les séances d'enseignement comportent en général différentes phases, avec des modes d'organisation diversifiés. Les phases de **recherche** sont souvent plus efficaces et plus riches si elles sont conduites en **petits groupes**, facilitant la confrontation des idées entre pairs et favorisant l'intérêt de tous les élèves pour la tâche proposée."*

Texte commun aux Documents d'Application cycles 2 et 3, pages 7 et 8 : " Une place centrale pour la résolution de problèmes ") :

Relevons l'insistance sur l'aspect CONTRÔLER
Ce mouvement sera enrichi par les notions d'*écrit de brouillon* versus *écrit destiné à être communiqué*. C'est une façon d'intégrer les recherches sur *composante privée et publique* du travail de l'élève (Coppé 1995) et son articulation avec la *vérification* : engager l'élève dans la publication par la certitude de la vérification.

Et les premiers pas vers ARGUMENTER, PROUVER
Cette tâche se limite souvent, à l'école primaire, après la recherche de solutions, à prouver qu'elles en sont bien. Ce qui est facile quand le problème est autovalidable par la rétroaction du matériel ou des connaissances déjà là (par exemple le problème des cartes triangles et carrés dans la fiche d'accompagnement *Problèmes pour chercher*).
La démarche argumentative peut être encore enrichie : par des connaissances à construire, des propriétés à inférer ou à prouver. Là commencent toutes les situations liées à la notion de preuve[3] : nous ne nous sommes pas lancés dans cette description…

Je prends un exemple simple de passage à la preuve dans le (b) du problème suivant[4]: il est possible de <u>prouver</u> pourquoi la question b) n'a pas de solution (autrement dit qu'il est sûr qu'on n'en trouvera jamais).

Il s'agit de répartir des jetons dans des boîtes vertes et blanches.

Il doit y avoir le même nombre de jetons dans des boîtes de la même couleur

a) 17 jetons, 2 boîtes vertes et 3 boîtes blanches
b) 17 jetons, 2 boîtes vertes et 4 boîtes blanches

MAIS les retours du terrain nous renvoient déjà des dérives et nous rendent encore plus modestes, si nous ne l'étions pas déjà, quant aux « effets » de ces écrits
Par exemple voici des exemples d'une interprétation erronée ce que peut être un problème de recherche :

- avoir l'illusion qu'il n'est rattaché à aucune connaissance mathématique ;
- essayer de choisir ceux qui ne mettent « aucune » connaissance mathématique en jeu….

3. Exploitation de données numériques

Problèmes liés aux opérations élémentaires
Depuis les travaux de Vergnaud (1985), puis ceux de Fayol et de Levain, il est reconnu dans le milieu des spécialistes proches de la didactique que la nature de l'opération la plus adaptée à la résolution d'un problème numérique ne définit pas sa difficulté : il existe des problèmes qui relèvent d'une addition plus complexes que d'autres qui relèvent d'une soustraction, il existe des problèmes de division à même contexte et avec des valeurs numériques identiques qui déclenchent des réussites différentes.

Exemple 1 (extrait de l'Évaluation nationale Sixième 1994) :
Lucie aime jouer aux billes. A la fin de la journée, elle a 8 billes de plus que le matin.
Pourtant la journée avait mal commencé : à midi, elle avait perdu 2 billes !
Que s'est-il passé l'après-midi ?

Réussite **21 %**

[3] ERMEL (1999) Vrai ? Faux ? On en débat INRP
[4] Extrait de Spécial Grand N (2003) *Points de départ* p88-89

Exemple 2 (extrait de l'Évaluation nationale Sixième 1995)
Jean paie un disque 48 F. Il lui reste alors 26 F.
Combien d'argent avait-il avant d'acheter le disque ?
Réussite : **85%** (et même **88%** avec oubli de l'unité)

Il nous est apparu nécessaire de communiquer ce fait aux différents acteurs des programmes : cette distinction apparaît par l'existence

- d'une explicitation des problèmes numériques, d'où une « nouvelle » rubrique ;
- de deux sous rubriques : **problèmes résolus en utilisant des procédures personnelles** ; **problèmes résolus en utilisant des procédures expertes** où il est possible de reconnaître (Document d'Application cycle 2 page 16-17) la typologie hiérarchisée des problèmes[5] selon la place de la question, du champ conceptuel des structures additives initialisée par G.Vergnaud (état transformation état, partie partie tout, comparaison de deux états, composition de transformations).

Certains ont fait remarquer que l'expression « procédure experte » était inadaptée ; la remarque est pertinente si on associe la procédure experte à une expertise générale. On peut en effet comparer « *Pierre a 17 billes, il en perd 9 : donc il en a maintenant 17-9* » (procédure naturelle -au sens concept quotidien- et experte) et « *Jean a 9 billes de plus que Marc. Jean a 17 billes. Donc Marc a 17-9 billes* « (procédure non naturelle dans le quotidien). Une Fiche d'Accompagnement (« Solutions personnelles solutions expertes » encours de rédaction) reviendra sur ce point.

À elle seule cette rubrique doit être accompagnée de formation : en effet le temps qui peut lui être consacré en formation initiale est souvent, par expérience, largement insuffisant, la formation continuée devrait pendre la relève …

4. Le calcul

Deux questions ont guidé notre réflexion, compte tenu des avancées des outils disponibles pour le calcul.

- Quels sont les besoins en calcul du futur citoyen et professionnel ?
- Quels sont les besoins en calcul pour la suite de l'enseignement des mathématiques ?

Ces différents besoins consistent en :

- rendre calculables des situations, c'est-à-dire modéliser (cf. la résolution de problèmes)
- traiter des calculs, de façon automatisée ou raisonnée, pour aboutir à un résultat exact ou approché ;
- programmer un calcul pour le rendre exécutable par une machine (cf. l'utilisation du tableur au collège)
- mais aussi utiliser et mobiliser des propriétés fondamentales, construites cognitivement comme des invariants de calcul (règle des zéros, commutativité, distributivité) pour, plus tard, transformer des écritures, notamment algébriques, contrôler, justifier des calculs par la connaissance de ces propriétés.

[5] Pour plus de détail consulter le livre du maître de *Le moniteur de Mathématiques : résolution de problèmes* cycle 3 (dir G.Vergnaud 1997) Hachette.

Voilà comment ont été croisées ces différentes facettes dans les programmes 2002

<table>
<tr><td></td><td>CALCUL AUTOMATIQUE</td><td colspan="2">CALCUL RÉFLÉCHI OU RAISONNÉ</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Résultat exact</td><td>Résultat approché</td></tr>
<tr><td>Calcul (essentiellement) mental</td><td>• Résultats mémorisés
• Procédures automatisées</td><td colspan="2">• Procédures construites ou reconstruites
choix des arrondis</td></tr>
<tr><td>Calcul papier</td><td>• Techniques opératoires
calcul posé</td><td colspan="2">• Procédures construites ou reconstruites
choix des arrondis</td></tr>
<tr><td>Calcul machine</td><td>Calculs usuels</td><td>Exemple : quotient entier et reste ; somme « hors limite »…</td><td>Exemple $6^{ème}$: quotients décimaux</td></tr>
</table>

Pourquoi la relance du calcul mental ?

Les pratiques des maîtres *laissent apparaître :*

- une confusion entre calcul et calcul posé, calcul et automatisation,
- une pratique insuffisante de calcul mental dans les classes,
- et une réduction du calcul mental au calcul automatique : résultats ou procédures mémorisées (par exemple, multiplier par 25 est souvent une routine enseignée sous la forme ‘multiplier par 100 et diviser par 4’)
- une résistance des enseignants face à l’emploi des calculatrices, ce qui est cohérent avec leur vision du calcul comme calcul automatique.

Les résultats des élèves en calcul mental

Les résultats des élèves concernant le calcul mental (cf. annexe) nous incite à renforcer la place du calcul mental et à enrichir l’aspect « automatique » par l’aspect « réfléchi ».

Le calcul mental est donc, sous les deux formes ci dessus, présenté comme une priorité à l’école primaire (et cela doit se poursuivre au collège) pour toutes les raisons suivantes :

- c’est un calcul d’usage, utile dans la vie ordinaire ;
- aucun calcul écrit ne peut être effectué sans une disponibilité suffisante de résultats connus ou obtenus mentalement : les erreurs dans la multiplication posée sont plus souvent dues à des erreurs « de table » qu’à des erreurs « de décalage » (près de 15 % des élèves, à l’entrée en Sixième) ; on sait aussi que la reconstruction de produits handicape fortement le processus du calcul (il faut les avoir tous mémorisés)
- le calcul mental est un moyen privilégié pour contrôler un résultat obtenu par un autre moyen ;
- le calcul mental joue un rôle important dans l’appropriation de nouvelles connaissances : perception rapide de rapports entre les nombres dans le cas de la

proportionnalité, de la simplification de fractions ou de la factorisation d'expressions algébriques simples

- le calcul mental est ainsi une aide à la conceptualisation ; et on peut penser qu'un déficit de compétences dans ce domaine constitue un handicap majeur pour de nombreux élèves à l'entrée au collège ; (cf. les travaux de Butlen Pézard 1996) : notamment se ramener à un cas calculable mentalement est souvent un bon moyen d'avancer dans la résolution d'un problème.

Mais surtout le calcul mental réfléchi dans la classe fait prendre conscience de l'existence de stratégies de calcul personnelles : il ré-introduit l'apprentissage du raisonnement dans le calcul dans la mesure où les stratégies seront justifiées. Il est donc aussi un moyen indirect de dés-automatiser le calcul dans les pratiques des maîtres.

Indirectement c'est un moyen minimal de modification de pratiques de maîtres : la faille dans la croyance à la stratégie unique….

Notons aussi notre insistance sur les conditions de la mémorisation :

- des outils de structuration aident à la compréhension : bande numérique, puis tableau de nombres ;
- un apprentissage des tables est possible dans l'ordre de « mémorisation naturelle »: ajouter 1, puis 2, les doubles, de proche en proche par reconstruction (et pas comme autrefois les tables dans l'ordre croissant du multiple en jeu)
- l'importance des variantes de formulation :
  - 40 moins 7 ; de 7 pour aller à 40 ; 40 je recule de 7 ; 40 c'est 7 + ? etc.
  - 50 partagé en 5 ; en 50 combien de fois 5 ;

Nous aurions pu encore plus insister sur le calcul approché par rapport à l'aspect exact

Des chercheurs pensent (notamment Dehaene 1999) que coexistent deux systèmes d'encodage pour le numérique : « *le calcul exact est codé dans un format dépendant du langage (codage verbal des faits arithmétiques) alors que le calcul approximatif implique des réseaux visuo-spatiaux non verbaux, également mobilisés dans des tâches spatiales* » Bideaud et Lehalle p134

Et la place du calcul posé ?

L'apprentissage du calcul posé vise surtout à permettre des calculs simples à la main et à intégrer les techniques opératoires **en liaison** avec les propriétés de la numération écrite en base dix et des opérations : s'il ne s'agit pas jusqu'à savoir pour l'élève les justifier explicitement, mais il doit les utiliser correctement en acte.

Par contre l'enseignant, et c'est le but de la Fiche d'Accompagnement sur ce thème, doit pouvoir en justifier les différents aspects et relativiser les choix culturels qui ont été faits dans son pays[6].

L'apprentissage des techniques ne doit pas disparaître de l'école, même si, en temps que techniques, elles n'ont plus grande utilité. Par contre le discours technologique qui accompagne l'enseignement de ces techniques est important, dans la mesure aussi où seule cette technologie est transférable à d'autres objets (algèbre, polynômes).

[6] Il est vrai que sur la Fiche d'Accompagnement nous aurions pu proposer quelques techniques étrangères contemporaines (allemandes ou britanniques)

L'apprentissage de la technique autrement que par psittacisme est toujours à l'ordre du jour.

Certains ont été choqués de la limitation des apprentissages à certaines techniques, essentiellement celles sur les nombres entiers, sans prolonger ni vers la multiplication des décimaux non entiers, ni vers aucun quotient décimal, ni quotient de décimaux non entiers.

Ici il faut y voir une volonté de liaison : il est clair que l'extension de la technique de la multiplication des entiers vers celle des décimaux, ou encore celle de la division de deux entiers vers un quotient décimal, ne pose aucun nouveau problème, pour peu que l'élève ait compris le principe de l'écriture décimale généralisée aux non entiers. Mais justement ce principe n'est pas complètement installé à la fin du cycle 3 : laisser au collège le soin d'avoir de problèmes consistants (notamment la recherche de la forme de la multiplication de deux décimaux) permet de relancer le questionnement sur la nature de l'écriture décimale….

Quant à la calculatrice, sa place à l'école est légitimée comme outil de calcul contemporain, mais aussi pour relativiser l'importance accordée à l'apprentissage des techniques opératoires classiques.

La Fiche d'Accompagnement qui lui est consacrée décrit les quatre aspects de son entrée en classe :

- comme tout artefact, son utilisation nécessite un apprentissage spécifique, notamment pour les facteurs constants, la mémoire, la différence de signification entre les opérateurs de la machine et les symboles mathématiques ;
- l'utilisation d'une machine doit être contrôlée (c'est-à-dire sollicitée à bon escient et avec un contrôle des résultats obtenus) ;
- elle peut être source d'exploration de phénomènes numériques (la comptine numérique, le produit par dix, la division par dix) ou de problèmes, par exemple comment calculer 247 x 39 avec la machine, sans utiliser la touche [x] ;
- dans la résolution de problèmes, l'usage de la calculatrice est une aide (par exemple pour explorer un phénomène numérique ou pour les élèves dont les résultats sont faibles en calcul, en leur permettant d'avoir, malgré tout, accès à une activité mathématique), mais son utilisation nécessite une organisation particulière des calculs dont il faut également penser à conserver une trace.

5. Grandeurs et mesure

Chacun aura ans doute pointé dans les écrits des programmes 2002 :

- l'insistance sur un travail des grandeurs avant de passer à leur mesure : ce point sensible sera développé de façon plus détaillée dans une Fiche d'Accompagnement à paraître ; cette fiche réintroduira d'ailleurs le calcul sur les grandeurs :

  certes 5 cm + 17 cm = 22 cm

  mais aussi 4 cm + 5 m = 5,04m et au collège 4 m x 5 cm = 2000 cm^2 =0,2 m^2
- la limitation des exercices de transformation des mesures par changement d'unités et son intégration dans la rubrique proportionnalité (Document d'Application cycle 3 p17) au détriment de l'utilisation systématique du tableau dit de conversion.

6. Espace et géométrie

L'introduction du 'spatial' dans les programmes ailleurs qu'au cycle 1 s'appuie sur les travaux de Berthelot et Salin. Certains pourront trouver nos avancées trop timides, mais une Fiche d'Accompagnement co-écrite avec MH Salin donnera des exemples d'activités développant des connaissances spatiales.

Des éléments de progressivité ont été proposés, aussi bien au niveau de l'appréhension des objets (passage du global à l'analytique, puis à la reconnaissance de propriétés) et de leur représentation (image à l'échelle versus schéma ou texte d'où l'introduction du dessin à main levée) que des modes de validation : instrumentale versus déductif.

Un nouveau paragraphe, *Relations géométriques : alignement, perpendicularité, parallélisme, longueurs, angles, axe de symétrie* fournit la boîte des éléments d'analyse qui seront retenus dans la géométrie usuelle.

IV SATISFACTIONS ET LIMITES

- Ces documents ont suscité beaucoup de réactions positives, mais surtout dans le milieu des professeurs de lycée, de collège ou d'école « initiés », parmi ceux qui ont une culture minimale pour décoder les informations… en quelque sorte un texte attendu (ou peut-être un texte par lequel une certaine communauté se sent reconnue, légitimée ?)
- Beaucoup d'IEN ont manifesté des interrogations et une grande perplexité, comme la prise de conscience d'un décalage dans les pratiques entre le fait et l'attendu… : pour les IEN, ces programmes veulent de grands changements, d'où leur inquiétude quant à l'effectivité.
- La somme de littérature institutionnelle ou proche de l'institution produite depuis 2002 est impressionnante.. Comment les Professeurs des Ecoles vont-ils prendre connaissance de tous ces écrits et les intégrer à leurs pratiques ? Quel temps cela va-t-il prendre ?
- Beaucoup écrire ne veut pas dire tout écrire : certains vont lire ce qui n'est pas écrit comme une interdiction. C'est ce que j'appelle *le paradoxe de l'explicitation* : si certains points du programme sont plus explicités que d'autres, des lecteurs estiment que les autres sont moins importants, et même à la limite doivent disparaître. Aucun écrit n'est transparent (Peroz 2000[7]).
- Si la cohérence longitudinale (entre les mathématiques des différents niveaux) a été très travaillée dans notre groupe, celle transversale (entre les disciplines d'un même niveau) beaucoup moins. Se pose notamment de façon rémanente la question du lien entre mathématiques et autres disciplines : pour pouvoir utiliser des mathématiques, il est nécessaire d'en avoir appris (construit) un minimum. A mon avis, à l'école primaire, ce lien doit être remplacé par celui des mathématiques avec la réalité, dans une dynamique de modélisation : il existe des situations bien choisies dont un traitement mathématique permet d'anticiper des réalisations, des effets, des conséquences.
- Les réactions de certains acteurs de la noosphère ont été variées. Si des critiques très constructives ont été émises, la virulence de certaines réactions a surpris. Pourtant

[7] Peroz (2000) Des problèmes dans les énoncés. *Grand N* 66. IREM de Grenoble."

toute contribution fondée sur les textes des programmes, écrite et publique, a été bienvenue et étudiée.

V CONCLUSION

On ne peut viser un enseignement idéal des mathématiques (au sens des démarches préconisées en 2003) uniquement par l'écriture de textes, qui, peut-être, ne sont lus que par ceux qui ont une ou deux disciplines à leur charge et, sans doute, ne sont compréhensibles dans toutes leurs nuances que par ceux qui ont déjà une culture mathématique et didactique suffisante.

Je voudrais ici lister les fonctions possibles de ces écrits :

un guide pour les auteurs de manuels ;
un support pour les formations initiales et continues ;
un support d'harmonisation de pratiques de formateurs d'IUFM et de terrain ;
un prétexte à échanges constructifs avec les autres acteurs ou chercheurs
un support pour les T1 T2 T3[8] sortant d'IUFM et bien formés
la trace d'une culture professionnelle (datée) de milieux spécialisés (donc un objet d'étude pour les chercheurs).

Ils pourraient être un support pour les épreuves de concours de Professeurs des Écoles, notamment la base d'un programme national.

MAIS il est sûr que, tels quels et pas seulement à cause de leurs imperfections, ces textes sont insuffisants pour amener les pratiques à se transformer complètement, sans formation ni accompagnement des enseignants titulaires. Peut-être même sont-ils plus déclencheurs d'angoisse que de changement…...

La réflexion doit se poursuivre notamment sur :

- les nœuds de la scolarité obligatoire : par exemple l'insuffisance du modèle linéaire comme seul modèle de relation entre deux grandeurs (pour le futur citoyen qui croit trop vite à la proportionnalité de tout),
- les dispositifs de diffusion et de partage de cette culture d'enseignement : formation initiale consistante, formation continue, association de professeurs des écoles à l'écriture de documents d'application, dégagement d'un pourcentage de programmes à la liberté des enseignants (comme au Portugal), manuel unique avec livre du maître clé en main et liste de situations adaptées aux contenus….

Quoiqu'il en soit, n'oublions pas que : « *le monde est une soupe et la pensée le plus souvent une fourchette, ce qui aboutit rarement à un bon repas* »Mulisch H 1999[9].

Références bibliographiques

ARTIGUE M. (2004) L'enseignement du calcul aujourd'hui : problèmes, défis perspectives ; *Repères IREM* n° 54. 23-40

ARTIGUE M. (2004) Enseigner les mathématiques aujourd'hui. Pourquoi ? Pour qui ? Comment ? *Bulletin APMEP* n°449. 742-756

[8] Titulaires 1ère année, 2nde année, 3ème année.

[9] Mulisch H (1992) *De ontdekking van de Hemel*. Traduction La découverte du ciel 1999. Folio p1031

BERGEAUT J.F. (2002) Quoi de neuf dans les nouveaux programmes de mathématiques de l'école élémentaire ? *Bulletin APMEP* n°441. 418-429

BIDEAUD ET LEHALLE (dir) 2002 *Le développement des activités numériques chez l'enfant*. Paris : éditions Lavoisier

BUTLEN D., PEZARD M. (1996) *Rapports entre habileté calculatoire et « prise de sens » dans la résolution de problèmes numérique*. Cahier de DIDIREM 27. IREM de Paris 7.

CHARNAY R. (2002) Pour une culture mathématique de l'école primaire. *Bulletin APMEP* n°441. 409-417

CHARNAY R. (2004) Les nouveaux programmes pour l'école primaire. *Gazette de la SMF* n°99. 45-49

CNP - CREM (2002) Actes du colloque *Qu'enseigne-t-on aujourd'hui en mathématiques dans les écoles élémentaires d'Europe et que pourrait-on y enseigner ?* Paris, janvier 2002 (à paraître)

COPPE S. (1995)Types de connaissances mises en œuvre par l'élève dans la détermination de la composante publique de son travail. *Différents types de savoirs et leur articulation* (dir Arsac et al). 129-144. La Pensée Sauvage.

COPPE S. (2003) Quelques réflexions sur les nouveaux programmes de mathématiques des cycles 2 et 3 de l'école primaire. *Grand N* n°71. 85-90

COQUIDE M.L., LEBEAUME J. (2003) La découverte de la nature et des objets à l'école : hier et aujourd'hui. *Grand N* n°72. 105-113.

DELEDICQ A. (2003) Que sont et à quoi servent les Mathématiques ? 1ère partie in *Plot* n°104, 2-7 ; 2nde partie in *Plot* n°105, 2-8.

DURAND GUERRIER V. (2004) Enseigner les mathématiques en primaire, un défi à relever. *Gazette de la SMF* n°99. 41-44

Grand N (2003) *Spécial Points de départ*. Activités et problèmes mathématiques pour cycle 3 et collège. IREM de Grenoble.

HOUDEMENT C. (2002) Actes du colloque « *Qu'enseigne-t-on aujourd'hui en mathématiques dans les écoles élémentaires d'Europe et que pourrait-on y enseigner ?* » Paris, janvier 2002 (à paraître)

HOUDEMENT C. (2004) Les programmes 2002 et la division. *Gazette de la SMF* n°99. 50-56

JULO J. (2002) Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N* n°69. 31-52. IREM de Grenoble.

KAHANE J.P. (coord.) (2002) *L'enseignement des sciences mathématiques*. Paris : Odile Jacob.

ROBERT, LATTUATI, PENNINCX (1999) *L'enseignement des mathématiques au lycée. Un point de vue didactique*. Paris : Ellipses.

SALIN M.H. (2002) Quelques réflexions à propos du nouveau programme de l'école maternelle. *Grand N* n°70. 57-62.

ANNEXE

Voici les taux de réussite aux exercices de calcul mental d'évaluations nationales de sixième et de cinquième.
Exercices de calcul mental composés de 5 calculs.

Lecture de chaque calcul 2 fois. Puis 15 secondes pour répondre

Exercice 1 6ème 2002 et 2003

a) cent quatre-vingt-dix-huit plus dix. 84,1 80,8

b) cent vingt-trois plus deux dizaines. 73,8 74,8

c) trente-sept divisé par dix. 56 41,6

d) sept multiplié par dix mille 87,9 84,9

e) quatre cent cinq moins dix 80,8 78,3

Exercice 15 6ème 2002 et 2003
a) quarante-sept plus trente-trois 86,1 84

b) trois fois zéro virgule cinq. 46,2 43,6

c) soixante moins dix-neuf. 67,1 65

d) un virgule sept plus deux virgule trois. 64 61,3

e) deux virgule cinq multiplié par quatre. 49,1 43,5

Exercice 16 (6ème 2002 et 2003) *exercice 21* 5ème 2002
La consigne est Entourez la meilleure réponse pour …
En même temps, l'enseignant écrit au tableau et efface au bout de quinze secondes.

a) 5 525 + 535. 71,8 71,2 79,5

1 000	5 000	6 000	10 000	55 000

b) 4,9 x · 202 30,6 26,9 37,5

2	2,5	25	250	2 500

c) 250 **:** 11 66,6 61,2 73,2

100	500	800	1 000	10 000