

COPIRELEM

*Commission Permanente des IREM pour l'enseignement des mathématiques à
l'école élémentaire.*

Concours externe
de recrutement
des Professeurs des Ecoles

Mathématiques

Annales 2004

Sujets et corrigés

ARPEME

*(Association pour l'élaboration et la diffusion
de **R**essources **P**édagogiques sur
l'**E**nseignement des **M**athématiques à l'**E**cole)*

COPIRELEM

*Commission Permanente des IREM pour l'enseignement des mathématiques à
l'école élémentaire.*

Concours externe
de recrutement
des Professeurs des Ecoles
Mathématiques

Annales 2004

Sujets et corrigés

Ces annales ont été rédigées par :

Jean Claude Aubertin (IUFM de Franche-Comté)
Annie Berté (IUFM d'Aquitaine)
Nicole Bonnet (IUFM de Bourgogne)
Joël Briand (IUFM d'Aquitaine)
Alain Duval (IUFM d'Aquitaine)
Pierre Eysseric (IUFM d'Aix-Marseille)
Claire Gaudeul (IUFM de Lille)
Yves Girmens (IUFM de Montpellier)
Michel Jaffrot (IUFM des Pays de la Loire)
Gabriel Le Poche (IUFM de Bretagne)
Claude Maurin (IUFM d'Aix-Marseille)
Catherine Taveau (IUFM de Créteil)

Chaque sujet est pris en charge par trois correcteurs

La relecture finale du document a été effectuée par :

Jean-Claude Lebreton (IUFM d'Orléans-Tours)
Florence Michon (IREM de Grenoble)
Muriel Fénichel (IUFM de Créteil)

REMERCIEMENTS

Ces annales ont pu être menées à bien grâce aux contributions de personnes, association et institutions :

- **Nos collègues formateurs à l'enseignement des mathématiques qui exercent en IUFM, ou en circonscriptions**, qui ont fait parvenir les sujets.
- **L'ARPEME** (Association pour l'élaboration et la diffusion de ressources pédagogiques sur l'enseignement des mathématiques à l'école)
Cette association a pour but de favoriser le développement de la réflexion sur l'enseignement des mathématiques à l'école et sur la formation des professeurs à l'enseignement des mathématiques :
 - en aidant à la communication d'expériences, à la diffusion de documents de formation et de recherche sur l'enseignement des mathématiques.
 - en apportant un soutien à l'organisation de colloques et séminaires de réflexion rassemblant les formateurs intervenant à divers titres dans la formation en mathématiques des professeurs.
 - en prenant en charge l'élaboration, l'impression et la diffusion de tous documents utiles pour les formateurs en mathématiques des professeurs des écoles : documents pédagogiques écrits et audiovisuels, actes des colloques, comptes-rendus de séminaires.
- **La COPIRELEM** (Commission permanente des **IREM** pour l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire) et l'**IREM (Institut de recherche pour l'enseignement des mathématiques)** de l'université de Paris VII Denis Diderot.

SOMMAIRE

Informations

L'ÉPREUVE DU CRPE EN MAI 2004.....	6
AVERTISSEMENT	7
CONSEILS AUX CANDIDATS.....	7
INFORMATION.....	7
TABLEAU RÉCAPITULATIF 1.....	8
TABLEAU RÉCAPITULATIF 2.....	9

Les sujets et leurs corrigés

	N° page du sujet	N° page du corrigé
AIX-MARSEILLE, CORSE, MONTPELLIER, NICE, TOULOUSE.	10	127
AMIENS, ORLÉANS-TOURS, ROUEN.....	21	149
BESANÇON.....	29	161
BORDEAUX, CAEN, CLERMONT-FERRAND, LIMOGES, NANTES, POITIERS, RENNES.....	37	173
CRETEIL, PARIS, VERSAILLES.....	45	187
DIJON, NANCY-METZ, REIMS, STRASBOURG.....	53	198
GRENOBLE.....	63	210
GUADELOUPE	74	227
GUYANE.....	82	239
LILLE.....	90	253
LYON.....	99	271
MARTINIQUE	113	288
NOUVELLE-CALEDONIE.....	119	301

L'ÉPREUVE DU CRPE EN MAI 2004

Textes officiels de référence :

- BO n° 5 janv 92 définissant les épreuves des concours de professeurs des Ecoles.
 - Le recueil de textes réglementaires sur les IUFM de Janvier 1992 (MEN)
 - BO n° 43 nov 94 : recommandations relatives aux concours de recrutement des professeurs des Ecoles.
 - BO n° 45 déc 94 : Référentiel des compétences et capacités caractéristiques d'un professeur d'Ecole
 - La note de service 94-271 du 16 nov. 96 sur de nouvelles recommandations relatives aux concours de recrutement des professeurs des Ecoles.
- L'épreuve du CRPE se présente actuellement¹ comme suit :

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS) MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES

- Cette partie vise à apprécier les connaissances mathématiques des candidats pour des notions relevant de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Les questions posées ne se limitent pas, bien entendu, à des exercices ou problèmes extraits de manuels scolaires de l'école primaire. Certaines questions permettent de valoriser des candidats manifestant une certaine aisance dans le domaine mathématique.

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS) ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

- L'épreuve d'analyse de travaux d'élèves consiste à repérer les erreurs et les qualités dans une production d'élèves, à les analyser et les commenter en référence aux objectifs et aux contenus de la discipline tels qu'ils sont définis dans les programmes officiels.

SECOND VOLET (8 POINTS) DIDACTIQUE

Pour enseigner à des élèves de l'école primaire il ne suffit pas de connaître les contenus mathématiques à transmettre. Cette connaissance est bien sûr nécessaire mais certainement pas suffisante. Une formation à l'enseignement des mathématiques ne se réduit ni à l'acquisition de contenus mathématiques, ni à un discours de pédagogie générale (qui, par nature exclut l'étude des contenus). Ce second volet est consacré à l'analyse d'approches didactiques et démarches pédagogiques correspondantes.

¹ NB : Les textes officiels qui définissent le concours de recrutement des Professeurs des Ecoles maintiennent actuellement la structure de l'épreuve. A plus long terme, nous invitons les candidats à se tenir informés.

AVERTISSEMENT

Pour ce qui concerne le volet travaux d'élèves et le volet didactique, la plupart des sujets de didactique soulèvent de vraies questions. Nous avons eu le souci de donner des réponses détaillées sur le plan didactique et donc, quelquefois, plus approfondies que ce que l'on peut attendre d'un candidat au CRPE. Certaines remarques des correcteurs sont alors ajoutées en italiques.

CONSEILS AUX CANDIDATS

La lisibilité, la correction et la rigueur des réponses sur les plans mathématique et didactique sont bien entendu les critères principaux d'évaluation. Cependant, une écriture difficilement lisible, la présence de « fautes » d'orthographe par trop grossières et fréquentes, les coquilles fâcheuses, le verbiage pompeux et vide, l'abus d'expressions hors de propos, finissent par avoir une incidence sur l'évaluation, et cela, quelle que soit la précision du barème de notation appliqué. Nous conseillons donc de relire la copie en tenant compte de tout cela.

INFORMATIONS

Conformément à la législation, le terme « euro » est invariable.

TABLEAU RECAPITULATIF 1

2004	Première partie (volet mathématique)										Analyse de travaux d'élèves	
	ARITHMÉTIQUE - ALGÈBRE					GÉOMÉTRIE - MESURE					CYCLE	THÈME
	Décimaux - fractions	Proportionnalité (% , éch , vitesse)	Numeration Arithmétique : div./multiples	Algèbre - Équations	Fonction et/ou graphique	Constructions Règle/Compas	Propriétés triang. / quadrila.	Thalès Transformations	Pythagore Périmètre-Aire Graduation	Solides (patron ; volume)		
AIX-MARSEILLE, CORSE, MONTPELLIER, NICE, TOULOUSE		•	•	•	•	•	•	•	•	•	3	Résolution d'un problème additif
AMIENS, ORLÉANS-TOURS, ROUEN		•		•		•		•	•		3	Résolution de problèmes (éval.CE2)
BESANÇON	•		•	•				•	•		2	Dénombrement ; comptage sur quadrillage effacé
GROUPE OUEST-CENTRE		•				•			•		3	Résolution problème à 2 étapes
CRÉTEIL, PARIS, VERSAILLES			•			•	•		•		3	Calculs de durées
DIJON, NANCY-METZ, REIMS, STRASBOURG				•		•	•	•	•	•	3	Rédaction énoncé d'un problème
GRENOBLE			•			•	•				3	Mesures d'aires et de périmètres
GUADELOUPE		•	•			•			•		2/3	Pbs. soustractifs – proportionnalité - nombres sexagésimaux
GUYANE				•		•	•		•		3	Problème de recherche
LILLE		•		•		•	•	•	•		3	Résolution de problèmes (éval.CE2)
LYON		•	•			•			•	•	3	Proportionnalité et histogrammes
MARTINIQUE	•	•			•						3	Calcul mental (évaluation 6 ^{ème})
NOUVELLE CALÉDONIE			•	•		•			•		3	Symétrie axiale

TABLEAU RECAPITULATIF 2

2004	Second volet (relatif à une réflexion didactique)	
	CYCLE	SUJET ÉTUDIÉ
AIX-MARSEILLE, CORSE, MONTPELLIER, NICE, TOULOUSE	3	Surfaces de formes différentes ayant la même aire. Comparaison des aires de deux surfaces. Comparaison de deux manuels abordant le même sujet.
AMIENS, ORLÉANS-TOURS, ROUEN	3	Mise en correspondance figure/programme de construction ; comparaison de deux fiches.
BESANÇON	3	Opérations à trou : comparaison de procédures, analyse de progression.
GROUPE OUEST-CENTRE	3	Apprentissage de la notion d'aire.
CRÉTEIL, PARIS, VERSAILLES	3	Étude de la valeur du quotient et du reste dans une division euclidienne : variables didactiques, démarches enseignantes, tâche de l'élève.
DIJON, NANCY-METZ, REIMS, STRASBOURG	2	Reproduction de figures au CE1 – Alignements au CP. (progression, variables didactiques)
GRENOBLE	2	Numération (cardinal/ordinal ; groupements) – Calcul réfléchi de sommes – Écritures $a + b$ et $a - b$. Comparaison de progressions à partir de deux sommaires.
GUADELOUPE	2/3	La multiplication.
GUYANE	3	Problèmes additifs au CE2 : compétences, variables didactiques, différents sens de l'addition.
LILLE	3	Problèmes de recherche (carrés magiques) : étude d'une séquence (compétences, variables, différentes phases).
LYON	2	Dénombrement utilisant les dizaines ; signification des chiffres dans la numération chiffrée : comparaison des activités proposées dans deux manuels de CP.
MARTINIQUE	3	Séquence relative à la construction de figures planes (compétences, progression, analyse des figures proposées).
NOUVELLE CALÉDONIE	2/3	Techniques opératoires de la soustraction et problèmes soustractifs.

TABLEAU RECAPITULATIF 1

2004	Première partie (volet mathématique)										Analyse de travaux d'élèves	
	ARITHMÉTIQUE - ALGÈBRE					GÉOMÉTRIE - MESURE					CYCLE	THÈME
	Décimaux - fractions	Proportionnalité (% , éch , vitesse)	Numeration Arithmétique : div./multiples	Algèbre - Équations	Fonction et/ou graphique	Constructions Règle/Compas	Propriétés triang. / quadrila.	Thalès Transformations	Pythagore Périmètre-Aire Graduation	Solides (patron ; volume)		
AIX-MARSEILLE, CORSE, MONTPELLIER, NICE, TOULOUSE		•	•	•	•	•	•	•	•	•	3	Résolution d'un problème additif
AMIENS, ORLÉANS-TOURS, ROUEN		•		•		•		•	•		3	Résolution de problèmes (éval.CE2)
BESANÇON	•		•	•				•	•		2	Dénombrement ; comptage sur quadrillage effacé
GROUPE OUEST-CENTRE		•				•			•		3	Résolution problème à 2 étapes
CRÉTEIL, PARIS, VERSAILLES			•			•	•		•		3	Calculs de durées
DIJON, NANCY-METZ, REIMS, STRASBOURG				•		•	•	•	•	•	3	Rédaction énoncé d'un problème
GRENOBLE			•			•	•				3	Mesures d'aires et de périmètres
GUADELOUPE		•	•			•			•		2/3	Pbs. soustractifs – proportionnalité - nombres sexagésimaux
GUYANE				•		•	•		•		3	Problème de recherche
LILLE		•		•		•	•	•	•		3	Résolution de problèmes (éval.CE2)
LYON		•	•			•			•	•	3	Proportionnalité et histogrammes
MARTINIQUE	•	•			•						3	Calcul mental (évaluation 6 ^{ème})
NOUVELLE CALÉDONIE			•	•		•			•		3	Symétrie axiale

TABLEAU RECAPITULATIF 2

2004	Second volet (relatif à une réflexion didactique)	
	CYCLE	SUJET ÉTUDIÉ
AIX-MARSEILLE, CORSE, MONTPELLIER, NICE, TOULOUSE	3	Surfaces de formes différentes ayant la même aire. Comparaison des aires de deux surfaces. Comparaison de deux manuels abordant le même sujet.
AMIENS, ORLÉANS-TOURS, ROUEN	3	Mise en correspondance figure/programme de construction ; comparaison de deux fiches.
BESANÇON	3	Opérations à trou : comparaison de procédures, analyse de progression.
GROUPE OUEST-CENTRE	3	Apprentissage de la notion d'aire.
CRÉTEIL, PARIS, VERSAILLES	3	Étude de la valeur du quotient et du reste dans une division euclidienne : variables didactiques, démarches enseignantes, tâche de l'élève.
DIJON, NANCY-METZ, REIMS, STRASBOURG	2	Reproduction de figures au CE1 – Alignements au CP. (progression, variables didactiques)
GRENOBLE	2	Numération (cardinal/ordinal ; groupements) – Calcul réfléchi de sommes – Écritures $a + b$ et $a - b$. Comparaison de progressions à partir de deux sommaires.
GUADELOUPE	2/3	La multiplication.
GUYANE	3	Problèmes additifs au CE2 : compétences, variables didactiques, différents sens de l'addition.
LILLE	3	Problèmes de recherche (carrés magiques) : étude d'une séquence (compétences, variables, différentes phases).
LYON	2	Dénombrement utilisant les dizaines ; signification des chiffres dans la numération chiffrée : comparaison des activités proposées dans deux manuels de CP.
MARTINIQUE	3	Séquence relative à la construction de figures planes (compétences, progression, analyse des figures proposées).
NOUVELLE CALÉDONIE	2/3	Techniques opératoires de la soustraction et problèmes soustractifs.

AIX-MARSEILLE, CORSE, MONTPELLIER, NICE, TOULOUSE

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS) MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE 1

Sur une carte routière, un segment de 10 cm représente une longueur de 25 km dans la réalité.

Quelle est l'échelle de cette carte ?

EXERCICE 2

Parmi les affirmations suivantes, indiquer, en justifiant, celles qui sont vraies et celles qui sont fausses. **Les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte.**

Affirmation 1 :

Le produit de deux diviseurs d'un nombre entier est un diviseur de ce nombre.

Affirmation 2 :

La médiane d'un triangle partage ce triangle en deux triangles de même aire.

Affirmation 3 :

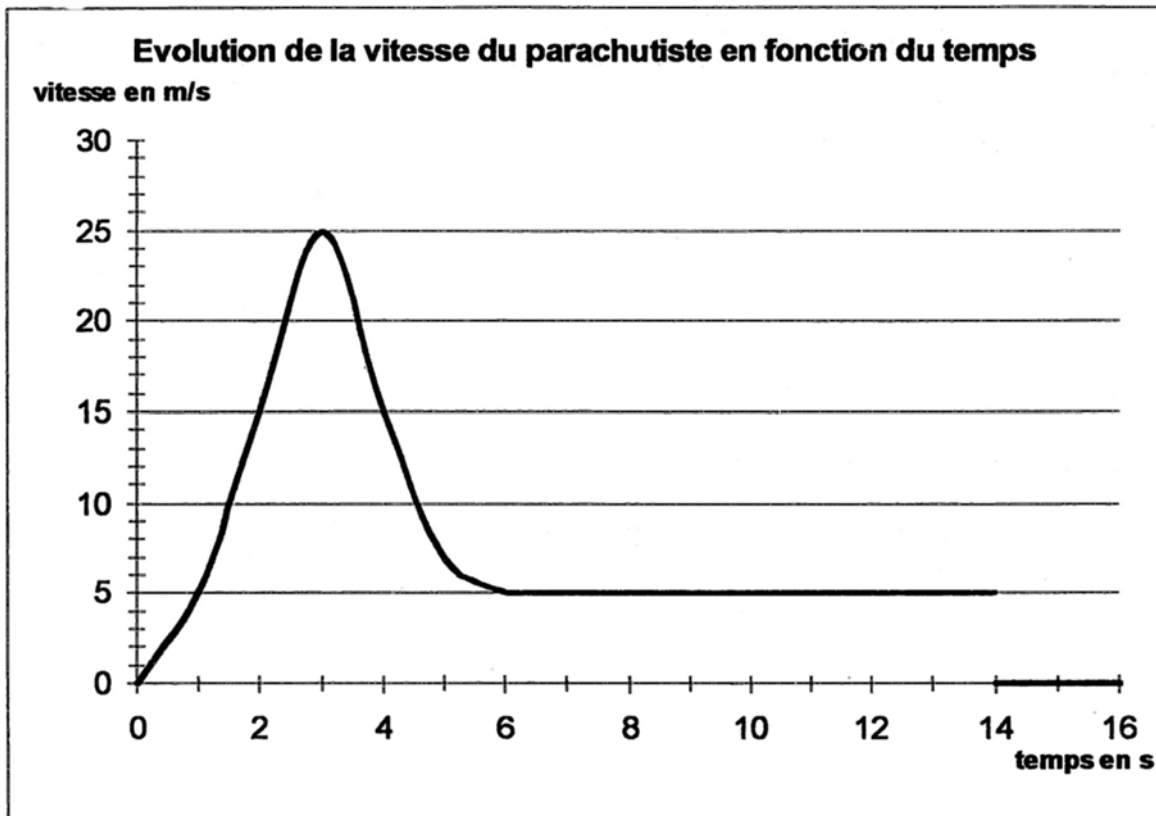
$\frac{1}{3}$ est solution de l'équation $x^3 + x^2 + x = 0,48$

Affirmation 4 :

Si on multiplie le diamètre d'un cercle par 2 son aire est multipliée par 2.

EXERCICE 3

Le graphique ci-dessous représente l'évolution de la vitesse d'un parachutiste lors d'un saut.

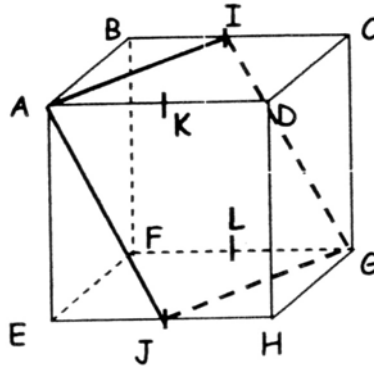


- 1) Pendant la chute sur quel intervalle de temps la vitesse du parachutiste est-elle constante ?
- 2) Quelles sont les coordonnées du point correspondant à l'ouverture du parachute ?
- 3) Décrire l'évolution de la vitesse du parachutiste entre les points d'abscisses 3s et 6s.
- 4) Quelle distance le parachutiste parcourt-il pendant la deuxième moitié du temps de sa chute ?
- 5) Sachant que la distance totale parcourue par le parachutiste est de 115 mètres, donner une valeur arrondie au centième de sa vitesse moyenne de chute exprimée en km/h.

EXERCICE 4

On considère le cube ABCDEFGH ci-dessous, de côté 4 cm.

I, J, K et L sont les milieux respectifs de [BC], [EH], [AD] et [FG].



- 1) Le point D appartient-il au segment [IG] ? Expliquer.
- 2) a) Justifier que $AC = CH = HF = FA$.
b) Peut-on en déduire que ACHF est un losange ? Expliquer.
- 3) Démontrer que les quadrilatères AICK, CKJG et AIGJ sont des parallélogrammes.
- 4) Démontrer que AIGJ est un losange.
- 5) Le quadrilatère AIGJ est-il un carré ? Justifier.
- 6) Construire, à la règle et au compas, le losange AIGJ en vraie grandeur en laissant visibles tous les traits de construction. La description de la procédure de construction n'est pas demandée.

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS) ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES
--

Voici l'énoncé d'un exercice donné lors d'une évaluation à l'entrée en sixième.

Exercice :

*Une école comporte deux classes.
Dans cette école, il y a 26 filles.
Dans la première classe, il y a 12 filles et 11 garçons.
Dans la deuxième classe, il y a 27 élèves.*

Quel est le nombre de garçons dans la deuxième classe ?

Vous trouverez en annexe 1 les réponses de quatre élèves.

- 1) Analysez les démarches utilisées par les élèves en précisant les erreurs commises.
- 2) Quelles sont les compétences visées dans cet exercice ?
- 3) Une donnée peut être supprimée dans l'énoncé. Laquelle ?
Quel peut être l'intérêt de la conserver ?
- 4) Aucun élève n'a utilisé de représentations schématiques. En proposer une.

SECOND VOLET (8 POINTS)

Se reporter aux annexes 2 et 3 ; justifier les réponses à partir de vos connaissances des programmes 2002.

Annexe 2 :

Extrait de « J'apprends les maths » - Manuel de CM1, éditions RETZ 98.

Annexe 3 :

Extrait de « Le Nouvel Objectif Calcul » - Manuel de CM1, éditions HATIER 95

- 1) Quel est le principal objectif d'apprentissage commun à ces deux documents ?
- 2) Déterminer l'objectif visé par chacun des exercices n° 1, 2, 3, 4 du document de l'annexe 3, page 2/2.
- 3) Dans les activités des exercices n° 1 et 2 du document de l'annexe 2, page 1/2, à quel type de démarche les élèves sont-ils invités, et pourquoi ?
- 4) Donner les réponses de l'exercice n° 2 du document de l'annexe 3, page 2/2. Exprimer 2 ou 3 procédures qui ont pu être utilisées par les enfants pour le résoudre.
- 5) Dans l'exercice n° 3 de l'annexe 2, page 1/2, les enfants sont guidés par un programme de construction pour reproduire un rectangle de 8 x 12. Quels autres supports et outils ce programme de construction pourrait-il prévoir ?
- 6) a) L'énoncé de la partie 3 des activités « Découverte » de l'annexe 3, page 1/2 est décliné en deux sous-questions ; sont-elles pertinentes ?
b) Répondre à cette partie 3.
- 7) En quoi les activités proposées particulièrement dans l'annexe 2 préparent-elles à aborder plus tard les unités légales de mesure d'aires ?
- 8) Quels sont les exercices des deux documents qui constitueraient aussi des activités de remédiation destinées aux élèves ayant des difficultés à comprendre que des surfaces de formes différentes peuvent avoir la même aire ?

Annexe 1

Les productions de 4 élèves

Utilise ce cadre pour faire tes recherches.

$$\begin{array}{r} 26 \\ - 12 \\ \hline 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ - 18 \\ \hline 09 \end{array}$$

Manon

Réponse : Il y a 9 garçons.

Utilise ce cadre pour faire tes recherches.

$$\begin{array}{r} 22 \\ + 11 \\ \hline 33 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 50 \\ - 26 \\ \hline 24 \end{array}$$

Rémi

Réponse : Il y a 24 garçons.

Les productions de 4 élèves (suite)

Utilise ce cadre pour faire tes recherches.

$$\begin{array}{r} \textcircled{1} \\ 23 \\ + 27 \\ \hline 50 \end{array} \quad \begin{array}{r} 50 \\ - 26 \\ \hline 24 \end{array} \quad \begin{array}{r} 24 \\ - 11 \\ \hline 13 \end{array}$$

Antoine

Réponse : Il y a 13 garçons.

Utilise ce cadre pour faire tes recherches.

$$26 - 12 = 14$$

$$27 - 14 = 13$$

Clara

Réponse : Il y a 13 garçons
dans la deuxième classe

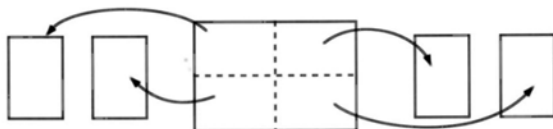
Annexe 2 (page 1/2)

Je découvre

1

Tu vas apprendre à comparer l'étendue de deux figures.

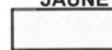
Découpe une feuille blanche de format ordinaire en 4 rectangles blancs égaux et détache le rectangle bleu et le rectangle jaune de ton fichier d'activités.



BLEU



JAUNE



2

Mathilde compare l'étendue d'un rectangle blanc et celle du rectangle bleu.



En découpant le rectangle blanc, montre qu'il est moins étendu que le bleu.

Trouve une autre manière de découper le rectangle blanc.

Mathieu compare l'étendue d'un rectangle blanc et celle du rectangle jaune.

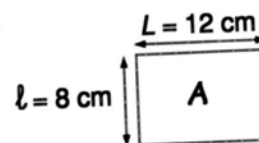


En découpant le rectangle blanc, montre qu'il a la même étendue que le jaune.

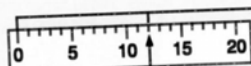
Là encore, trouve une autre manière de découper le rectangle blanc.

3

Pour les activités suivantes, tu auras besoin de découper des rectangles. Voici une méthode pour le faire rapidement avec l'exemple d'un rectangle A représenté ci-contre en réduction. Il te faut pour cela une feuille ordinaire.

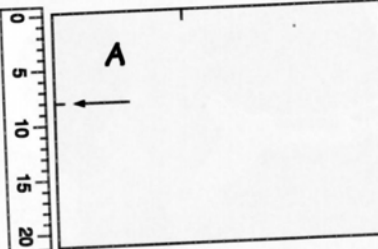


1



Reporte la longueur L (12 cm) sur la feuille.

2

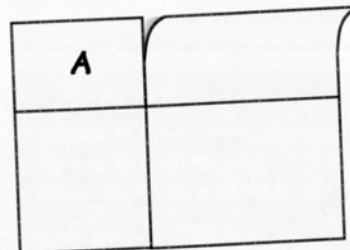


Reporte la largeur l (8 cm).

3



Forme les côtés du rectangle par pliage...

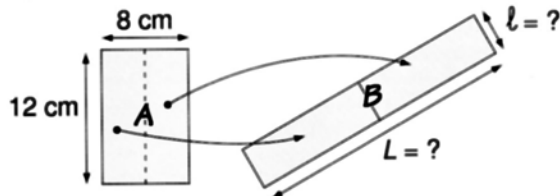


... puis découpe selon les plis.

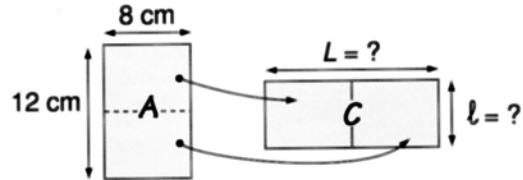
Selon la même méthode, fabrique deux autres rectangles de mêmes dimensions.

Annexe 2 (page2/2)

- 4 Prends un des rectangles que tu viens de fabriquer.
Imagine qu'on le découpe en deux parties égales, comme ci-dessous, suivant les pointillés, pour former un rectangle B...



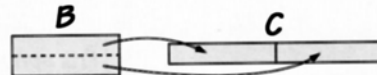
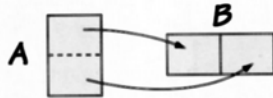
...ou un rectangle C :



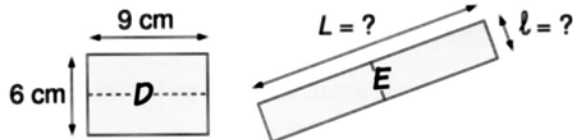
Quelles seront les dimensions de ces deux nouveaux rectangles B et C ?
Vérifie tes réponses en formant ces deux nouveaux rectangles.
Que peut-on dire de l'étendue des rectangles A, B et C ?

J'ai appris

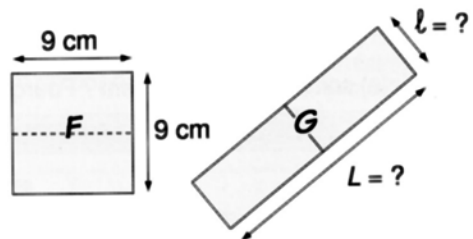
À partir d'un rectangle, on peut en former beaucoup d'autres qui ont la même étendue :



- 5 Imagine qu'on découpe le rectangle D pour former un rectangle E de même étendue...
Quelles seront les dimensions du rectangle E ?
Si tu n'es pas sûr(e), construis d'abord le rectangle D, puis forme le rectangle E.



Imagine qu'on découpe le carré F pour former un rectangle G de même étendue....



Annexe 3 (page 1/2)



Aires (1)

Découverte

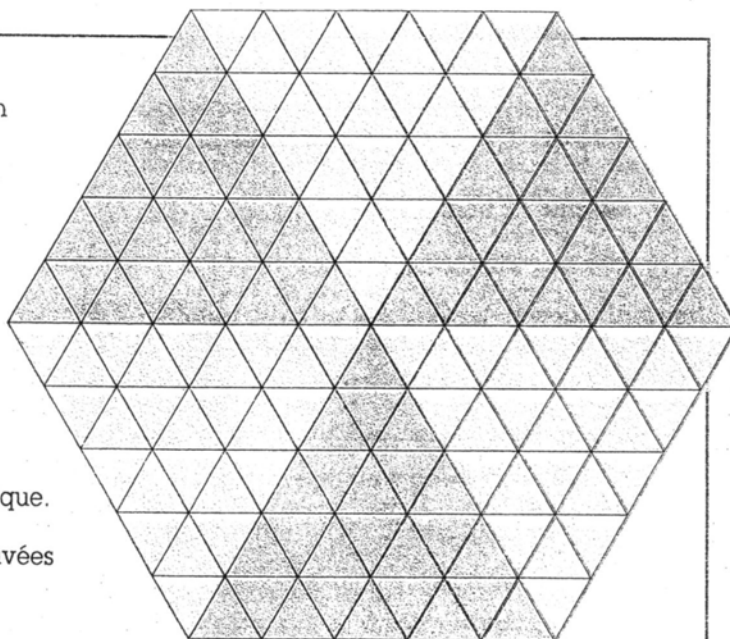
Martin, le jardinier

On a confié à Martin la décoration du grand massif floral de la ville.

Il a la forme d'un hexagone régulier.

On impose à Martin une condition : cette forme doit être partagée, à partir du centre, en 6 parties exactement superposables.

Martin a déjà une solution : celle que l'on voit sur le dessin. Mais il y a d'autres solutions.

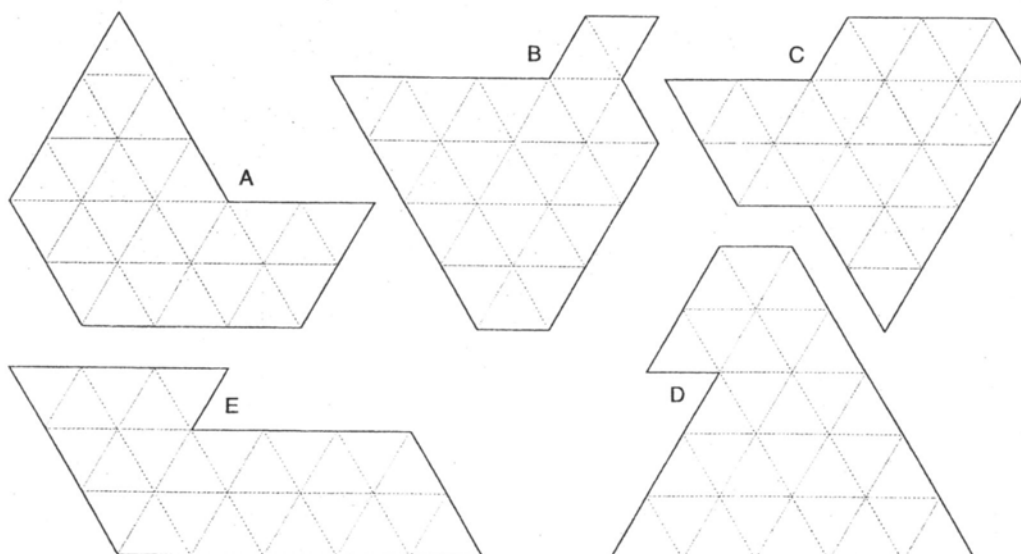


1. Essaie d'en trouver plusieurs. Sers-toi pour cela d'une feuille de calque.

2. Confronte les formes que tu as trouvées avec celles de tes camarades. Combien de formes différentes avez-vous obtenues ?

3. Sébastien a, lui aussi, cherché à résoudre le problème de Martin. Voici les formes qu'il a trouvées.

- Quelles sont celles qui répondent bien à la consigne de Martin ?
- Quelles sont celles qui ont la même aire ?



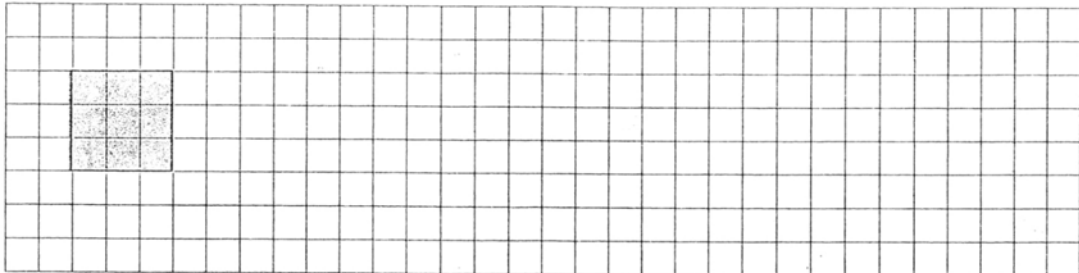
Annexe 3 (page 2/2)



Exercices et problèmes

1

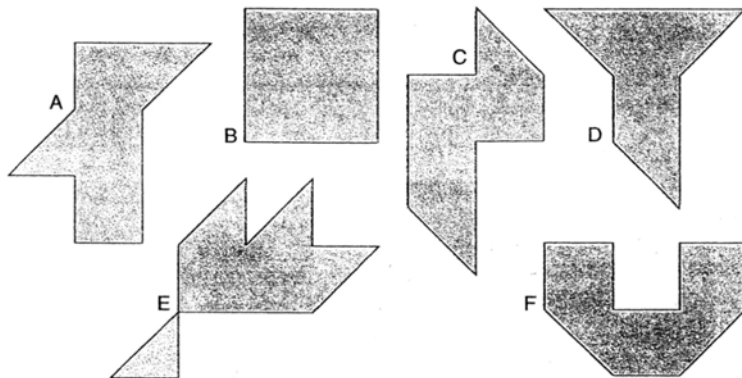
Sur ce quadrillage, dessine des figures de différentes formes qui ont la même aire que le modèle. Utilise une feuille de calque.



2

Parmi les 6 figures qui sont proposées, 5 ont la même aire.

Trouve celle qui a une aire différente. Pour t'aider, utilise la figure suivante comme unité.

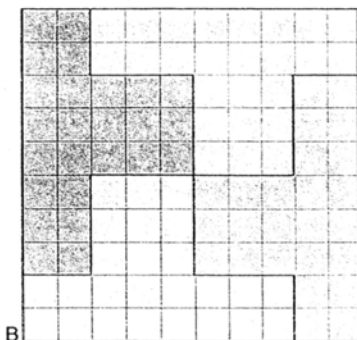
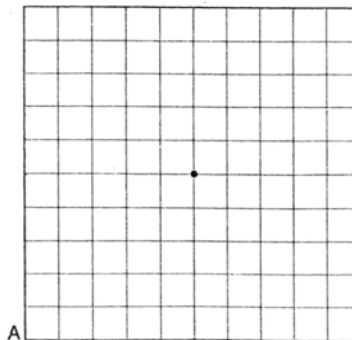


3

En partant du centre, partage le carré A en 4 parties superposables.

Trouve plusieurs solutions. Tu as déjà un premier exemple en B.

Utilise une feuille de calque.



4

Dans une feuille de papier quadrillé, découpe un rectangle de 32×20 carreaux. Ensuite, découpe cette forme à ton idée en plusieurs morceaux et, sans en perdre, reconstitue une figure de ton choix.

Quelle est l'aire de cette nouvelle figure ?

AMIENS, ORLÉANS-TOURS, ROUEN

PREMIER VOLET (12 POINTS)

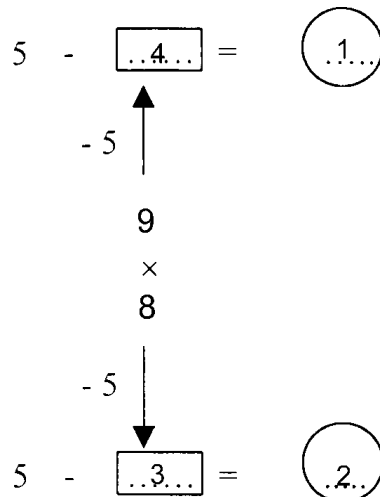
PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS) MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE 1

"Se souvenir des tables de multiplication..."

Voici une méthode pour retrouver les résultats des tables de multiplications quand les deux facteurs sont supérieurs à 5 et que les autres résultats sont connus :

- On complète le diagramme suivant (exemple 9x8):



- Ensuite, on ajoute la somme des deux nombres encadrés multipliée par 10 au produit des deux nombres entourés. Dans l'exemple ci-dessus, cela donne : $(4 + 3) \times 10 + (1 \times 2) = 7 \times 10 + 2 = 72$.

1) Compléter, sur la feuille annexe 1, le diagramme correspondant à 8×7 ainsi que le calcul.

2) On veut maintenant effectuer le produit $a \times b$.

- Compléter, sur la feuille annexe, le diagramme.
- Montrer que le calcul issu du diagramme s'exprime sous la forme : $10(a + b - 10) + (10 - a)(10 - b)$.
- En déduire que le calcul issu du diagramme s'exprime bien sous la forme $a \times b$.

EXERCICE 2

On a demandé à 1000 personnes ayant un téléphone portable quel opérateur ils utilisent parmi les sociétés A, B ou C. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous :

	A	Société B	C	Total
Effectif	400			1000
Angle (en degré)		198°		

On veut construire le diagramme circulaire (de rayon 5cm) représentant la situation présentée dans le tableau.

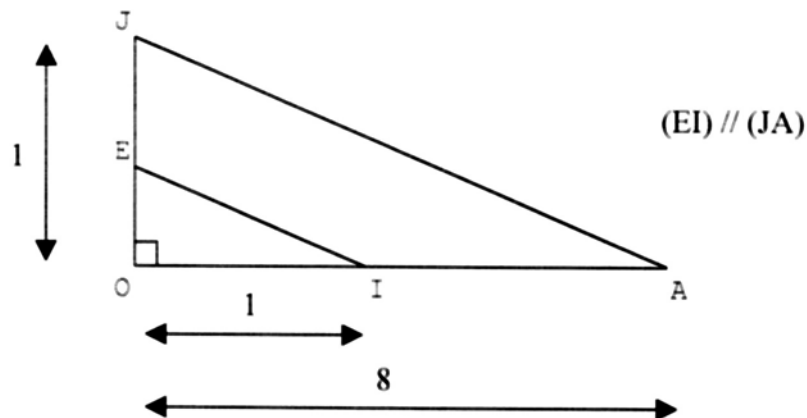
- 1) Compléter le tableau sur la feuille annexe 1. Préciser le détail des calculs des deux cases grisées.
- 2) Dresser le diagramme circulaire ainsi que sa légende.

EXERCICE 3

Cet exercice est composé de trois parties. Les deux premières sont indépendantes. L'unité de longueur utilisée est le centimètre.

Partie I : Construction de l'inverse d'une longueur

On considère la figure suivante, non réalisée en vraie grandeur :



- 1) Montrer que $OE = 0,125$.
- 2) En supposant que $OA = x$ ($x \neq 0$), démontrer que $OE = \frac{1}{x}$.
- 3) En déduire un programme de construction de l'inverse d'une longueur en n'utilisant que la règle graduée et le compas (et sans calcul).

Partie II : Construction de la racine carrée d' une longueur

On veut construire un segment de longueur $\sqrt{13}$. Soit $[AK]$ un segment de 14 cm et O le point de $[AK]$ tel que $OA = 13$ cm. La perpendiculaire à (AK) passant par O coupe un des deux demi-cercles de diamètre $[AK]$ en F .

- 1) Faire une figure en vraie grandeur.
- 2) Démontrer que $OF^2 = FK^2 - 1$ et $OF^2 = FA^2 - 169$.
- 3) En déduire que $2 \times OF^2 = FK^2 + FA^2 - 170$.
- 4) Démontrer que le triangle AFK est un triangle rectangle en F .
- 5) En déduire que $OF^2 = 13$ et donc que $OF = \sqrt{13}$.

Partie III :

Construire, à l'aide des parties I et II, un segment de longueur $\frac{1}{\sqrt{11}}$ cm uniquement à la règle graduée et au compas (et sans calcul) ; vous laisserez les traces de construction.

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES

Exercice 13, extrait de l'évaluation nationale à l'entrée au CE2, session 2003

*Un enfant compte son argent de poche.
Il a 2 billets de 10 €, 4 pièces de 2 €, 7 pièces de 1 €.
Il veut échanger tout cet argent contre des billets de 5 €.
Combien de billets lui donnera-t-on en échange de tout cet argent ?*

Elève A :

$$10+10 \quad 2+2+2+2 \quad 1+1+1+1+1+1+1$$

$$4 \rightarrow 5 \text{ €} \quad 2-2-1 = 1 \rightarrow 5 \text{ €} \quad 1-1-1-1-1 = 1 \rightarrow 5 \text{ €}$$
$$2-2-1 = 1 \rightarrow 5 \text{ €}$$

Il peut obtenir 7 billets de 5 €

Elève B :

10 €	2 €	1 €
10 €	2 €	1 €
	2 €	1 €
	2 €	1 €
		1 €
		1 €
		1 €

$$\begin{array}{r} 35 \\ + 5 \\ \hline 40 \end{array}$$

Il peut obtenir 40 billets de 5 €

Elève C :

$$10 + 10 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 33 \text{ €}$$

$$33 - 5 = 29 - 5 = 24 - 5 = 19 - 5 = 14 - 5 = 9 - 5 = 4$$

Il peut obtenir 6 billets de 5 €

Questions :

- 1) Précisez une compétence mise en oeuvre dans cette situation.
- 2) Analysez les trois procédures présentées.
- 3) S'il existe des procédures erronées, envisagez des éléments de remédiation.
- 4) Présentez une autre procédure experte.

SECOND VOLET (8 POINTS)

Se référer aux documents des annexes 2 et 3 extraits de « J'apprends les maths », édition Retz.

- 1) Répondez aux questions posées aux élèves.
- 2) Présentez sous forme d'un tableau les ressemblances et les différences entre ces deux situations.
- 3) Quelles sont les connaissances mathématiques nécessaires pour effectuer les tâches demandées ?
A quel niveau proposeriez-vous chacune de ces deux activités ?
- 4) Présentez sous forme d'items les éléments d'évaluation observables pour ces deux activités.

Annexe 1

Exercice 1:

Question 1

$$\begin{array}{c}
 5 - \boxed{\dots\dots} = \bigcirc \dots\dots \\
 \uparrow -5 \\
 8 \\
 \times \\
 7 \\
 \downarrow -5 \\
 5 - \boxed{\dots\dots} = \bigcirc \dots\dots
 \end{array}$$

Calcul:

Question 2-a

$$\begin{array}{c}
 5 - \boxed{\dots\dots} = \bigcirc \dots\dots \\
 \uparrow -5 \\
 a \\
 \times \\
 b \\
 \downarrow -5 \\
 5 - \boxed{\dots\dots} = \bigcirc \dots\dots
 \end{array}$$

Exercice 2:

	Société			
	A	B	C	Total
Effectif	400			1000
Angle (en degré)		198°		

Détail de la case grisée pour le calcul d' effectif:

.....
.....
.....

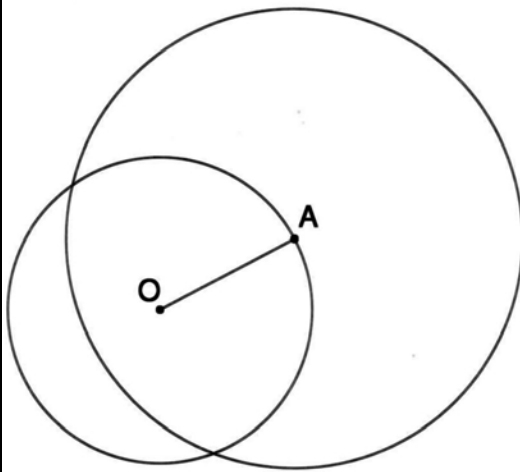
Détail de la case grisée pour le calcul d' angle:

.....
.....
.....

Annexe 2

SITUATION A

La figure ci-dessous a été construite en suivant l'une de ces trois fiches. Laquelle ?
Pourquoi, en suivant les consignes des deux autres fiches, on n'obtient pas cette figure ?



Fiche 1

1. Trace $[OA] = 20 \text{ mm}$.
2. Trace un cercle de centre A et de rayon 60 mm.
3. Trace un cercle de centre O et de rayon 40 mm.

Fiche 2

1. Trace un cercle de centre O et de rayon 20 mm.
2. Place un point A sur ce cercle.
3. Trace $[OA]$.
4. Trace un cercle de centre A et de rayon 30 mm.

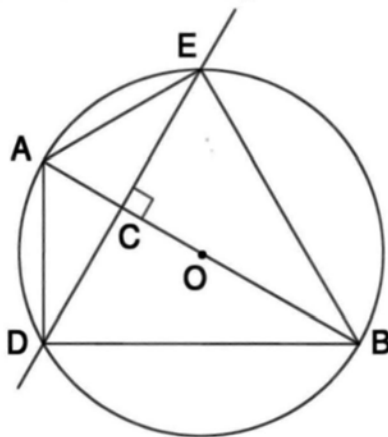
Fiche 3

1. Trace un cercle de centre O et de rayon 20 mm.
2. Place un point A à l'intérieur de ce cercle.
3. Trace $[OA]$.
4. Trace un cercle de centre A et de rayon 30 mm.

Annexe 3

SITUATION B

La figure reproduite ici à taille réelle a été construite en suivant l'une des trois fiches. Laquelle ? Pourquoi, en suivant les consignes des autres fiches, on n'obtient pas forcément cette figure ?



Fiche n° 23

1. Trace un cercle de centre O et de rayon 24 mm.
2. Trace un diamètre de ce cercle. Appelle A et B ses deux extrémités.
3. Place un point C sur [AO].
4. Trace une droite passant par C et perpendiculaire à [AB].
5. Appelle D et E les deux points où cette droite coupe le cercle.
6. Trace le quadrilatère AEBD.

Fiche n° 24

1. Trace un cercle de centre O et de rayon 24 mm.
2. Trace un diamètre de ce cercle. Appelle A et B ses deux extrémités.
3. Place le point C, milieu de [AO].
4. Trace une droite passant par C et perpendiculaire à [AB].
5. Appelle D et E les deux points où cette droite coupe le cercle.
6. Trace le quadrilatère AEBD.

Fiche n° 25

1. Trace un cercle de centre O et de rayon 24 mm.
2. Trace un diamètre de ce cercle. Appelle A et B ses deux extrémités.
3. Place un point C sur [AO].
4. Trace une droite passant par C.
5. Appelle D et E les deux points où cette droite coupe le cercle.
6. Trace le quadrilatère AEBD.

BESANÇON

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS) MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE 1

a) Parmi les nombres suivants, quels sont les multiples de 5 ?

1025 ; $3,6 \times 10^2$; 312×10^0 ; 0×10^6 ; 40120×10^{-1} ; 19×10^6

b) Soient les nombres A et B tels que :

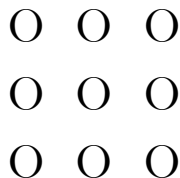
$$A = 2 \times 3^4 \times 3 \times 15 \quad \text{et} \quad B = 30^3$$

Quelles sont les puissances de 3 qui divisent A ?

Quelles sont les puissances de 3 qui divisent B ?

EXERCICE 2

Voici 9 jetons disposés « en carré » :



François possède un certain nombre de jetons et souhaite les disposer « en carré » en les utilisant tous.

Il fait une première tentative : il dispose n jetons par côté, il lui en reste 52.

Il fait une deuxième tentative : il dispose 4 jetons de plus par côté, il lui en manque alors 60.

Calculer le nombre de jetons que possède François.

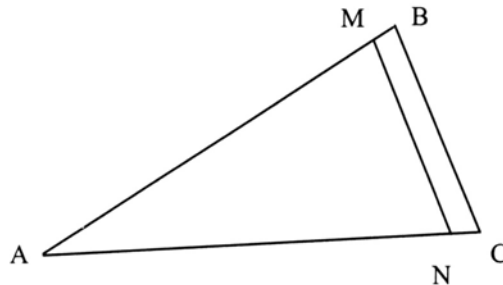
Quelle est la solution à son problème ?

EXERCICE 3

Sur la figure ci-après, les points A, M, B d'une part et A, N, C d'autre part sont alignés.

La figure n'est pas à l'échelle. On donne :

$AM = 1,000001$; $AB = 1,000002$; $AC = 1,000001$ et $AN = 1$



On voudrait savoir si les droites (MN) et (BC) sont parallèles. Deux élèves réfléchissent à la question. L'un prétend que les droites sont parallèles, l'autre affirme le contraire. Lequel a raison ?

EXERCICE 4

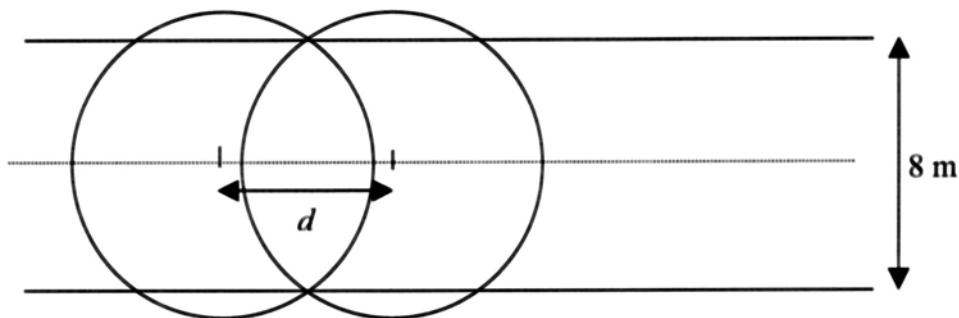
On veut éclairer une route en ligne droite à l'aide de projecteurs. Chaque projecteur, situé à 9 mètres de hauteur sur l'axe médian de la route, diffuse un cône de lumière dont l'angle au sommet mesure 60 degrés. La largeur de la route est égale à 8 mètres.

Le but du problème est de trouver quelle distance maximale doit séparer deux projecteurs pour qu'il n'y ait aucune zone d'ombre sur la route.

On appelle d la distance maximale séparant deux projecteurs.

Calculer le rayon r du disque de lumière projeté sur le sol ; en donner la valeur arrondie au dixième.

En déduire la distance d au dixième près.



DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS) ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES
--

Les annexes 1 et 1bis présentent les productions de quatre élèves de deuxième année de cycle 2, Charlotte, Léo, Manon et Dylan.

Cet exercice est extrait de « Cap Math » CP aux éditions HATIER – 2000

1) Quelles sont les procédures engagées par les élèves ?

2) Dégagez les qualités et les erreurs de chacune des productions. Vous présenterez votre travail sous la forme du tableau ci-dessous que vous reproduirez.

	<u>Qualité(s)</u>	<u>Erreur(s)</u>
Charlotte		
Léo		
Manon		
Dylan		

3) Quelle(s) remédiation(s) l'enseignant peut-il envisager ?

SECOND VOLET (8 POINTS)

L'annexe 2 est tirée de l'ouvrage « J'apprends les maths » aux éditions RETZ 2000.

- 1) A quel niveau de la scolarité primaire les exercices de l'annexe 2 peuvent-ils être proposés ? Pourquoi ?
- 2) Dans l'exercice numéro 1 :
 - a) Terminez les calculs de Mathieu dans les deux situations.
 - b) Décrivez puis comparez les procédures utilisées par les deux élèves.
- 3) Analysez la progression proposée dans ces trois exercices.
- 4) Que peut-on envisager pour les élèves en difficulté qui n'entrent pas dans les procédures décrites ?
- 5) a) En vous référant au titre de la « séquence 29 » et à l'analyse que vous venez de conduire, explicitez les intentions de l'auteur.
b) Proposeriez-vous ce support à l'identique dans une situation d'apprentissage ? Pourquoi ?

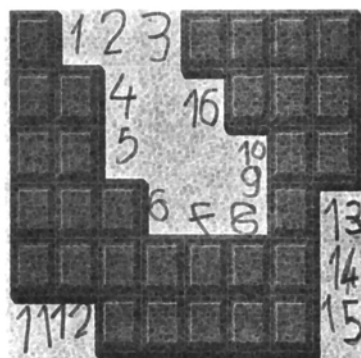
Annexe 1



Pauvre Gribouille !

Les petites souris ont grignoté
la tablette de chocolat
qu'Arthur avait achetée pour Gribouille.

Combien de carrés de chocolat les souris ont-elles mangés ?



16

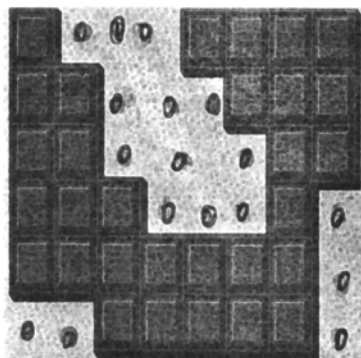
Charlotte



Pauvre Gribouille !

Les petites souris ont grignoté
la tablette de chocolat
qu'Arthur avait achetée pour Gribouille.

Combien de carrés de chocolat les souris ont-elles mangés ?



17

lès



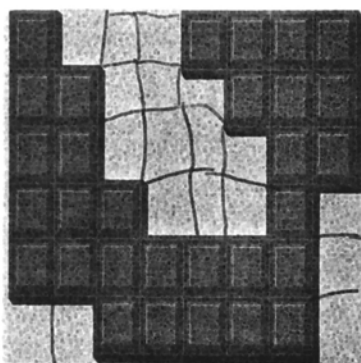
Annexe 1bis



Pauvre Gribouille !

Les petites souris ont grignoté
la tablette de chocolat
qu'Arthur avait achetée pour Gribouille.

Combien de carrés de chocolat les souris ont-elles mangés ?



$$3 + 3 + 4 + 3 = 13$$

$$+ 2$$

$$+ 3$$

18

$$\begin{array}{r} 13 \\ + 2 \\ + 3 \\ \hline 18 \end{array}$$

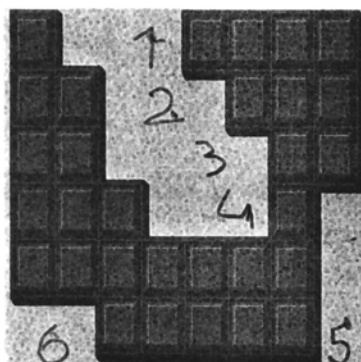
MANON



Pauvre Gribouille !

Les petites souris ont grignoté
la tablette de chocolat
qu'Arthur avait achetée pour Gribouille.

Combien de carrés de chocolat les souris ont-elles mangés ?



6

Dylan



Annexe 2

Lien entre addition et soustraction, entre multiplication et division

29

Calculs présentés oralement

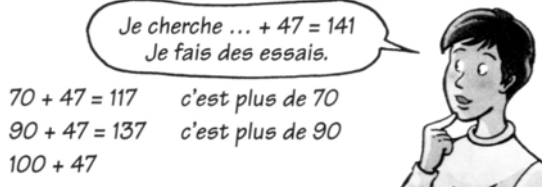
1. Révision de la table de 8, puis divisions par 8 jusqu'à $q = 10$ (voir note de bas de page, sq n° 26).
2. Idem avec 9.

Je découvre

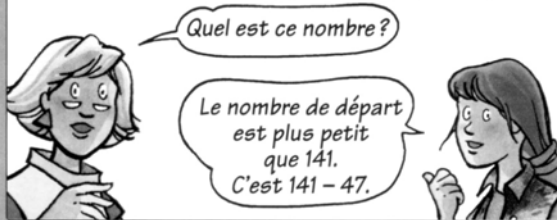
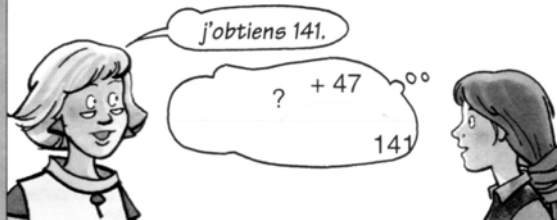
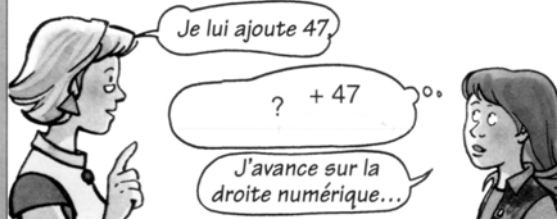
1 Le nombre pensé



Observe comment Mathieu cherche la solution.
Termine son calcul.



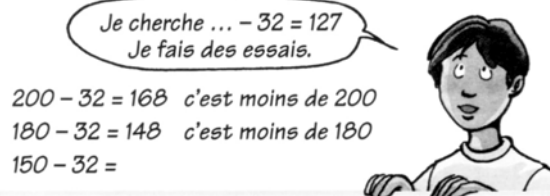
Observe comment Mathilde cherche la solution.
Termine son calcul.



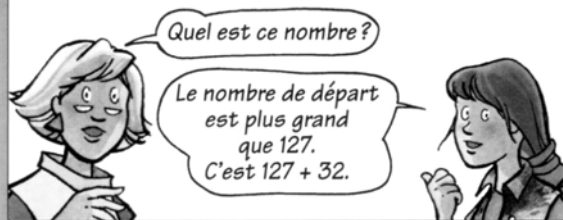
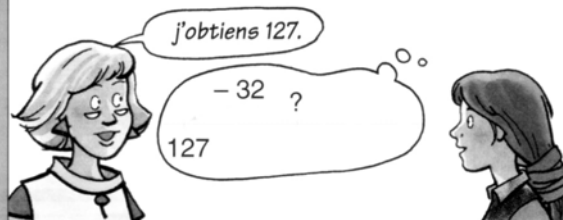
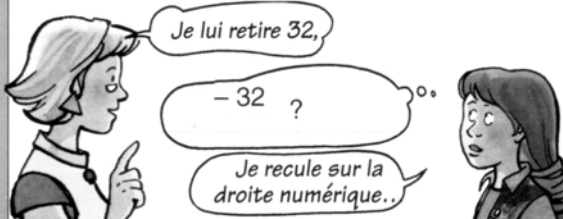
Voici un deuxième nombre pensé.



Observe comment Mathieu cherche la solution.
Termine son calcul.



Observe comment Mathilde cherche la solution.
Termine son calcul.



Annexe 2 (suite)

2 Mathilde cherche la solution de ce troisième « nombre pensé ».

Je pense à un nombre qui est un multiple de 3...
je le divise par 3...
j'obtiens 14.
Quel est ce nombre?

$$\begin{array}{r} : 3 \quad ? \\ \hline 14 \end{array}$$

Le nombre qu'on cherche est plus grand que 14.
Il est 3 fois plus grand.
C'est 14×3 .

Comment raisonnerait-elle pour ce quatrième « nombre pensé » ?

Je pense à un nombre...
je le multiplie par 6
j'obtiens 762.
Quel est ce nombre?

3 Cherche les solutions de ces « nombres pensés ».

A : «... je lui ajoute 105 et j'obtiens 209... » E : «... je le multiplie par 5 et j'obtiens 100... »
B : «... je lui retire 26 et j'obtiens 119... » F : «... je lui retire 9 et j'obtiens 2213... »
C : «... je le divise par 8 et j'obtiens 125... » G : «... je lui ajoute 845 et j'obtiens 1 000... »
D : «... je le multiplie par 3 et j'obtiens 72... » H : «... je le divise par 3 et j'obtiens 51... »

Invente deux autres « nombres pensés » et propose-les à ton (ta) camarade.

**BORDEAUX, CAEN,
CLERMONT-FERRAND, LIMOGES,
NANTES, POITIERS, RENNES**

PREMIER VOLET (12 POINTS)

**PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS)
MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.**

EXERCICE 1

Dans une classe de CM2, il y a 26 élèves.

Le professeur demande à chaque élève d'aller inscrire son prénom dans un tableau en fonction du nombre d'enfants dans sa famille.

Pour récapituler les résultats, le professeur efface les prénoms et les remplace par leur effectif. On obtient :

Nombre d'enfants n	Nombre d'élèves	Pourcentage d'élèves dont la famille comporte n enfants
1	5	
2	10	
3	6	
4	5	
5 ou plus	0	

- 1) Recopier et compléter le tableau (les résultats seront arrondis au dixième).
- 2) Combien d'élèves ont au moins deux frères et sœurs ?
- 3) Un nouvel élève arrive en cours d'année. Il a deux sœurs. Cocher les cases du tableau dans lesquelles les nombres vont changer.

EXERCICE 2

MAT est un triangle tel que $MA = 4,2$ cm, $AT = 5,6$ cm, $MT = 7$ cm.

a) La formule de Héron d'Alexandrie (1^{er} siècle après J.C.) permet de calculer l'aire d'un triangle connaissant a , b , c les longueurs des côtés et p , le demi-périmètre du triangle.

La formule est : $\text{aire} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.
Appliquer cette formule pour calculer l'aire du triangle MAT.

b) Calculer d'une autre façon l'aire du triangle MAT.

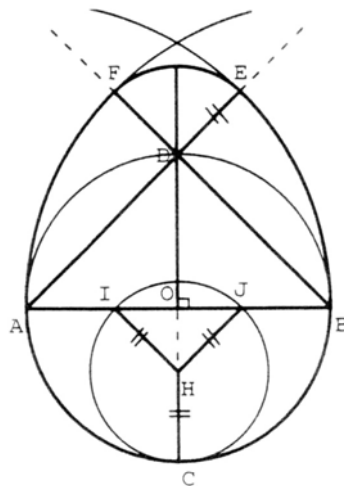
c) O est le milieu de [MT] et S celui de [AT]. Quelle est l'aire du triangle TOS ?

d) Soit E le symétrique du point S par rapport à O. Quelle est l'aire du quadrilatère MASE ?

e) MAT et MASE ont-ils le même périmètre ? Justifiez.

EXERCICE 3

On a représenté ci-dessous un puzzle de 9 pièces en forme d'œuf obtenu à partir d'un cercle de centre O et de rayon OB. Une fois brisé suivant les traits gras, cet œuf pourra donner naissance à toute une famille d'oiseaux ! Cette figure n'est constituée que de segments et d'arcs de cercles dont les centres sont des points nommés de la figure. Les alignements et les intersections constatés sur la figure sont considérés comme mathématiquement vrais.



I - En respectant les informations portées sur le dessin et données dans le texte, reproduire cet œuf tel que $OB = 5 \text{ cm}$.

II - On considérera pour les questions suivantes l'œuf dessiné à la question I.

- 1) Pour assembler les pièces et obtenir des oiseaux, il faut être sûr que $DE = JB$.
 - a) Calculer la longueur exacte de [DE] en justifiant toutes les étapes ; en déduire la longueur exacte de [OH].
 - b) Prouver que l'angle $\widehat{IJH}$ mesure 45° .
 - c) Montrer que $CH = JB$ et en déduire que $DE = JB$.

2) Calculer l'aire et le périmètre de la pièce DEB.

On donnera une valeur approchée de l'aire arrondie au centième de cm^2 et une valeur approchée du périmètre arrondie au centième de cm .

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS) ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES
--

Il s'agit d'un exercice donné à des élèves de CM1, en début d'année scolaire.

Les productions de 5 élèves sont présentées dans l'annexe 1.

Voici l'énoncé :

<i>« Coralie a acheté deux livres et un stylo à plume pour 25 €. Chaque livre coûte 9 €. Combien coûte le stylo ? »</i>

- a) Citez quatre compétences générales qui peuvent être abordées grâce à cet exercice.
- b) Citez deux difficultés que présente cet exercice pour un élève. Argumentez.
- c) Pour chaque élève, précisez, quand c'est possible, la stratégie suivie en mettant en évidence les réussites et en analysant les éventuelles erreurs.
- d) Comment pourriez-vous aider l'élève E pour qu'il comprenne le sens de l'énoncé ?

SECOND VOLET (8 POINTS)

Se reporter :

- au document A, annexes 2 et 3, extrait du livre de l'élève : « Nouvelle collection Thévenet, cycle 3, CM1 (pages 158 et 159) »
- au document B, annexe 4, exercice adapté de Eva math : « Réflexions et activités en CM² et 6^{ème} en math. CDDP Nice ».

I - On s'intéresse au document A, annexes 2 et 3.

- 1) a) Décrivez succinctement la progression des activités proposées.
b) Ce document correspond-il, selon vous, à un support pédagogique pertinent pour une première approche de la notion d'aire au niveau indiqué ? Argumentez.
- 2) a) Que fait-on plus précisément travailler dans l'activité : « Je découvre 1 » ? Comment transformeriez-vous cette activité pour permettre aux élèves de prendre des initiatives ? Justifiez les modifications proposées.
b) Donnez deux variables didactiques spécifiques sur lesquelles le maître peut agir dans l'activité : « Je découvre 2 ». Justifiez.

II - On s'intéresse aux documents A et B, annexes 2, 3, 4.

L'exercice décrit par le document B pourrait s'intégrer dans le document A ; à quel moment le proposeriez-vous ? Quelles procédures les élèves peuvent-ils utiliser ?

III

- 1) A la suite de ces activités intitulées par les auteurs du manuel « Je découvre », vous voudriez faire noter aux élèves dans une rubrique appelée « J'ai appris » ce qui vous semble important. Donnez deux éléments essentiels que vous feriez noter.
- 2) Les difficultés rencontrées dans l'apprentissage de la notion d'aire sont souvent en rapport avec des représentations initiales erronées associant l'aire et le périmètre. Citez deux exemples de nature différente faisant obstacle pour les élèves.
- 3) Lister ce qui reste à étudier pour compléter l'étude de ce thème et satisfaire aux instructions officielles du cycle des approfondissements sur la notion d'aire ?

Annexe 1

Elève A

$$\begin{array}{r} 9 \\ + 9 \\ \hline 18 \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \\ - 18 \\ \hline 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \\ - 18 \\ \hline 7 \end{array}$$

Le stylo plume coûte 7€

Elève B

$$\begin{array}{r} 25 \\ - 18 \\ \hline 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \\ - 18 \\ \hline 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \\ - 18 \\ \hline 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \\ - 18 \\ \hline 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \\ - 18 \\ \hline 7 \end{array}$$

Le stylo coûte 7€

Elève C

$$\begin{array}{r} 9 \times 2 = 18 \\ 25 \\ + 18 \\ \hline 43 \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \\ - 18 \\ \hline 7 \end{array}$$

Le stylo coûte 7€

Elève D

$$\begin{array}{r} 25 \\ - 18 \\ \hline 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \\ - 9 \\ \hline 16 \end{array}$$

Le stylo coûte 16€

Elève E

$$\begin{array}{r} 25 \\ + 9 \\ \hline 34 \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \\ - 9 \\ \hline 16 \end{array}$$

coralie achète stylo 16€

Annexe 2

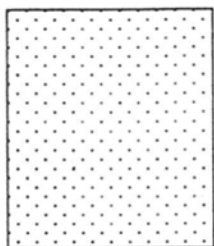
DOCUMENT A



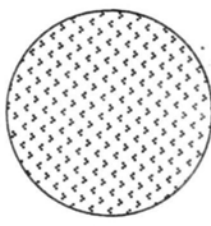
71. Mesurer une aire (1)

JE DÉCOUVRE

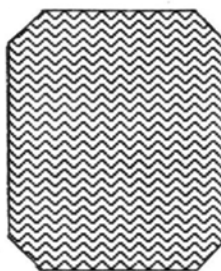
1. Voici les plans des parterres de fleurs d'un jardin public.



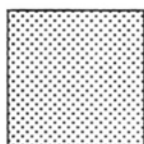
A



B



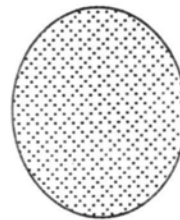
C



D



E

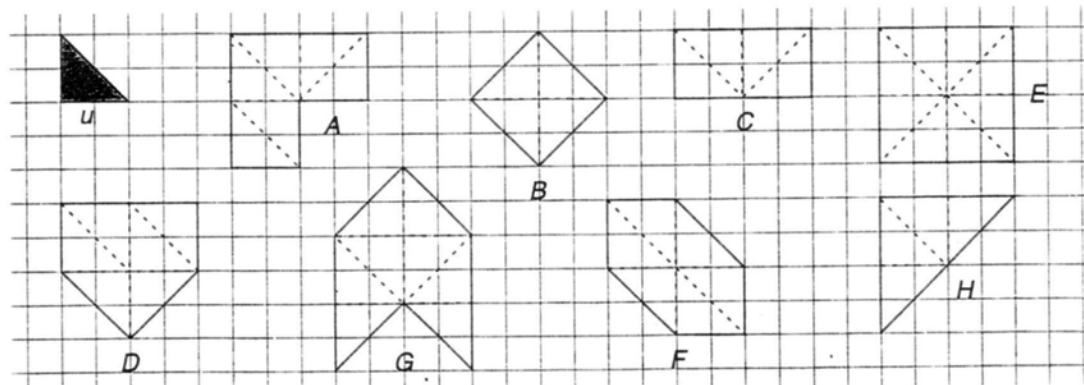


F

- Découpe et découpe ces différents plans. En les superposant, range les parterres du moins étendu au plus étendu.

2. On a fabriqué les figures suivantes en assemblant des triangles u .

a) Recherche toutes les figures qui ont la même étendue que la figure A.



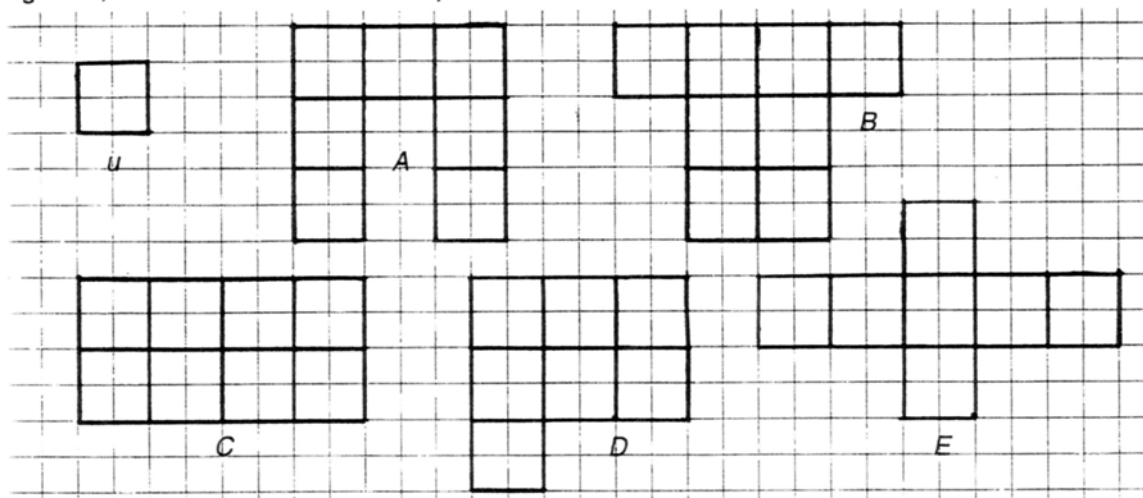
On dit que toutes ces figures ont la même aire.

- De la même façon, recherche les figures qui ont la même aire que la figure B et celles qui ont la même aire que la figure G.
- Peux-tu construire une autre figure J qui a la même aire que la figure D, et une figure K qui a la même aire que la figure B ?
- Quelles sont les figures qui ont l'aire la plus grande ?
- Quelles sont les figures qui ont l'aire la plus petite ?

Annexe 3

DOCUMENT A (suite)

3. On choisit un carré u comme unité. En comptant le nombre de carrés u contenus dans la figure A, on trouve 7 carrés. On dit que la mesure de l'aire de A est 7.

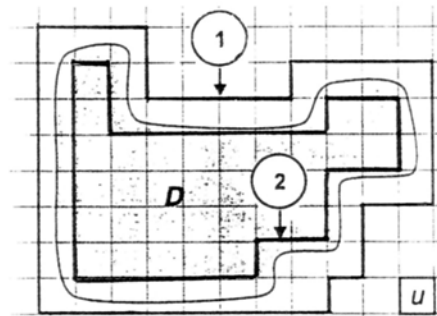


- a) Calcule de la même façon la mesure des aires des figures B, C, D, E.
b) Recopie et complète le tableau suivant.

Figure	u	A	B	C	D	E
Aire	1	7	...	...	...	...
Périmètre en cm	4	...	...	...	...	...

- c) Que remarques-tu pour les figures A et E ? pour les figures C et D ?

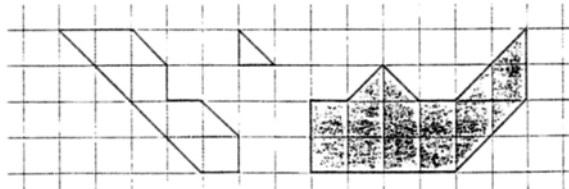
4. Le carreau u du quadrillage est choisi comme unité d'aire. On ne peut pas calculer exactement l'aire du bassin D.



On a tracé le plus près possible du bord du bassin en suivant les lignes du quadrillage :
– une ligne 1 à l'extérieur du bassin,
– une ligne 2 à l'intérieur du bassin.

- a) Quelle est l'aire de la surface limitée par la ligne 1 ?
b) Quelle est l'aire de la surface limitée par la ligne 2 ?
c) Recopie et complète : ... < aire du bassin D < ...

5. En utilisant comme unité le triangle , indique l'aire de chacune des figures.

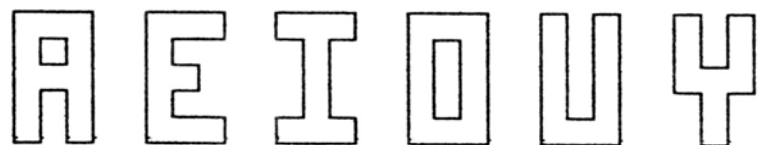


Annexe 4

DOCUMENT B

D'après EVA MATH. Réflexions et activités en CM2-6^{ème} en math.
CDDP de Nice

On voudrait peindre de la même façon les six voyelles ci-dessous :



Comparer les quantités de peinture utilisées pour réaliser ce travail.

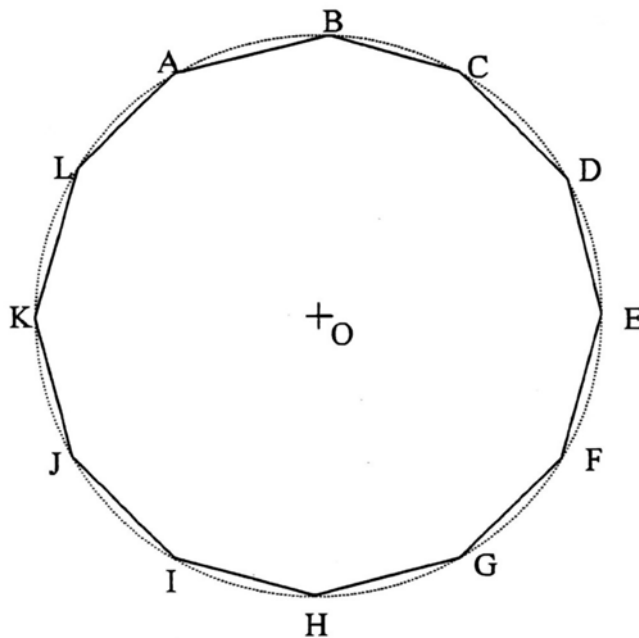
CRÉTEIL, PARIS, VERSAILLES

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS) MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE 1

On considère un dodécagone régulier ABCDEFGHIJKL inscrit dans le cercle de centre O et rayon R .



Les côtés $[AB]$, $[BC]$, ..., $[KL]$, $[LA]$ ont donc la même longueur et les angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, ..., $\widehat{LOA}$ ont la même mesure.

- 1) Quelle est la nature du triangle ACO ?
- 2) Quelle est la nature du polygone ACEGIK ?
- 3) La droite (AC) coupe [BO] en M.
Que représente (AM) pour le triangle ABO ?
Exprimer AM en fonction du rayon R du cercle circonscrit au dodécagone.
- 4) Exprimer l'aire du triangle ABO en fonction du rayon R du cercle. En déduire que l'aire d'un dodécagone régulier est donnée par la formule : $\text{Aire} = 3R^2$
où R représente le rayon du cercle circonscrit au dodécagone.

5) Quelle est l'aire d'un dodécagone régulier inscrit dans un cercle de diamètre 18 cm ?

6) Dessiner un dodécagone régulier ABCDEFGHIJKL inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 6 cm. On utilisera la règle et le compas et on laissera les traits de construction apparents.

EXERCICE 2

Un nombre N a pour écriture décimale $72a83b$.

1) N est divisible par 6 et 45. Quel est le chiffre b ?

2) Déterminer N.

EXERCICE 3

Sachant que $36\,202\,744 = 9658 \times 3748 + 4560$, donner le quotient de la division euclidienne de 36 202 744 par 3748.

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS) ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES
--

On considère l'exercice suivant extrait de l'évaluation en mathématiques à l'entrée en sixième de 2003.

<i>Un bateau part de Marseille à 20 h et arrive à Bastia le lendemain matin à 6h 30. Combien de temps a duré la traversée ?</i>

Les réponses de quatre élèves sont fournies en ANNEXES 1 et 2.

1) Préciser l'élève qui n'a pas fait d'erreur. Expliquer sa démarche.

2) Pour chacun des élèves ayant commis une erreur, préciser cette erreur et expliquer d'une phrase simple d'où elle peut provenir.

SECOND VOLET (8 POINTS)

Vous trouverez en ANNEXES 3 et 4 deux préparations de M. LECOLE, enseignant en Cycle3.

Répondre aux questions suivantes (en argumentant) :

1) Quelles sont les notions mathématiques en jeu et quelles sont les connaissances utilisables ?

2) Quels sont les objectifs de M. LECOLE pour chacune des deux séances ?

Les questions 3 et 4 portent sur la séance n°1.

3) Lorsque les élèves ont à chercher la ligne et la colonne d'un nombre, les nombres proposés sont-ils pertinents ? Quel(s) nombre(s) le maître doit-il éviter ? Pourquoi ?

4) Analyser la tâche de l'élève et les interventions du maître. Pour celles-ci préciser s'il donne une indication sur la démarche, les connaissances ou autres.

Le collègue de M. LECOLE, M. CALCULUS, qui a une classe de même niveau, s'appuie, pour ses activités mathématiques, sur ce que propose la collection "Quadrillage" chez ISTR. Vous trouverez en ANNEXE 5 la reproduction de la page 36 de l'ouvrage pour le CM2.

Pour conduire sa séquence du jour, M. CALCULUS invite ses élèves à traiter les questions une à une individuellement avant une mise au point ou correction collective.

Répondre aux questions suivantes (en argumentant) :

5) Quelles sont les notions mathématiques en jeu ?

6) Analyser la tâche de l'élève et les interventions du maître. Pour celles-ci préciser s'il donne une indication sur la démarche, les connaissances ou autres.

Annexe 1

Réponse de Rémi :

Utilise ce cadre pour faire tes recherches.

$$20h + 6h30 = 26h30 \text{ soit } 1 \text{ jour et } 1h30$$

Réponse : 26h30.....

Réponse de Céline :

Utilise ce cadre pour faire tes recherches.

$$\begin{array}{r} 20h00 \\ - 16h30 \\ \hline 13h70 \\ 11h60 \\ \hline 14h10 \end{array}$$

Réponse : il a duré 14h10.

Annexe 2

Réponse de Karl :

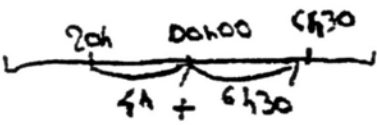
Utilise ce cadre pour faire tes recherches.

$$\begin{array}{r}
 20h00 \\
 - 6h30 \text{ min} \\
 \hline
 13h30 \text{ min}
 \end{array}$$

Réponse : 13h30 min

Réponse de Justine :

Utilise ce cadre pour faire tes recherches.



$$\begin{array}{r}
 6h30 \\
 + 4h \\
 \hline
 10h30
 \end{array}$$

Réponse : ...10h30....

Annexe 3

Préparation de M. LECOLE

Séance N°1

phase 1 : *(phase collective)*

→ Je commence à écrire au tableau les premiers nombres sous le regard des élèves :

0	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11				

→ Plusieurs élèves viennent successivement jusqu'à ce que je sois assuré que tous sauraient continuer le tableau. Par exemple le tableau peut s'arrêter au nombre 25.

→ Questions posées :

- « Dans quelle ligne est le nombre 19 ? »
- « Dans quelle colonne est le nombre 23 ? »

phase 2 : *(phases individuelles puis collectives)*

→ J'annonce que l'on va continuer le tableau mais avant il faut essayer de prévoir ce qui va se passer

« Dans quelle ligne et dans quelle colonne va-t-on écrire les nombres 62 et 70 ? » *[recherche individuelle]*

→ Inventaire collectif des résultats et discussion entre les élèves. Le tableau est ensuite complété, le résultat cherché est formulé clairement.

→ Plusieurs problèmes de ce type sont proposés successivement.

→ Quand la solution correcte commence à être bien perçue par les élèves, le problème est posé avec deux nombres très grands 784 et 852.

→ J'aide les élèves à formuler et prouver le résultat.

phase 3 : Exercices d'application :

Exemples :

- Dans quelle ligne et dans quelle colonne serait le nombre 145 ?
- Quel nombre écrirait-on dans la 25^{ième} ligne et à la 1^{ère} colonne ?

phase 4 : Que faut-il retenir de la séquence ? *(phase collective)*

Annexe 4

Préparation de M. LECOLE (suite)

Séance N°2

Activité n°1 : *(phase individuelle puis collective)*

Vous allez sur votre cahier d'essai faire la même activité que la dernière fois mais en classant les nombres en 5 colonnes comme j'ai commencé à le faire au tableau :

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11			

→ Vous allez essayer de répondre **le plus rapidement possible** aux questions suivantes :

a) Dans quelle colonne et dans quelle ligne allez-vous placer les nombres suivants :

28 ; 35 ; 51 ; 44 ; 79 ; 81 ; 89 ; 66 ; 96 ; 102 ; 125 ; 122 ; 137 ; 194 ; 360 ; 4050 ;

b) Quelles remarques intéressantes peux-tu formuler ?

La tâche est d'abord réalisée individuellement et est suivie d'une mise en commun

Activité n°2 : *(phase individuelle puis collective)*

Même travail que pour l'activité 1 mais il n'y a plus que 2 colonnes.

Activité n°3 : *(phase individuelle puis collective)*

Même travail que pour l'activité 1 mais il y a maintenant 10 colonnes.

*

Annexe 5

8 Multiples et diviseurs

Je découvre

25		16		12	
	30		40		56
33		28		61	
	9		17		75
27		10		6	
	60		64		63

Observe, puis recopie la grille de loto : tous les nombres entourés en rouge* sont des multiples de 2.

16 est multiple de 2, car $16 = 2 \times 8$.

On peut aussi dire que 16 est divisible par 2 ou par 8.

2 et 8 sont des diviseurs du nombre 16.

a Par quels chiffres se terminent les multiples de 2 ?

Un nombre pair est un multiple de 2.

b Recherche dans la grille, puis entoure en bleu tous les multiples de 5.
Par quels chiffres se terminent tous ces nombres ?

c Recherche dans la grille, puis entoure en vert tous les multiples de 10.
Par quel chiffre se terminent ces nombres ?

Tous les multiples de 5 se terminent par 5 ou par 0.

Les multiples de 10 se terminent par 0.

d Complète :

$$33 = \square \times 3$$

$$27 = \square \times 3$$

$$30 = \square \times 3$$

$$63 = \square \times 3$$

♦ Que peux-tu dire des nombres 33, 27, 30 et 63 ?

♦ Fais la somme des chiffres qui composent chacun de ces nombres.
Que remarques-tu ?

♦ Entoure maintenant en noir tous les multiples de 3 de la grille de loto.

Un nombre est un multiple de 3

si la somme de ses chiffres est elle-même un multiple de 3.

e Que peux-tu dire des nombres qui sont entourés en rouge et en bleu ?

f Que peux-tu dire des nombres entourés à la fois en rouge, en bleu, en vert et en noir ?

g Que peux-tu dire des autres nombres de la grille de loto ?

* Le candidat est invité à repasser lui-même en rouge les nombres entourés

DIJON, NANCY-METZ, REIMS, STRASBOURG

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS) MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE 1

On considère la machine à nombres suivante :

Étape 1	Ajouter 2
Étape 2	Multiplier par 4
Étape 3	Enlever 20
Étape 4	Diviser par 2

Un nombre qui entre dans la machine à nombres subit les quatre étapes. Ainsi, si le nombre 2 entre dans la machine, il devient :

Étape 1	4
Étape 2	16
Étape 3	-4
Étape 4	-2

1) Quel nombre faut-il entrer dans la machine afin d'obtenir un zéro à l'issue de l'étape 4 ?

2) On fait entrer un nombre x dans la machine, exprimer en fonction de x les nombres obtenus à chacune des étapes.

3) Existe-t-il un nombre qui ressort inchangé après avoir traversé la machine ?
(on retrouve à l'issue de l'étape 4 le nombre qui est entré dans la machine)

4) On fabrique une nouvelle machine en ajoutant deux étapes à l'ancienne :

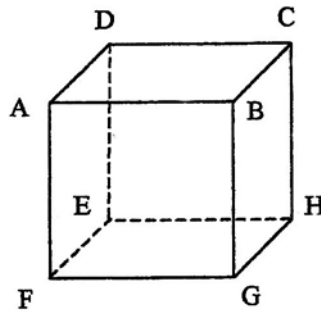
Étape 1	Ajouter 2
Étape 2	Multiplier par 4
Étape 3	Enlever 20
Étape 4	Diviser par 2
Étape 5	Multiplier par a
Étape 6	Ajouter b

Déterminer les valeurs de a et de b , pour que tout nombre ressorte inchangé après avoir traversé la nouvelle machine.

EXERCICE 2

Dans un cube ABCDEFGH dont les arêtes mesurent 4 cm, on considère la pyramide de sommet A et de base EFGH.

- 1) Dessiner en vraie grandeur un patron de cette pyramide. Les instruments à utiliser pourront être la règle graduée, l'équerre et le compas.
- 2) Calculer la mesure exacte de la longueur des arêtes AE et AH de cette pyramide.



EXERCICE 3

Une figure est à réaliser en utilisant la règle graduée, l'équerre et le compas.

Soit ABC un triangle isocèle et rectangle en A tel que $AB = 4$ cm.
On considère le point D tel que C est le milieu du segment [AD].

- 1) Tracer la figure, qui sera complétée au fur et à mesure des questions.
- 2) Soit I le milieu du segment [BD].
Prouver que les droites (CI) et (AB) sont parallèles.
- 3) Prouver que les points A, B et D appartiennent à un même cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon.
- 4) Soit E le symétrique de A par rapport à I.
Prouver que E appartient au cercle (C).
Quelle est la nature du quadrilatère ABED ? Justifier la réponse.
- 5) Soit J le symétrique de I par rapport à C.
Quelle est la nature du quadrilatère AIDJ ? Justifier la réponse.

DEUXIÈME EPREUVE (4 POINTS) ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES

Un enseignant a demandé à des élèves de fin de CM2 de rédiger des énoncés de problèmes pour une autre classe. Il a rajouté une contrainte : la résolution du problème devait nécessiter d'effectuer le calcul « $(12 \times 35) + 8$ ».
Ci-dessous quelques productions. (l'orthographe des enfants a été conservée)

Céline	Un vendeur a 12 bouteilles de cola et chacune de ces bouteilles contient 35 litre. Mais une bouteille s'est cassée et dans celle-ci il reste 8 litres. Combien y a-t-il de litres en tout ?
Linda	Dans une librairie il y a 35 romans et 12 BD et 8 livres pour enfants. Quel calcul doit-tu faire pour savoir combien il y a de livre dans la librairie (Utilise _multiplication et addition)
Simon	Sur un parking il y a 12 lignes de 35 voitures et il y a 8 motos. Combien il y a de voitures + les motos ?
Amandine	Lundi matin, Tom achette 12 baguettes pour sa mère. Mardi matin, il en achette 35 fois plus qu'il avait acheter lundi matin. Mercredi il en achette 8 seulement. Combien de baguettes a-t-il acheter lundi, mardi et mercredi ?
Rebecca	Un enfant pour son anniversaire a ramener 428 bonbons. Il en donne 12 à chaque élèves. Ils sont 35 dans la classe. Combien de bonbons restent-ils ?
Loïc	Un train a 12 wagons de 35 places et y a 8 places pour le chauffeur. Combien y a-t-il de places en tout ?
Rachid	Le résultat de $(35 \times 12) + 8$ est = 428 parce que $2 \times 5 = 10$, $2 \times 3 = 6 + 1 = 7$ on ajoute un 0. $1 \times 5 = 5$, $1 \times 3 = 3$ ajoute + 8 est le résultat est 428.
Marie	Je cherche combien Kelly a de bonbons ? $(35 \times 12) + 8 = 428$ Kelly a 428 bonbons, elle en donne 100 à ses copines Katie et Marie. Combien lui en reste-t-il ?

1) Analyser les productions en terme de respect de la consigne.

2) Pour chaque production ne respectant pas la consigne, indiquer si l'erreur se situe, à votre avis, au niveau de la compréhension de la consigne, de la représentation de ce qu'est un problème de mathématiques, du sens des opérations, de difficultés de rédaction...

SECOND VOLET (8 POINTS)

Le sujet ci-dessous s'appuie sur des fiches de manuels de CE1 et de CP faisant partie de la collection Euro-maths publiée chez Hatier. *L'absence de couleur dans la reproduction des ouvrages n'a aucune incidence dans le traitement des questions de ce volet.*

Première partie : ouvrage de CE1

Annexes 1.1 ; 1.2 ; 1.3 (fiches 7, 17 et 88).

- 1) On commence par la fiche 7 (Annexe 1.1).
 - a) Quel peut être l'intérêt d'un tracé à main levée par rapport à un tracé à la règle ?
 - b) En tenant compte de la question a), réécrire l'objectif cité par les auteurs, lequel n'est qu'une reprise du titre.
- 2) Citer trois variables didactiques intervenant dans les tracés demandés sur la fiche 17 (Annexe 1.2).
- 3) Dans la fiche 88 (Annexe 1.3),
 - a) Considérer d'abord la *situation de découverte*.
 - Reproduire la figure du milieu sur la copie (l'échelle n'a pas d'importance).
 - La compléter ensuite comme l'indique le modèle, en un nombre minimal d'étapes. On n'effectuera que des tracés à la règle sans gommer.
 - Numéroter sur celle-ci les étapes du tracé.
 - Expliquer ces différentes étapes.
 - b) Sur l'ensemble de la fiche, citer trois compétences que l'élève doit exercer dans ses tracés à la règle ?

Deuxième partie : ouvrage de CP

Annexes 2.1 ; 2.2 ; 2.3 (fiches 13, 20 et 21).

Ces fiches préparent les fiches de CE1 précédemment citées.

- 4) Indiquer en quoi chacun des exercices de la fiche 13 de CP (Annexe 2.1) prépare l'enfant à la réalisation de la fiche 7 de CE1 (Annexe 1.1).
- 5) Décrire la progressivité des apprentissages entre les quatre fiches suivantes : fiches 20 et 21 de CP, 17 et 88 de CE1 (Annexes 2.2, 2.3, 1.2, 1.3).
Autrement dit, d'une fiche à la suivante, indiquer quels sont les pas supplémentaires franchis.

Annexe 1.1

7

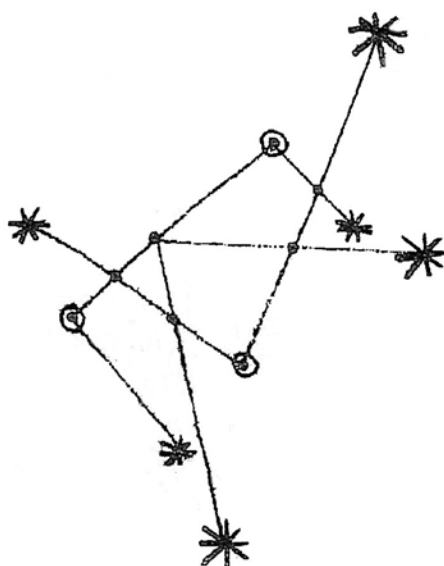
Reproduire, à main levée, à la règle

Date :

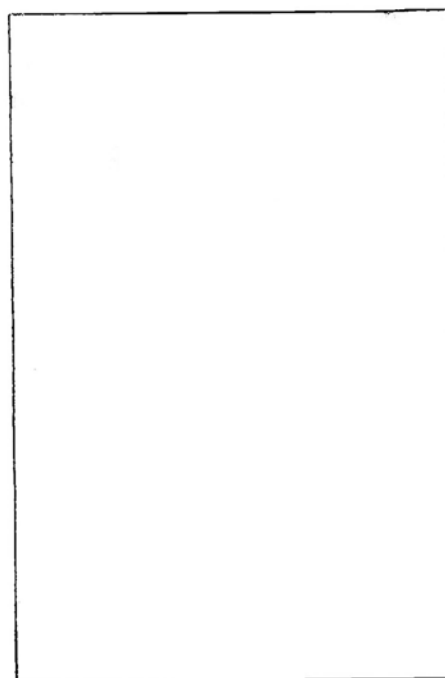
.....
.....

Découverte

Reproduis à main levée.

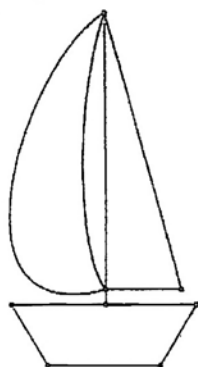


Pablo Picasso
Dessin n° 14, extrait
du cahier 92, 1926.
Photo Bill Jacobson
studio, New York.



Exercice

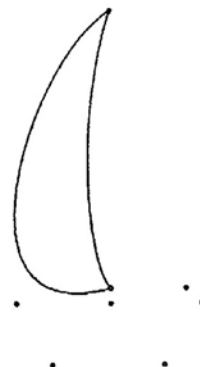
Reproduis le dessin.



modèle



à main levée



à la règle

♦ Objectif • Tracer des traits à main levée, à la règle.

♦ Mise en route • Jeu de bataille (cf. activité préparatoire p. 14).

Annexe 1.2

17

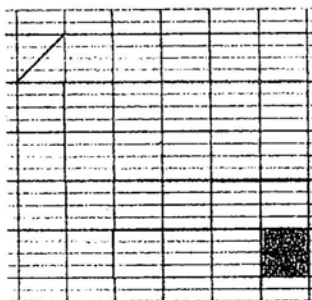
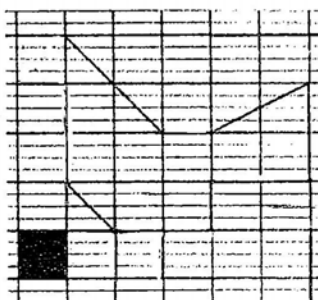
Reproduire sur quadrillage

Date :

.....

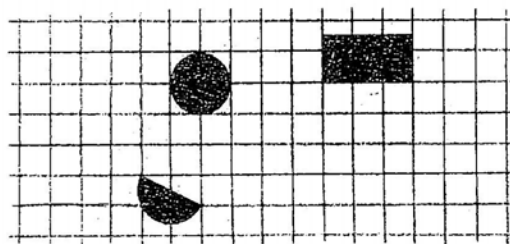
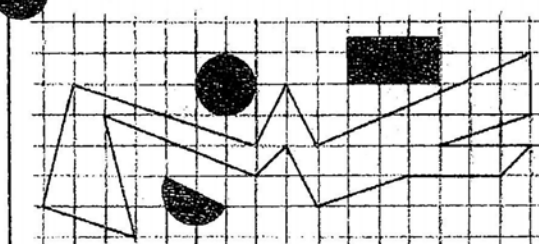
Découverte

Complète dans les deux quadrillages pour que les dessins soient identiques.

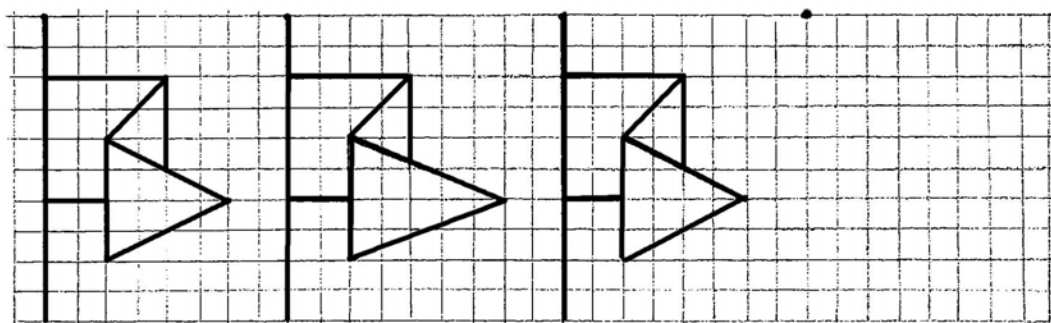


Exercices

Reproduis la figure.



Observe les dessins de Marie et de Nicolas. Repasse en vert celui qui correspond au modèle. À ton tour, reproduis le modèle à partir du point bleu.



modèle

Marie

Nicolas

♦ Objectif • Repérer les cases ou les nœuds d'un quadrillage pour reproduire un dessin, une figure.

♦ Mise en route • Jeu de piste (cf. p. 25) : le maître écrit le numéro d'une case au tableau (de 1 à 50). Il lance le dé du jeu de piste et annonce la couleur de la face et le nombre. Les enfants écrivent le numéro de la case d'arrivée. Un enfant vérifie sur le jeu de piste.

Annexe 1.3

88

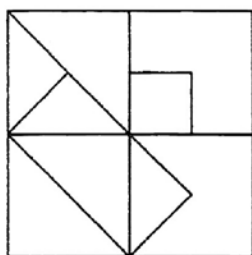
Constructions géométriques (I)

Date :

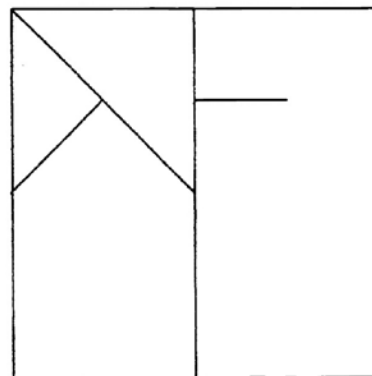
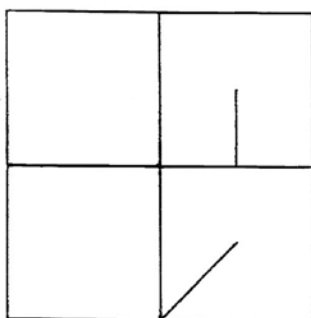
.....
.....

Découverte

Complète les figures pour qu'elles soient semblables au modèle.

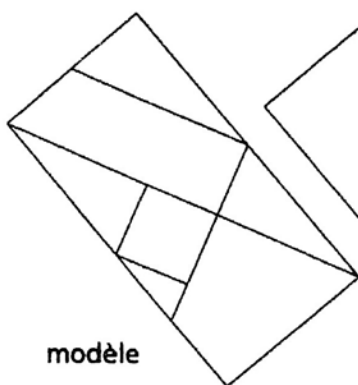


modèle

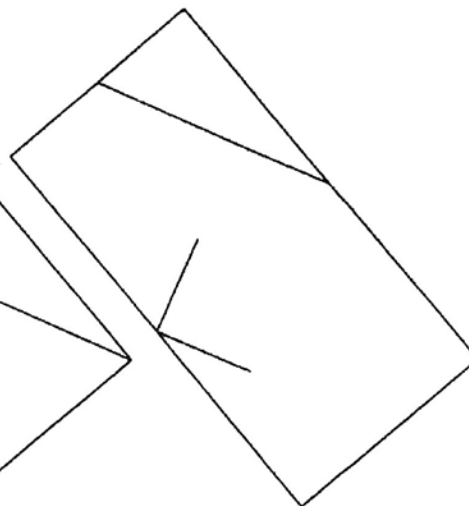
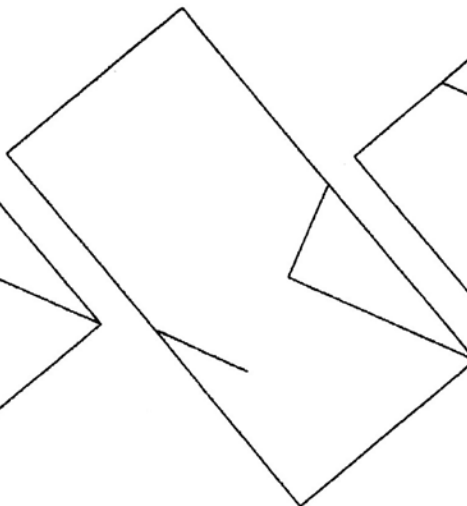


Exercices

Complète les figures pour qu'elles soient semblables au modèle.



modèle



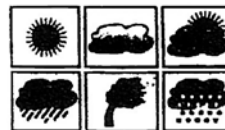
♦ Objectifs • Utiliser les instruments de géométrie pour reproduire ou compléter des figures. • Décrire des figures, des assemblages de figures.

♦ Mise en route • Dictée de nombres sur calculatrice : le maître dit un nombre ou l'écrit en lettres au tableau, les enfants le tapent sur leur calculatrice. • Jeu d'étiquettes sur les mots-nombres (cf. activité préparatoire p. 144).

Annexe 2.1

13

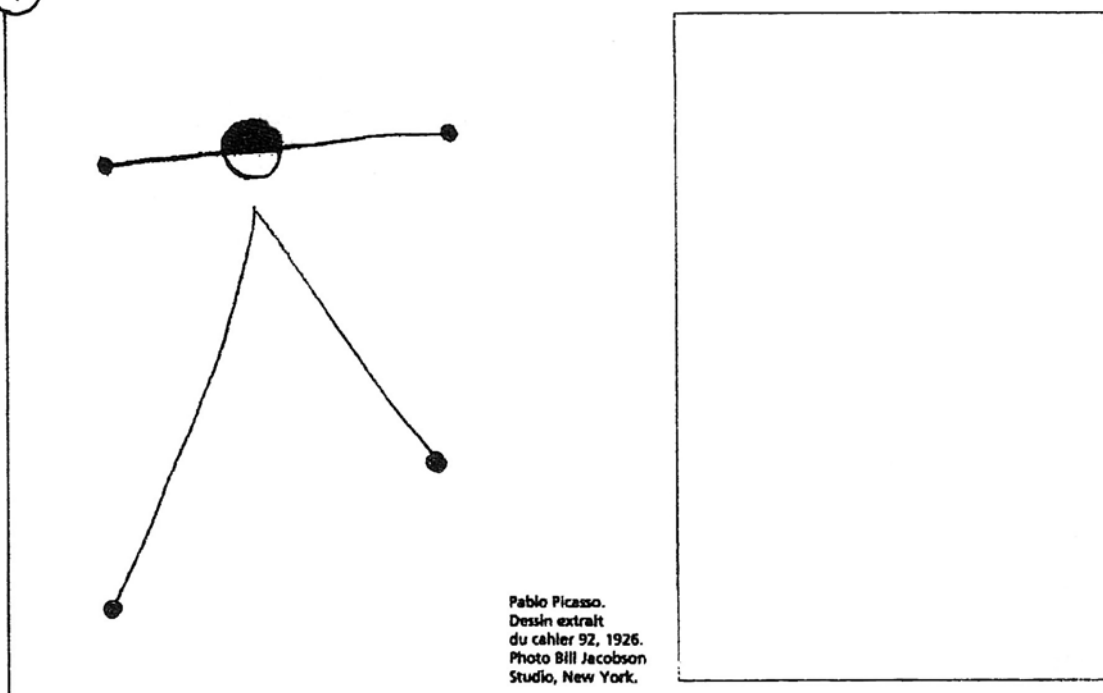
Tracer à main levée



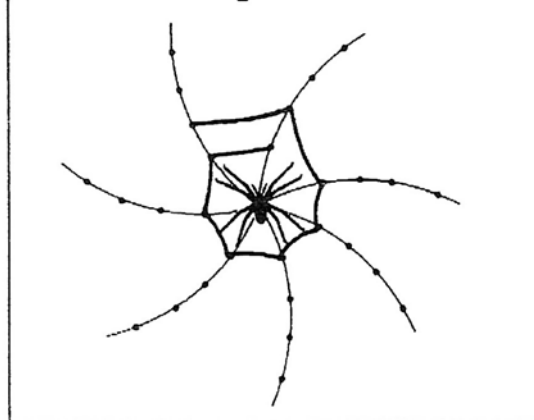
Date :

Exercices

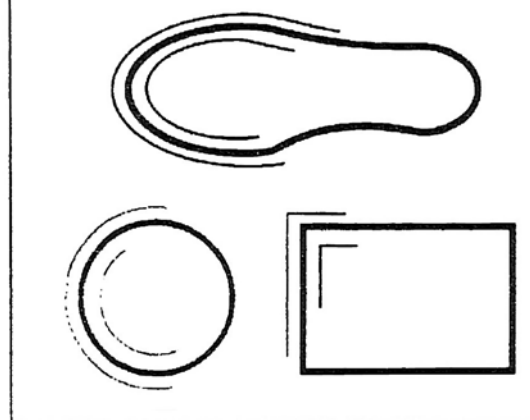
① Reproduis à main levée.



② Continue de tracer les fils de la toile d'araignée à main levée.



③ Continue les tracés à main levée.



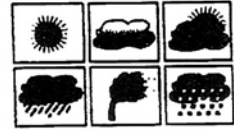
♦ Objectifs • Tracer des traits droits ou curvilignes à main levée.
• Reproduire une figure à main levée.

♦ Mise en route • L'appel • La date • Jeu du furet : Les enfants disent la suite des nombres aussi loin qu'ils le peuvent à partir de 1, puis d'un autre nombre. Les enfants décomptent à partir de 12. Les enfants continuent à remplir leur accordéon numérique.

Annexe 2.2

20

Alignements de cases



Date :

♦ Activité préparatoire : Le jeu du Tic Tac Toe.

Application



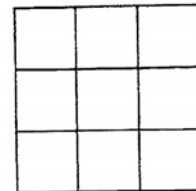
Règle du jeu de Tic Tac Toe

- 2 joueurs
- Des jetons ronds et des jetons triangulaires.
- Chaque joueur choisit une forme de jetons.
- Les joueurs placent à tour de rôle un de leurs jetons dans une case du quadrillage.
- Le gagnant est le premier qui aligne 3 jetons de même forme.

Joue avec un camarade.

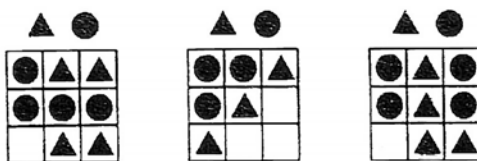
Représente une autre partie terminée sur le quadrillage.

Qui a gagné ? ▲ ●



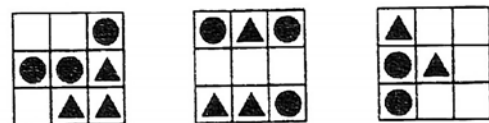
Exercices

① Qui a gagné ? Entoure le jeton.

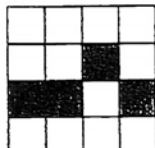


② Tu peux gagner en plaçant dans chaque quadrillage un ▲.

Dessine-le.

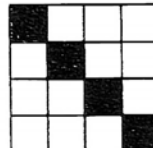


③ Les cases vertes sont-elles alignées ?



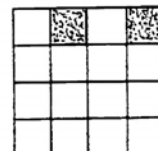
oui non

④ Les cases bleues sont-elles alignées ?



oui non

⑤ Colorie pour que les cases jaunes soient alignées.



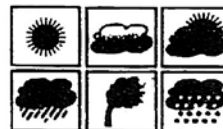
♦ Objectifs • Repérer des cases alignées. • Élaborer une stratégie.

♦ Mise en route • Jeu du furet : les enfants disent les nombres le plus loin possible à partir de 1, puis d'un autre nombre. Ils décomptent à partir de 22. Puis, ils continuent à remplir leur accordéon numérique.

Annexe 2.3

21

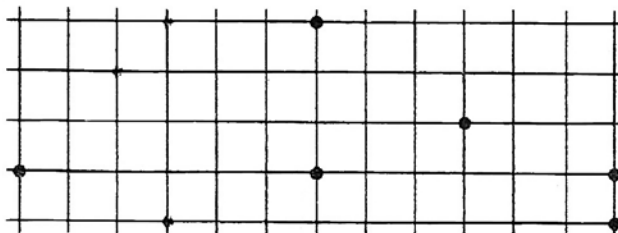
Alignements de nœuds



Date : _____

Découverte

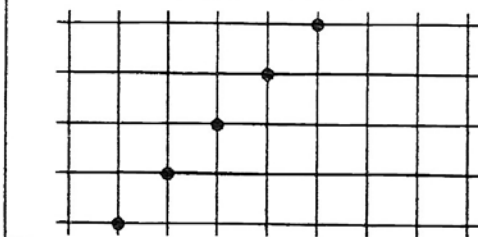
Si les trois points
de même couleur
sont alignés,
joins-les à la règle.



Exercices

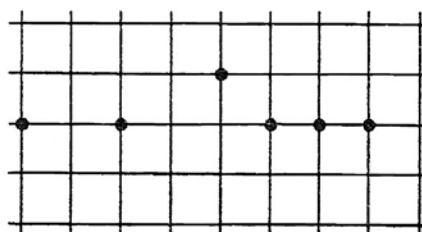
① Les points sont-ils alignés ?

☐ oui ☐ non

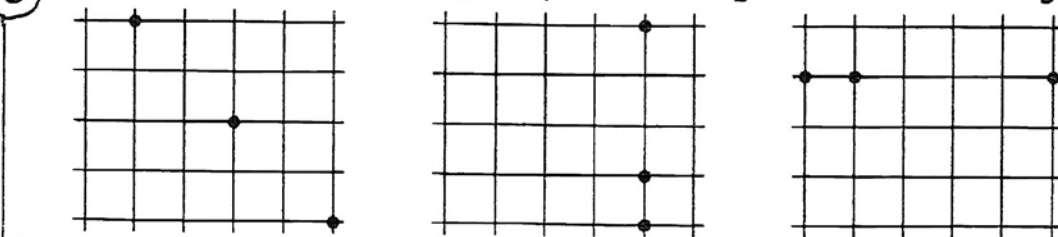


② Les points sont-ils alignés ?

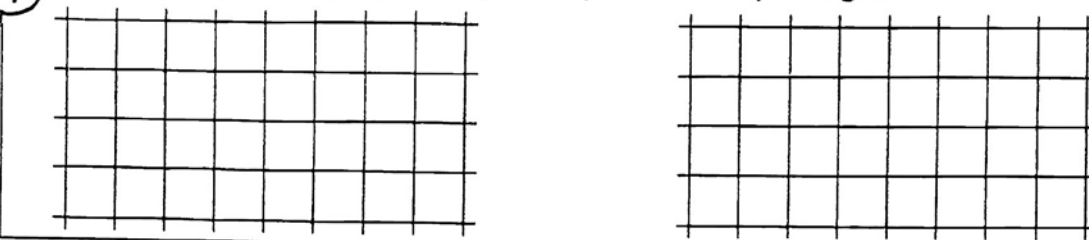
☐ oui ☐ non



③ Continue de placer des points pour qu'ils soient alignés. Vérifie avec ta règle.



④ Sur chaque quadrillage, place 3 points qui ne soient pas alignés.



♦ Objectif • Repérer des nœuds alignés.

♦ Mise en route • Le maître dit un nombre dans le champ numérique de 1 à 22, les enfants disent ou écrivent le nombre juste avant ou le nombre juste après.

GRENOBLE

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS) MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE 1

Deux joueurs font la « course à 10 par pas de 2 » : chacun ajoute 1 ou 2 au résultat de son adversaire. Le gagnant est celui qui annonce 10 le premier.

Par exemple, dans la première partie, le joueur A commence et dit : « 1 » ; le joueur B dit : « $1 + 2 = 3$ » ; A dit : « $3 + 2 = 5$ » ; B dit : « $5 + 1 = 6$ » ; A dit : « $6 + 2 = 8$ » ; B dit : « $8 + 2 = 10$ » et gagne.

- 1) Dans la deuxième partie, le joueur A arrive à 7 et dit à B : « J'ai gagné ! ». Justifiez cette affirmation.
- 2) Dans la troisième partie, le joueur B commence, dit un nombre puis annonce : « J'ai gagné ! ». Quel est ce nombre ?
- 3) Le pas devient 3 : on ajoute 1, 2 ou 3. Quel nombre le joueur qui commence la partie doit-il annoncer pour être sûr de gagner ?
- 4) Dans la quatrième partie, le joueur A dit : « Faisons maintenant la course à 12, toujours par pas de 3, et c'est toi qui commences. ». Expliquez pourquoi A est sûr de gagner.
- 5) Dans la « course à n par pas de 3 », quelle(s) condition(s) doivent respecter les nombres n ($n > 3$) pour que le joueur qui commence ait la certitude de gagner ?

EXERCICE 2

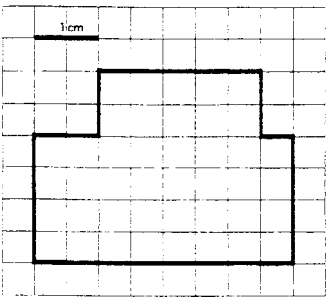
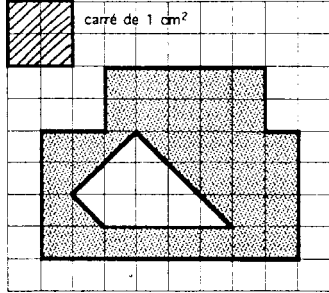
Soit ABC un triangle, I le milieu de [AB] et J le milieu de [AC]. Les droites (BJ) et (CI) se coupent en G. On note E le symétrique de A par rapport à G. Les droites (BC) et (AG) se coupent en K.

- 1) Démontrez que les droites (IG) et (BE) sont parallèles.
- 2) Démontrez que BGCE est un parallélogramme.
- 3) Démontrez que la droite (AG) est la troisième médiane du triangle ABC.
Énoncez alors la propriété que vous avez démontrée.

- 4) Les points B, C et G non alignés figurent sur le document placé en annexe A.
Sur l'annexe A, avec une règle non graduée et un compas, construisez le triangle ABC tel que G soit son centre de gravité. Vous indiquerez votre procédure.

**DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES**

Des exercices ont été proposés à des élèves de fin de cycle des apprentissages fondamentaux. Leur fac-similé en réduction est présenté ci-dessous.

a) Quel est le périmètre de la figure?  Réponse :cm	b) Quelle est l'aire de la surface coloriée en gris?  Réponse :cm²	Explique comment tu as fait pour trouver la réponse.
---	---	---

- 1) Ces exercices placent les élèves face à certaines difficultés. Citez-en quatre.
- 2) Les documents observés sont dans l'annexe B1.
 - a) Comparez les procédures utilisées par les élèves Marina et Raoul.
 - b) D'où viennent les nombres 7 et 9, dans l'exercice de Mathilde
 - c) Quelle est l'erreur commune aux trois élèves ?
- 3) Les documents utilisés sont dans l'annexe B2.
 - a) Analysez les procédures utilisées par Anaïs et Julie.
 - b) Quel obstacle dans l'apprentissage de la notion d'aire peut expliquer la réponse d'Alexandre ?
- 4) À ce même exercice, quelques élèves ont répondu « 8,2 ». Expliquez comment ils ont pu arriver à ce résultat.

SECOND VOLET (8 POINTS)

Les documents qui vont être utilisés sont extraits :

- du manuel « *Math - Pédagogie de l'essai* » - CP - Lucille FOURCHOTTE, Françoise GODINAT, Robert TINON et Michel WOROBELO (Hachette édition - 2001), pages 6 (annexe C1) et 46 (annexe E) ;
- du manuel « *J'apprends les maths avec Picbille* » - CP - Rémi BRISSIAUD, Pierre CLERC et André OUZOULIAS (Retz - 2001), pages 4 et 5 (annexe C2) ;
- des programmes de l'enseignement primaire (arrêté du 25 janvier 2002) - Cycle des apprentissages fondamentaux - Mathématiques, B.O. hors-série n°1 du 14 février 2002, page 53 (annexe D).

Le maître de CP va aborder la numération.

1) Il a retenu deux manuels desquels sont extraits les documents présentés en annexes C1 (sommaire par domaines mathématiques) et C2 (index par domaines mathématiques et organisation en quatre périodes).

a) Présentez deux différences de conception de l'entrée dans la numération que vous percevez à la lecture de ces documents.

b) Quelle place semble être donnée au calcul dans chacun des deux ouvrages cités ? Justifiez votre réponse en précisant les indices sur lesquels vous vous appuyez.

2) Le programme de mathématiques du cycle des apprentissages fondamentaux de 2002 évoque l'aspect cardinal et l'aspect ordinal des nombres entiers naturels.

a) Définissez chacun de ces deux aspects.

b) Dans le paragraphe 1 - *Exploitation de données numériques* présenté en annexe D, relevez les compétences qui se rapportent à l'aspect ordinal des nombres entiers naturels. (Vous pourrez n'indiquer que leur référence.)

3) Citez deux procédures qu'un élève peut mettre en oeuvre pour effectuer la somme : $12 + 7$, alors qu'il ne dispose pas de la procédure experte de la technique opératoire.

4) Le programme de mathématiques de 2002 précise : « *Concernant l'addition et la soustraction, il est souhaitable que les écritures $a + b$ et $a - b$ soient, dès le départ, travaillées simultanément...* »

a) Quel est l'inconvénient de ne travailler que l'écriture $a + b$?

b) Indiquez deux autres raisons de travailler simultanément les écritures $a + b$ et $a - b$?

c) Citez trois difficultés que les élèves peuvent rencontrer dans l'apprentissage de la soustraction.

5) Dans l'annexe C1, zéro apparaît aux chapitres 30 en tant que chiffre et 31 en tant que nombre.

a) Commentez la position du chapitre 27 au regard de la progression présentée dans ce sommaire.

b) Quelle distinction existe-t-il entre chiffre et nombre ?

6) Dans les exercices figurant dans le document donné en annexe E, les élèves sont amenés à effectuer des groupements et à renseigner des tableaux.

a) Quelles compétences définies dans les programmes (annexe D) sont ici visées ? (Vous pourrez n'indiquer que leur référence.)

b) Indiquez différents types de réponses que peuvent produire les élèves à l'exercice 1.

c) Quelle analyse critique faites-vous des exercices 2 et 3 ?

Annexe A

(à remettre complétée avec la copie)

x
B

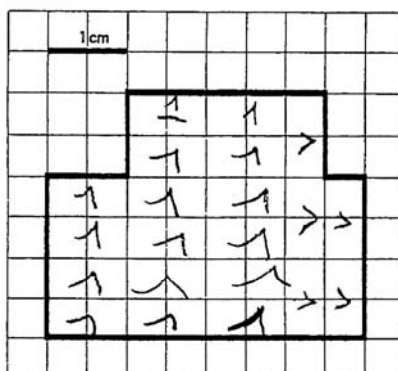
G
x

x
C

Annexe B1

MARINA

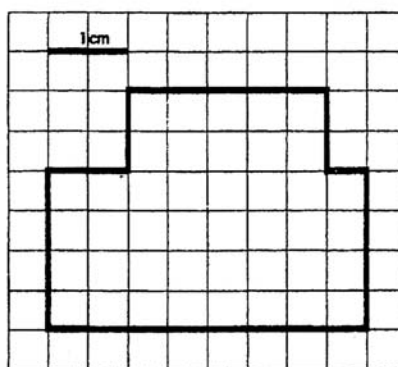
a) Quel est le périmètre de la figure ?



Réponse : ... 21 ... cm

MATHILDE

a) Quel est le périmètre de la figure ?

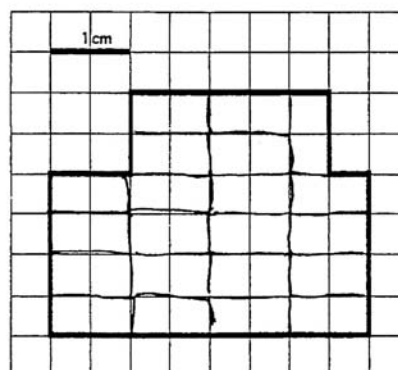


Réponse : ... 63 ... cm

$$7 \times 9 = 63$$

RAOUL

a) Quel est le périmètre de la figure ?



Réponse : ... 21 ... cm

Annexe B2

b) Quelle est l'aire de la surface coloriée en gris ?

Explique comment tu as fait pour trouver la réponse.

ALEXANDRE

carre de 1 cm²

tu fait 4 carreaux dans chaque cube

Réponse : cm²

l'aire de la surface et 4 cm².

b) Quelle est l'aire de la surface coloriée en gris ?

Explique comment tu as fait pour trouver la réponse.

ANAÏS

carre de 1 cm²

J'ai comptés tout les carreaux

Réponse : 37 cm²

b) Quelle est l'aire de la surface coloriée en gris ?

Explique comment tu as fait pour trouver la réponse.

JULIE

carre de 1 cm²

J'ai pris 4 carreaux à chaque fois

Réponse : 9 cm²

Annexe C1

Extrait de « Math – Pédagogie de l'essai » - CP – Lucile FOURCHOTTE, Françoise GODINAT, Robert TINON et Michel WROBEL (Hachette édition - 2001), page 6

SOMMAIRE PAR DOMAINES MATHÉMATIQUES (numériques)

	<u>Page</u>
Connaissance des nombres	
2. Le nombre 1	10, 11
3. Le nombre 2	12
5. Autant que, pas autant que	14
6. Plus que, moins que	15
8. Le nombre 3	18, 19
9. Le nombre 4	20
10. La file numérique	21
13. Le nombre 5	26, 27
16. Le nombre 6	30
17. Le nombre 7	31
18. Comparer	32, 33
21. Le nombre 8	36
22. Le nombre 9	37
25. Le nombre dix	42
27. Dénombrer une quantité	
au-delà de 10	44, 45
28. Grouper pour dénombrer	46, 47
30. Le chiffre 0	50
31. Le nombre zéro	51
34. Dizaines et unités	54, 55
37. Dix = 10	60, 61
38. Le nombre 11	62
39. Le nombre 12	63
42. Le nombre 13	66
43. Le nombre 14	67
46. Le nombre 15	70
47. Le nombre 16	71
52. Les nombres 17, 18 et 19	78, 79
53. Le nombre 20	80
55. Les nombres de 20 à 29	82, 83
58. Les nombres de 30 à 39	86, 87
63. Les nombres de 40 à 49	94, 95
67. Les nombres de 50 à 59	100, 101
72. Les nombres de 60 à 79	106, 107
75. Les nombres de 80 à 99	112, 113
85. Grille des nombres de 0 à 100	128
Calcul	
7. Le signe +	16, 17
20. Tableau à double entrée	35
44. Surcompter	68
48. Sommes partielles	72
54. Table d'addition	81
64. Poser une addition	96
70. L'addition à retenue	104
76. Doubles et moitiés	114
78. Le signe -	116, 117

Annexe C2

Extraits du manuel « J'apprends les maths avec Picbille » - CP – Rémi BRISSIAUD, Pierre CLERC et André OUZOULIAS (Retz - 2001), pages 4 et 5

INDEX PAR DOMAINES MATHÉMATIQUES (numériques)

	Page		Page
ARITHMETIQUE		Les stratégies de calcul (ordre chronologique)	
Représenter les quantités (ordre alphabétique)		Sommes ≤ 5	22
Boîtes de Picbille ≤ 5	14	Sommes ≤ 10 : le passage de 5 (4 + 3 par exemple)	37
≤ 10	32	Autres sommes ≤ 10 (6 + 3 par exemple)	38
> 10	76, 86-87, 140-141	Commutativité de l'addition	39
Boulier	89, 110	Les « petits doubles » (jusqu'à 5 + 5)	45
Constellations diverses jusqu'à 5	6, 84	Soustraction (1) : retirer peu	46-47
Cartons éclairs	13, 82	Soustraction (2) : retirer beaucoup	58-59
Constellations du dé ≤ 5	8	Compléments à 10	63
Constellations du dé ≤ 10	40	Le retour aux 5 (7 + 5 par exemple)	78
Constellations du dé > 10	64, 67	Les « grands doubles » (jusqu'à 10 + 10)	88
Configurations de doigts ≤ 5	8	Le passage de la dizaine	96, 98
Configurations de doigts ≤ 10	17, 19, 20, 22	Réduction d'une somme	102
Écritures littérales	54, 65-66, 95 97, 99, 101, 109, 117, 123	Sommes du type 21 + 7; 24 + 6; 23 + 9	108
File numérique	12, 13, 33, 36, 79, 86-87	Sommes de nombres à 2 chiffres	104, 112-113, 116 à 119
Monnaie	34, 74, 93, 104, 119		
Numération décimale (vers la)	74 à 85		
Numération décimale	86-87 et suivantes		
Planche des nombres comme Picbille et Dédé	140-141		
Ordonner, repérer		L'ORGANISATION EN 4 PÉRIODES	
Rangement de nombres	48	Périodes	Arithmétique
Comparaison de nombres ($>$ et $<$)	61		Pages
Repérer une case (tableaux cartésiens)	92	1	Calcul jusqu'à 5 Comptage jusqu'à 20 (utilisation de la file numérique) 6 à 31
Les écritures arithmétiques (ordre chronologique)		2	Calcul jusqu'à 10 Comptage jusqu'à 50 (utilisation de la file numérique) 32 à 73
Les signes + et =	22, 24	3	Numération décimale : les nombres jusqu'à 70 Calcul : retour aux 5, doubles, passage de la dizaine 74 à 103
Produire une égalité	23, 44, 60	4	De la numération décimale à l'addition de nombres à 2 chiffres 104 à 133
Le nombre zéro	24		
Décompositions additives	25, 27, 50, 63, 72, 89, 94		
Le signe -	46-47		
Distinguer les signes + et -	49		
Les signes $>$ et $<$	61		
La numération décimale	86-87 et suivantes		
Les techniques opératoires			
Vers l'addition en ligne	104		
L'addition en ligne (1)	112		
L'addition en ligne (2)	118		
L'addition en colonnes	126		

Annexe D

Extrait des programmes de l'enseignement primaire (arrêté du 25 janvier 2002) – Cycle des apprentissages fondamentaux – Mathématiques, B.O. hors-série n° 1 du 14 février 2002, page 53

PROGRAMMES DE L'ÉCOLE PRIMAIRE
CYCLE DES APPRENTISSAGES FONDAMENTAUX

B.O.
N°1
14 FÉVR.
2002
HORS-SÉRIE

53

Compétences devant être acquises en fin de cycle

[...]

1 - EXPLOITATION DE DONNÉES NUMÉRIQUES

1.1 Problèmes résolus en utilisant une procédure experte

- a - utiliser le dénombrement pour comparer deux quantités ou pour réaliser une quantité égale à une quantité donnée ;
- b - utiliser les nombres pour exprimer la position d'un objet dans une liste ou pour comparer des positions ;
- c - déterminer, par addition ou soustraction, le résultat d'une augmentation, d'une diminution ou de la réunion de deux quantités ;
- d - déterminer, par addition ou soustraction, la position atteinte sur une ligne graduée à la suite d'un déplacement en avant ou en arrière ;
- e - déterminer, par multiplication, le résultat de la réunion de plusieurs quantités ou valeurs identiques.

1.2 Problèmes résolus en utilisant une procédure personnelle

- a - dans des situations où une quantité (ou une valeur) subit une augmentation ou une diminution, déterminer la quantité (ou la valeur) initiale, ou trouver la valeur de l'augmentation ou de la diminution ;
- b - déterminer une position initiale sur une ligne graduée, avant la réalisation d'un déplacement (en avant ou en arrière) pour atteindre une position donnée ou déterminer la valeur du déplacement ;
- c - dans des situations où deux quantités (ou valeurs) sont réunies, déterminer l'une des quantités (ou l'une des valeurs) ;
- d - dans des situations où deux quantités (ou deux valeurs) sont comparées, déterminer l'une des quantités (ou l'une des valeurs) ou le résultat de la comparaison ;
- e - dans des situations de partage ou de distribution équitables, déterminer le nombre total d'objets, le montant de chaque part ou le nombre de parts ;
- f - dans des situations où des objets sont organisés en rangées régulières, déterminer le nombre total d'objets, le nombre d'objets par rangées ou le nombre de rangées ;
- g - dans des situations où plusieurs quantités (ou valeurs) identiques sont réunies, déterminer la quantité (ou la valeur) totale, l'une des quantités (ou des valeurs) ou le nombre de quantités (ou de valeurs).

2 - CONNAISSANCE DES NOMBRES ENTIERS NATURELS

2.1 Désignations orales et écrites des nombres entiers naturels (inférieurs à 1000)

- a - dénombrer et réaliser des quantités en utilisant le comptage un à un ou des groupements et des échanges par dizaines et centaines ;
- b - comprendre et déterminer la valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture décimale d'un nombre ;
- c - produire des suites orales et écrites de nombres de 1 en 1, 10 en 10, 100 en 100 (en avant et en arrière, à partir de n'importe quel nombre), en particulier citer le nombre qui suit ou qui précède un nombre donné ;
- d - associer les désignations chiffrées et orales des nombres.

2.2 Ordre sur les nombres entiers naturels

- a - comparer, ranger, encadrer des nombres (en particulier entre deux dizaines consécutives ou entre deux centaines consécutives),
- b - situer des nombres (ou repérer une position par un nombre) sur une ligne graduée de 1 en 1, 10 en 10, 100 en 100.

2.3 Relations arithmétiques entre les nombres entiers naturels

- a - connaître les doubles et moitiés de nombres d'usage courant : doubles des nombres inférieurs à 10, des dizaines entières inférieures à 100, moitié de 2, 4, 6, 8, 10, 20, 40, 60, 80 ;
- b - connaître et utiliser les relations entre nombres d'usage courant : entre 5 et 10 ; entre 25 et 50 ; entre 50 et 100 ; entre 15 et 30, entre 30 et 60 ; entre 12 et 24.

3 - CALCUL

3.1 Calcul automatisé

- a - connaître ou reconstruire très rapidement les résultats des tables d'addition (de 1 à 9) et les utiliser pour calculer une somme, une différence, un complément, ou décomposer un nombre sous forme de somme ;
- b - trouver rapidement le complément d'un nombre à la dizaine immédiatement supérieure ;
- c - connaître et utiliser les tables de multiplication par deux et cinq, savoir multiplier par dix ;
- d - calculer des sommes en ligne ou par addition posée en colonne.

3.2 Calcul réfléchi

- a - organiser et traiter des calculs additifs, soustractifs et multiplicatifs sur les nombres entiers,
- b - résoudre mentalement des problèmes à données numériques simples.

3.3 Calcul instrumenté

- a - utiliser à bon escient une calculatrice (en particulier pour obtenir un résultat lorsqu'on ne dispose pas d'une méthode de calcul efficace).

[...]

Annexe E

Extrait de « Math – Pédagogie de l'essai » - CP – Lucile FOURCHOTTE, Françoise GODINAT, Robert TINON et Michel WROBEL (Hachette édition - 2001), page 46

28 Grouper pour dénombrer

On peut dénombrer une collection en regroupant les éléments.

2 groupes 4 isolés

• Explorer les propriétés du codage par groupement.

1 **

Dénombrer en groupant et compléter le tableau.

Remarque : coder relève de la convention, plusieurs codages sont envisageables.

2 **

Complète les tableaux.

Gilles

Lucie

Remarque : des codages différents ne permettent pas de comparer le nombre d'éléments de deux ensembles.

3 ***

Complète les tableaux.

Brian

Chloé

Remarque : des groupements différents aboutissent à des codages différents d'un même nombre.

GRENOBLE

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS) MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE 1

Deux joueurs font la « course à 10 par pas de 2 » : chacun ajoute 1 ou 2 au résultat de son adversaire. Le gagnant est celui qui annonce 10 le premier.

Par exemple, dans la première partie, le joueur A commence et dit : « 1 » ; le joueur B dit : « $1 + 2 = 3$ » ; A dit : « $3 + 2 = 5$ » ; B dit : « $5 + 1 = 6$ » ; A dit : « $6 + 2 = 8$ » ; B dit : « $8 + 2 = 10$ » et gagne.

- 1) Dans la deuxième partie, le joueur A arrive à 7 et dit à B : « J'ai gagné ! ». Justifiez cette affirmation.
- 2) Dans la troisième partie, le joueur B commence, dit un nombre puis annonce : « J'ai gagné ! ». Quel est ce nombre ?
- 3) Le pas devient 3 : on ajoute 1, 2 ou 3. Quel nombre le joueur qui commence la partie doit-il annoncer pour être sûr de gagner ?
- 4) Dans la quatrième partie, le joueur A dit : « Faisons maintenant la course à 12, toujours par pas de 3, et c'est toi qui commences. ». Expliquez pourquoi A est sûr de gagner.
- 5) Dans la « course à n par pas de 3 », quelle(s) condition(s) doivent respecter les nombres n ($n > 3$) pour que le joueur qui commence ait la certitude de gagner ?

EXERCICE 2

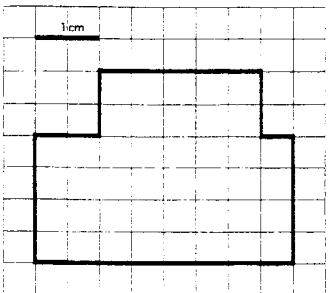
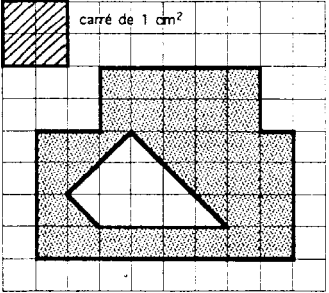
Soit ABC un triangle, I le milieu de [AB] et J le milieu de [AC]. Les droites (BJ) et (CI) se coupent en G. On note E le symétrique de A par rapport à G. Les droites (BC) et (AG) se coupent en K.

- 1) Démontrez que les droites (IG) et (BE) sont parallèles.
- 2) Démontrez que BGCE est un parallélogramme.
- 3) Démontrez que la droite (AG) est la troisième médiane du triangle ABC.
Énoncez alors la propriété que vous avez démontrée.

- 4) Les points B, C et G non alignés figurent sur le document placé en annexe A.
Sur l'annexe A, avec une règle non graduée et un compas, construisez le triangle ABC tel que G soit son centre de gravité. Vous indiquerez votre procédure.

**DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES**

Des exercices ont été proposés à des élèves de fin de cycle des apprentissages fondamentaux. Leur fac-similé en réduction est présenté ci-dessous.

a) Quel est le périmètre de la figure?  Réponse :cm	b) Quelle est l'aire de la surface coloriée en gris?  Réponse :cm² Explique comment tu as fait pour trouver la réponse.
---	--

- 1) Ces exercices placent les élèves face à certaines difficultés. Citez-en quatre.
- 2) Les documents observés sont dans l'annexe B1.
 - a) Comparez les procédures utilisées par les élèves Marina et Raoul.
 - b) D'où viennent les nombres 7 et 9, dans l'exercice de Mathilde
 - c) Quelle est l'erreur commune aux trois élèves ?
- 3) Les documents utilisés sont dans l'annexe B2.
 - a) Analysez les procédures utilisées par Anaïs et Julie.
 - b) Quel obstacle dans l'apprentissage de la notion d'aire peut expliquer la réponse d'Alexandre ?
- 4) À ce même exercice, quelques élèves ont répondu « 8,2 ». Expliquez comment ils ont pu arriver à ce résultat.

SECOND VOLET (8 POINTS)

Les documents qui vont être utilisés sont extraits :

- du manuel « *Math - Pédagogie de l'essai* » - CP - Lucille FOURCHOTTE, Françoise GODINAT, Robert TINON et Michel WOROBE (Hachette édition - 2001), pages 6 (annexe C1) et 46 (annexe E) ;
- du manuel « *J'apprends les maths avec Picbille* » - CP - Rémi BRISSIAUD, Pierre CLERC et André OUZOULIAS (Retz - 2001), pages 4 et 5 (annexe C2) ;
- des programmes de l'enseignement primaire (arrêté du 25 janvier 2002) - Cycle des apprentissages fondamentaux - Mathématiques, B.O. hors-série n°1 du 14 février 2002, page 53 (annexe D).

Le maître de CP va aborder la numération.

1) Il a retenu deux manuels desquels sont extraits les documents présentés en annexes C1 (sommaire par domaines mathématiques) et C2 (index par domaines mathématiques et organisation en quatre périodes).

a) Présentez deux différences de conception de l'entrée dans la numération que vous percevez à la lecture de ces documents.

b) Quelle place semble être donnée au calcul dans chacun des deux ouvrages cités ? Justifiez votre réponse en précisant les indices sur lesquels vous vous appuyez.

2) Le programme de mathématiques du cycle des apprentissages fondamentaux de 2002 évoque l'aspect cardinal et l'aspect ordinal des nombres entiers naturels.

a) Définissez chacun de ces deux aspects.

b) Dans le paragraphe 1 - *Exploitation de données numériques* présenté en annexe D, relevez les compétences qui se rapportent à l'aspect ordinal des nombres entiers naturels. (Vous pourrez n'indiquer que leur référence.)

3) Citez deux procédures qu'un élève peut mettre en oeuvre pour effectuer la somme : $12 + 7$, alors qu'il ne dispose pas de la procédure experte de la technique opératoire.

4) Le programme de mathématiques de 2002 précise : « *Concernant l'addition et la soustraction, il est souhaitable que les écritures $a + b$ et $a - b$ soient, dès le départ, travaillées simultanément...* »

a) Quel est l'inconvénient de ne travailler que l'écriture $a + b$?

- b) Indiquez deux autres raisons de travailler simultanément les écritures $a + b$ et $a - b$?
 - c) Citez trois difficultés que les élèves peuvent rencontrer dans l'apprentissage de la soustraction.
- 5) Dans l'annexe C1, zéro apparaît aux chapitres 30 en tant que chiffre et 31 en tant que nombre.
- a) Commentez la position du chapitre 27 au regard de la progression présentée dans ce sommaire.
 - b) Quelle distinction existe-t-il entre chiffre et nombre ?
- 6) Dans les exercices figurant dans le document donné en annexe E, les élèves sont amenés à effectuer des groupements et à renseigner des tableaux.
- a) Quelles compétences définies dans les programmes (annexe D) sont ici visées ? (Vous pourrez n'indiquer que leur référence.)
 - b) Indiquez différents types de réponses que peuvent produire les élèves à l'exercice 1.
 - c) Quelle analyse critique faites-vous des exercices 2 et 3 ?

Annexe A

(à remettre complétée avec la copie)

x
B

G
x

x
C

Annexe B1

MARINA

a) Quel est le périmètre de la figure ?

Réponse : ... 21 cm

MATHILDE

a) Quel est le périmètre de la figure ?

Réponse : 63 cm

$7 \times 9 = 63$

RAOUL

a) Quel est le périmètre de la figure ?

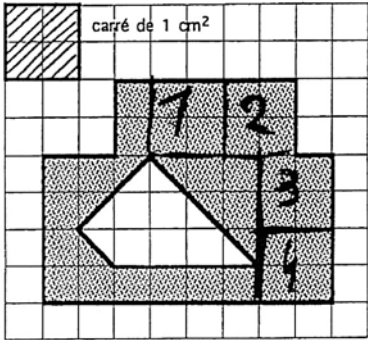
Réponse : ... 21 cm

Annexe B2

b) Quelle est l'aire de la surface coloriée en gris ?

Explique comment tu as fait pour trouver la réponse.

ALEXANDRE



Réponse : cm²

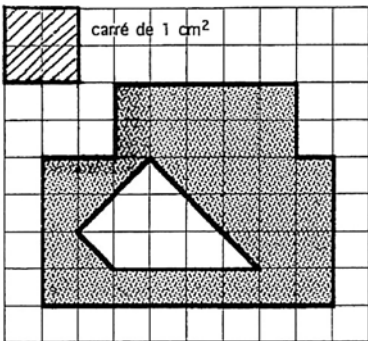
tu fait 4 carreaux dans chaque cube

l'aire de la surface et 4 cm².

b) Quelle est l'aire de la surface coloriée en gris ?

Explique comment tu as fait pour trouver la réponse.

ANAÏS



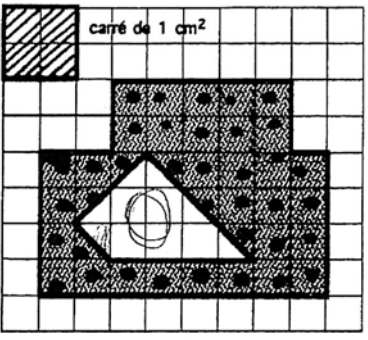
Réponse : 37 cm²

J'ai comptés tout les carreaux

b) Quelle est l'aire de la surface coloriée en gris ?

Explique comment tu as fait pour trouver la réponse.

JULIE



Réponse : 9 cm²

J'ai pris 4 carreaux à chaque fois

Annexe C1

Extrait de « Math – Pédagogie de l'essai » - CP – Lucile FOURCHOTTE, Françoise GODINAT, Robert TINON et Michel WROBEL (Hachette édition - 2001), page 6

SOMMAIRE PAR DOMAINES MATHÉMATIQUES (numériques)

	<u>Page</u>
Connaissance des nombres	
2. Le nombre 1	10, 11
3. Le nombre 2	12
5. Autant que, pas autant que	14
6. Plus que, moins que	15
8. Le nombre 3	18, 19
9. Le nombre 4	20
10. La file numérique	21
13. Le nombre 5	26, 27
16. Le nombre 6	30
17. Le nombre 7	31
18. Comparer	32, 33
21. Le nombre 8	36
22. Le nombre 9	37
25. Le nombre dix	42
27. Dénombrer une quantité	
au-delà de 10	44, 45
28. Grouper pour dénombrer	46, 47
30. Le chiffre 0	50
31. Le nombre zéro	51
34. Dizaines et unités	54, 55
37. Dix = 10	60, 61
38. Le nombre 11	62
39. Le nombre 12	63
42. Le nombre 13	66
43. Le nombre 14	67
46. Le nombre 15	70
47. Le nombre 16	71
52. Les nombres 17, 18 et 19	78, 79
53. Le nombre 20	80
55. Les nombres de 20 à 29	82, 83
58. Les nombres de 30 à 39	86, 87
63. Les nombres de 40 à 49	94, 95
67. Les nombres de 50 à 59	100, 101
72. Les nombres de 60 à 79	106, 107
75. Les nombres de 80 à 99	112, 113
85. Grille des nombres de 0 à 100	128
Calcul	
7. Le signe +	16, 17
20. Tableau à double entrée	35
44. Surcompter	68
48. Sommes partielles	72
54. Table d'addition	81
64. Poser une addition	96
70. L'addition à retenue	104
76. Doubles et moitiés	114
78. Le signe -	116, 117

Annexe C2

Extraits du manuel « J'apprends les maths avec Picbille » - CP – Rémi BRISSIAUD, Pierre CLERC et André OUZOULIAS (Retz - 2001), pages 4 et 5

INDEX PAR DOMAINES MATHÉMATIQUES (numériques)

	Page		Page
ARITHMETIQUE		Les stratégies de calcul (ordre chronologique)	
Représenter les quantités (ordre alphabétique)		Sommes ≤ 5	22
Boîtes de Picbille ≤ 5	14	Sommes ≤ 10 : le passage de 5 (4 + 3 par exemple)	37
≤ 10	32	Autres sommes ≤ 10 (6 + 3 par exemple)	38
> 10	76, 86-87, 140-141	Commutativité de l'addition	39
Boulier	89, 110	Les « petits doubles » (jusqu'à 5 + 5)	45
Constellations diverses jusqu'à 5	6, 84	Soustraction (1) : retirer peu	46-47
Cartons éclairs	13, 82	Soustraction (2) : retirer beaucoup	58-59
Constellations du dé ≤ 5	8	Compléments à 10	63
Constellations du dé ≤ 10	40	Le retour aux 5 (7 + 5 par exemple)	78
Constellations du dé > 10	64, 67	Les « grands doubles » (jusqu'à 10 + 10)	88
Configurations de doigts ≤ 5	8	Le passage de la dizaine	96, 98
Configurations de doigts ≤ 10	17, 19, 20, 22	Réduction d'une somme	102
Écritures littérales	54, 65-66, 95 97, 99, 101, 109, 117, 123	Sommes du type 21 + 7; 24 + 6; 23 + 9	108
File numérique	12, 13, 33, 36, 79, 86-87	Sommes de nombres à 2 chiffres	104, 112-113, 116 à 119
Monnaie	34, 74, 93, 104, 119		
Numération décimale (vers la)	74 à 85		
Numération décimale	86-87 et suivantes		
Planche des nombres comme Picbille et Dédé	140-141		
Ordonner, repérer		L'ORGANISATION EN 4 PÉRIODES	
Rangement de nombres	48	Périodes	Arithmétique
Comparaison de nombres ($>$ et $<$)	61		Pages
Repérer une case (tableaux cartésiens)	92		
Les écritures arithmétiques (ordre chronologique)		1	Calcul jusqu'à 5 Comptage jusqu'à 20 (utilisation de la file numérique) 32 à 73
Les signes + et =	22, 24	2	Calcul jusqu'à 10 Comptage jusqu'à 50 (utilisation de la file numérique) 74 à 103
Produire une égalité	23, 44, 60	3	Numération décimale : les nombres jusqu'à 70 Calcul : retour aux 5, doubles, passage de la dizaine 104 à 133
Le nombre zéro	24	4	De la numération décimale à l'addition de nombres à 2 chiffres
Décompositions additives	25, 27, 50, 63, 72, 89, 94		
Le signe -	46-47		
Distinguer les signes + et -	49		
Les signes $>$ et $<$	61		
La numération décimale	86-87 et suivantes		
Les techniques opératoires			
Vers l'addition en ligne	104		
L'addition en ligne (1)	112		
L'addition en ligne (2)	118		
L'addition en colonnes	126		

Annexe D

Extrait des programmes de l'enseignement primaire (arrêté du 25 janvier 2002) – Cycle des apprentissages fondamentaux – Mathématiques, B.O. hors-série n° 1 du 14 février 2002, page 53

PROGRAMMES DE L'ÉCOLE PRIMAIRE
CYCLE DES APPRENTISSAGES FONDAMENTAUX

B.O.
N°1
14 FÉVR.
2002
HORS-SÉRIE

53

Compétences devant être acquises en fin de cycle

[...]

1 - EXPLOITATION DE DONNÉES NUMÉRIQUES

1.1 Problèmes résolus en utilisant une procédure experte

- a - utiliser le dénombrement pour comparer deux quantités ou pour réaliser une quantité égale à une quantité donnée ;
- b - utiliser les nombres pour exprimer la position d'un objet dans une liste ou pour comparer des positions ;
- c - déterminer, par addition ou soustraction, le résultat d'une augmentation, d'une diminution ou de la réunion de deux quantités ;
- d - déterminer, par addition ou soustraction, la position atteinte sur une ligne graduée à la suite d'un déplacement en avant ou en arrière ;
- e - déterminer, par multiplication, le résultat de la réunion de plusieurs quantités ou valeurs identiques.

1.2 Problèmes résolus en utilisant une procédure personnelle

- a - dans des situations où une quantité (ou une valeur) subit une augmentation ou une diminution, déterminer la quantité (ou la valeur) initiale, ou trouver la valeur de l'augmentation ou de la diminution ;
- b - déterminer une position initiale sur une ligne graduée, avant la réalisation d'un déplacement (en avant ou en arrière) pour atteindre une position donnée ou déterminer la valeur du déplacement ;
- c - dans des situations où deux quantités (ou valeurs) sont réunies, déterminer l'une des quantités (ou l'une des valeurs) ;
- d - dans des situations où deux quantités (ou deux valeurs) sont comparées, déterminer l'une des quantités (ou l'une des valeurs) ou le résultat de la comparaison ;
- e - dans des situations de partage ou de distribution équitables, déterminer le nombre total d'objets, le montant de chaque part ou le nombre de parts ;
- f - dans des situations où des objets sont organisés en rangées régulières, déterminer le nombre total d'objets, le nombre d'objets par rangées ou le nombre de rangées ;
- g - dans des situations où plusieurs quantités (ou valeurs) identiques sont réunies, déterminer la quantité (ou la valeur) totale, l'une des quantités (ou des valeurs) ou le nombre de quantités (ou de valeurs).

2 - CONNAISSANCE DES NOMBRES ENTIERS NATURELS

2.1 Désignations orales et écrites des nombres entiers naturels (inférieurs à 1000)

- a - dénombrer et réaliser des quantités en utilisant le comptage un à un ou des groupements et des échanges par dizaines et centaines ;
- b - comprendre et déterminer la valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture décimale d'un nombre ;
- c - produire des suites orales et écrites de nombres de 1 en 1, 10 en 10, 100 en 100 (en avant et en arrière, à partir de n'importe quel nombre), en particulier citer le nombre qui suit ou qui précède un nombre donné ;
- d - associer les désignations chiffrées et orales des nombres.

2.2 Ordre sur les nombres entiers naturels

- a - comparer, ranger, encadrer des nombres (en particulier entre deux dizaines consécutives ou entre deux centaines consécutives),
- b - situer des nombres (ou repérer une position par un nombre) sur une ligne graduée de 1 en 1, 10 en 10, 100 en 100.

2.3 Relations arithmétiques entre les nombres entiers naturels

- a - connaître les doubles et moitiés de nombres d'usage courant : doubles des nombres inférieurs à 10, des dizaines entières inférieures à 100, moitié de 2, 4, 6, 8, 10, 20, 40, 60, 80 ;
- b - connaître et utiliser les relations entre nombres d'usage courant : entre 5 et 10 ; entre 25 et 50 ; entre 50 et 100 ; entre 15 et 30, entre 30 et 60 ; entre 12 et 24.

3 - CALCUL

3.1 Calcul automatisé

- a - connaître ou reconstruire très rapidement les résultats des tables d'addition (de 1 à 9) et les utiliser pour calculer une somme, une différence, un complément, ou décomposer un nombre sous forme de somme ;
- b - trouver rapidement le complément d'un nombre à la dizaine immédiatement supérieure ;
- c - connaître et utiliser les tables de multiplication par deux et cinq, savoir multiplier par dix ;
- d - calculer des sommes en ligne ou par addition posée en colonne.

3.2 Calcul réfléchi

- a - organiser et traiter des calculs additifs, soustractifs et multiplicatifs sur les nombres entiers,
- b - résoudre mentalement des problèmes à données numériques simples.

3.3 Calcul instrumenté

- a - utiliser à bon escient une calculatrice (en particulier pour obtenir un résultat lorsqu'on ne dispose pas d'une méthode de calcul efficace).

[...]

Annexe E

Extrait de « Math – Pédagogie de l'essai » - CP – Lucile FOURCHOTTE, Françoise GODINAT, Robert TINON et Michel WROBEL (Hachette édition - 2001), page 46

28

Grouper pour dénombrer

○	●
2	4

2 groupes 4 isolés

On peut dénombrer une collection en regroupant les éléments.

• Explorer les propriétés du codage par groupement.

1 **

Dénombrer en groupant et compléter le tableau.

○	●

• Remarque : coder relève de la convention, plusieurs codages sont envisageables.

2 **

Complète les tableaux.

Gilles

○	◆

Lucie

○	✕

• Remarque : des codages différents ne permettent pas de comparer le nombre d'éléments de deux ensembles.

3 ***

Complète les tableaux.

Brian

○	●

Chloé

○	▲

• Remarque : des groupements différents aboutissent à des codages différents d'un même nombre.

GUADELOUPE

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS) MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE 1

1) On considère un nombre qui s'écrit en base 10 :

$\Delta 5 \Delta 5 \Delta 5 \Delta 5 \Delta$

Quelle valeur donner à Δ pour que la somme des chiffres de ce nombre soit un multiple de 7 ?

2) Un nombre s'écrit en base 10 sous forme: E97F

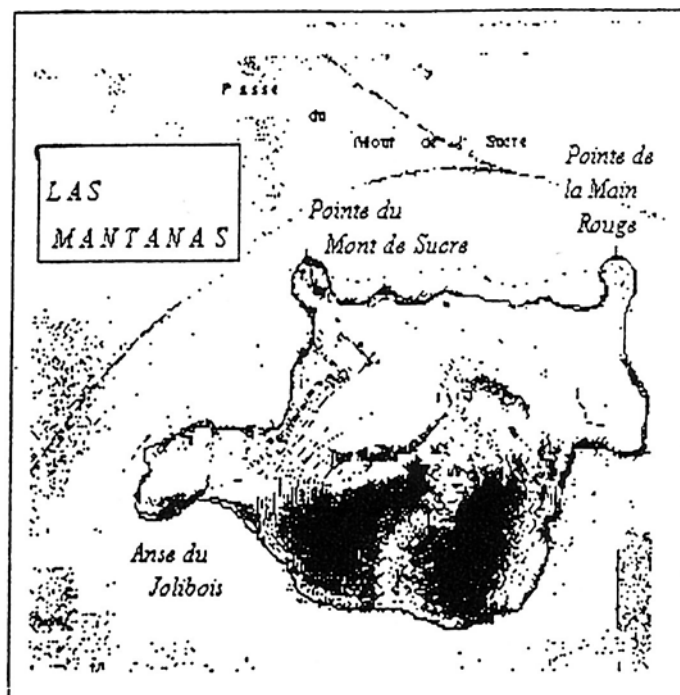
a) Donner tous les couples de valeurs possibles pour E et F sachant que la somme des chiffres de ce nombre est égale à 29.

b) On ajoute les deux conditions suivantes :

- Le produit des chiffres de ce nombre est égal à 2268.
- 7 divise le nombre EF

Quelles sont alors les valeurs respectives de E et F ?

EXERCICE 2



Calculer l'échelle de cette carte sachant que la distance entre la pointe du « Mont de Sucre » et la pointe de la « Main Rouge » est de 1 km.

EXERCICE 3

(les questions 2, 3, 4 et 5 sont indépendantes)

1) (Figure initiale)

- a) Construire un triangle ABC rectangle isocèle de sommet principal B. On note **a** la longueur du côté [BC] et I le milieu de [AC].
- b) Tracer le demi-cercle de diamètre AC qui ne coupe pas [AB], puis placer un point M sur ce demi-cercle.

2) Exprimer la longueur AC en fonction de **a**.

Proposer une méthode pour construire un segment de longueur $\sqrt{18}$ cm.
Construire un tel segment.

3) Montrer que si AM vaut **a**, le quadrilatère AMCB est un carré.

4) On suppose désormais que $IM = MC$

- a) Quelle est alors la nature du triangle IMC ?
- b) En utilisant, entre autre, le résultat de la question 2, et en prenant 3 cm pour **a** :
 - Construire à la règle non graduée et au compas seulement le segment [AC], le demi-cercle de diamètre AC et le point M.
 - Construire au compas seulement le symétrique M' du point M par rapport à la médiatrice de [AC].

5) On revient à la figure initiale.

La droite perpendiculaire à la droite (AB) et passant par le point M coupe les segments [AB] et [AC] respectivement en F et E.
Démontrer que le triangle AFE est isocèle.

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS) ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES
--

1) Au cours du premier trimestre, un enseignant de CE1 s'adresse ainsi aux élèves :

« Dans cette boîte il y a des cubes, je ne vous dis pas combien. J'en ajoute 10 (il les montre et les met dans la boîte). Maintenant il y a 34 cubes. Combien y avait-il de cubes dans la boîte ? ».

A quelle compétence, extraite de l'annexe 2, ce problème est-il associé ?

Certains élèves trouvent : « 44 cubes ». Expliquez cette réponse en mettant en évidence deux types de difficultés que présente ce problème. Quelle validation envisagez-vous ?

2) L'énoncé suivant a été proposé à des élèves de fin de cycle 3.

Trois personnes ont mis 3 h 15 min pour peindre un terrain de sport rectangulaire.

1) Combien de temps une personne seule travaillant au même rythme aurait-elle mis pour peindre ce premier terrain ?

2) Combien de temps les trois personnes travaillant dans les mêmes conditions auraient-elles mis pour peindre un deuxième terrain rectangulaire dont la longueur et la largeur sont trois fois plus grandes que celles du premier ?

Analysez les réponses suivantes d'un élève et formulez des hypothèses sur les causes des erreurs ou réussites :

1) $3,15 : 3 = 1,5$

une personne seule mettra 1 h 5 pour peindre le premier terrain

2) $3,15 \times 3 = 9,45$

trois personnes mettront 9 h 45 pour peindre le deuxième terrain

SECOND VOLET (8 POINTS)

L'annexe 1 présente la situation « Les factures » extraite de « Apprentissages numériques et résolution de problèmes » (Hatier Edition 2001).

Cette situation est proposée à des élèves de CE1 qui ont déjà rencontré des problèmes multiplicatifs. Le signe $\times$ a été présenté. Les calculettes ont déjà été utilisées dans cette classe.

L'annexe 2 est un extrait des « nouveaux programmes » et concerne les compétences attendues en résolution de problèmes à la fin du cycle 2.

1) a) Quels sont les objectifs spécifiques relatifs à chacune des 2 activités proposées ?

b) Parmi les compétences de fin de cycle citées en annexe 2, quelles sont celles qui sont développées à travers ces activités ?

2) Pour ces activités, trois des quatre phases sont divisées en plusieurs étapes.

a) Proposez un titre pour chaque étape.

b) Pour chaque phase, citez 3 procédures possibles de la part des élèves.

3) Quelles sont les variables didactiques de la situation ? Justifiez votre réponse.

Rappel : Une variable didactique est un élément de la situation qui peut être modifié par le maître, et qui affecte la hiérarchie des stratégies de solutions (par le coût, la validité, la complexité).

4) Quel est l'intérêt de l'organisation de classe choisie par l'enseignant (travail individuel ou en équipe de deux, selon les phases) ?

Annexe 1

Activité 1

PREMIERE PHASE : PREMIERS CALCULS

Le problème

« Voici les achats faits par trois personnes :

Armèle : 8 livres

Bertrand : 7 jouets

Corinne : 10 sacs à dos

On veut savoir qui a dépensé le plus, et qui a dépensé le moins.

Les prix sont les suivants :

Un livre : 27 €

Un jouet : 32 €

Un sac à dos : 22 €. »

Etape 1 :

Le problème est écrit au tableau, sans les prix. Ces derniers seront communiqués à l'issue des réactions des élèves.

Etape 2 :

Les élèves, individuellement ou à deux, résolvent le problème posé.

Etape 3 :

Un inventaire permet de distinguer les modes de calcul et de considérer les difficultés rencontrées. Le maître favorise l'explicitation des méthodes, il n'en valorise aucune.

DEUXIEME PHASE : DESCRIPTION DE CALCULS

Le problème

Les élèves sont par équipes de deux. La moitié des équipes reçoit l'une des commandes de la colonne A, l'autre moitié l'une des commandes de la colonne B.

A	B
11 jouets à 32 €	13 jouets à 32 €
14 livres à 27 €	15 livres à 27 €
12 sacs à dos à 24 €	13 sacs à dos à 24 €

Dans un premier temps, chaque équipe prépare un message qui permet de calculer la dépense, mais elle ne doit faire aucun calcul. (Tout le monde est « émetteur »). On procède alors à l'échange des messages entre 2 équipes ayant des commandes différentes.

Dans un second temps, chaque équipe doit fournir le résultat correspondant au message qu'elle a reçu. (Tout le monde devient « récepteur »).

Matériel :

Pour chaque élève : une feuille portant l'énoncé. La partie comportant le message sera découpée et remise aux récepteurs.

Exemple :

Nom des émetteurs : 1) 2) Prix d'un livre : 27 € Quel est le prix de 14 livres ?
Nom des émetteurs : 1) 2) Indiquez-ici le calcul à effectuer sans faire le calcul
Nom des récepteurs : 1) 2)

Chaque équipe de deux reçoit une feuille à compléter. Six feuilles différentes sont ainsi réparties sur l'ensemble de la classe.

Etape 1 :

Avant de s'impliquer dans l'activité, les élèves sont invités à expliquer ce qu'ils pensent faire en tant qu'émetteurs et en tant que récepteurs...

Une fois les messages rédigés, les feuilles sont relevées, découpées puis redistribuées pour la seconde partie de l'activité.

Etape 2 :

L'inventaire permet de considérer les types de messages et les modes de calculs, de voir et de vérifier les résultats. C'est aussi l'occasion de considérer des difficultés rencontrées.

Etape 3 :

L'activité reprend avec deux nouvelles commandes.

Exemples de commandes :

A : 12 rollers à 35 €,	14 raquettes à 26 €,	15 paires de tennis à 34 €
B : 14 rollers à 35 €,	13 raquettes à 26 €,	13 paires de tennis à 34 €

Activité 2

PREMIERE PHASE :

Chaque équipe de deux élèves va réaliser une commande. Il faut choisir un seul type de jouet (par exemple : uniquement des avions).

Avion : 28 € Voiture : 25 € Ours en peluche : 29 € Maquette : 27 € Poupée : 33 €

Il faut commander le plus possible de jouets du type choisi.

L'achat ne doit pas dépasser 200 €. Il faut calculer ce qui restera après l'achat.

Matériel :

Pour chaque équipe, une fiche telle que la suivante :

Noms : 1) 2)
Nous avons
Nous commandons à
Nous dépensons :
Il restera :
Les calculs (ou ce qui a été tapé sur la calculette) :
Noms des récepteurs : 1) 2).

Etape 1 :

Le problème figure au tableau par exemple. Il est lu individuellement. Les trois contraintes doivent être bien comprises. Le maître remet aux élèves la fiche décrite. Il précisera éventuellement : « il s'agit d'écrire votre choix et les calculs qui vous ont aidés à vous décider. La fiche sera remise à un autre groupe qui vérifiera si ce que vous avez décidé va bien. »

A l'issue d'un temps de recherche, les fiches sont échangées entre les équipes. Elles sont « vérifiées » par les récepteurs puis rendues.

Etape 2 :

Le maître choisit des réalisations correspondant aux différentes commandes possibles, de manière à considérer la diversité des méthodes et à gérer des désaccords persistants à l'issue des échanges.

DEUXIEME PHASE :

Le problème est analogue au précédent et mobilise des nombres plus grands. Il faut par exemple commander un seul type de matériel pour une école.

Même déroulement que dans la première phase.

Annexe 2

PROGRAMMES D'ENSEIGNEMENT DE L'ÉCOLE PRIMAIRE (EXTRAITS)

B.O. Hors série n°1 du 14 février 2002

III – CYCLE DES APPRENTISSAGES FONDAMENTAUX – CYCLE 2

...

MATHÉMATIQUES

...

Compétences devant être acquises en fin de cycle

On trouvera dans le document d'application une version plus détaillée et commentée des compétences énumérées ici.

Des compétences générales sont à l'œuvre dans l'ensemble des activités mathématiques et doivent être acquises en fin de cycle :

- s'engager dans une procédure personnelle de résolution et la mener à son terme ;
- rendre compte oralement de la démarche utilisée, en s'appuyant éventuellement sur sa "feuille de recherche" ;
- admettre qu'il existe d'autres procédures que celle qu'on a soi-même élaborée et essayer de les comprendre ;
- rédiger une réponse à la question posée ;
- identifier des erreurs dans une solution.

1 - EXPLOITATION DE DONNÉES NUMÉRIQUES

1.1 Problèmes résolus en utilisant une procédure experte

- utiliser le dénombrement pour comparer deux quantités ou pour réaliser une quantité égale à une quantité donnée ;
- utiliser les nombres pour exprimer la position d'un objet dans une liste ou pour comparer des positions ;
- déterminer, par addition ou soustraction, le résultat d'une augmentation, d'une diminution ou de la réunion de deux quantités ;
- déterminer, par addition ou soustraction, la position atteinte sur une ligne graduée à la suite d'un déplacement en avant ou en arrière ;
- déterminer, par multiplication, le résultat de la réunion de plusieurs quantités ou valeurs identiques.

1.2 Problèmes résolus en utilisant une procédure personnelle

- dans des situations où une quantité (ou une valeur) subit une augmentation ou une diminution, déterminer la quantité (ou la valeur) initiale, ou trouver la valeur de l'augmentation ou de la diminution ;
- déterminer une position initiale sur une ligne graduée, avant la réalisation d'un déplacement (en avant ou en arrière) pour atteindre une position donnée ou déterminer la valeur du déplacement ;
- dans des situations où deux quantités (ou valeurs) sont réunies, déterminer l'une des quantités (ou l'une des valeurs) ;
- dans des situations où deux quantités (ou deux valeurs) sont comparées, déterminer l'une des quantités (ou l'une des valeurs) ou le résultat de la comparaison ;
- dans des situations de partage ou de distribution équitables, déterminer le nombre total d'objets, le montant de chaque part ou le nombre de parts ;
- dans des situations où des objets sont organisés en rangées régulières, déterminer le nombre total d'objets, le nombre d'objets par rangées ou le nombre de rangées ;
- dans des situations où plusieurs quantités (ou valeurs) identiques sont réunies, déterminer la quantité (ou la valeur) totale, l'une des quantités (ou des valeurs) ou le nombre de quantités (ou de valeurs).

...

GUYANE

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS) MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE 1

Soit $[AB]$ un segment de longueur 10 cm. Soit O le milieu de $[AB]$. Soit Γ le cercle de diamètre $[AB]$.

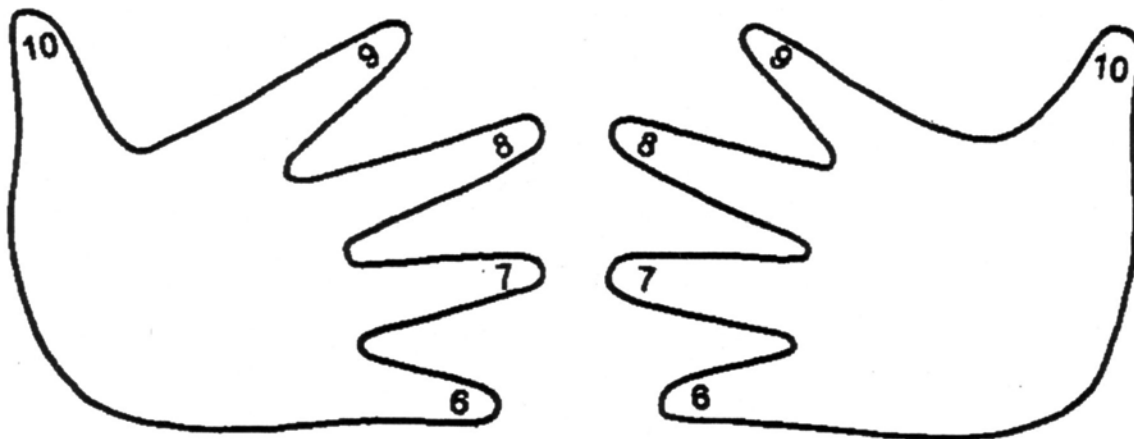
Soit C un point de Γ tel que $AC = 7,1$ cm. Soit D le point de Γ diamétralement opposé à C .

- 1) Tracer une figure en vraie grandeur, avec précision. On laissera apparents les traits de construction.
- 2) Le quadrilatère $ACBD$ est-il un parallélogramme ? Un losange ? Un rectangle ? Un carré ? Justifier chaque réponse.
- 3) Calculer l'aire de $ACBD$ à $0,1 \text{ mm}^2$ près par défaut.

EXERCICE 2

L'art de compter sur les doigts : multiplication de deux nombres compris entre 6 et 10.

En regardant simultanément les paumes des mains et en plaçant les doigts de même nom en vis à vis, on les numérote de 6 à 10 en partant du petit doigt.



Les extrémités des doigts se touchant presque, on place en contact les deux doigts correspondant aux nombres à multiplier.

- Les doigts libres en « haut », en les multipliant, donnent les unités du résultat.
- Le nombre de doigts en « bas », y compris ceux en contact, donne les dizaines du résultat.

1) Vérifier que cette méthode s'applique aux calculs $7 \times 7 = 49$ et $8 \times 7 = 56$.
La réponse devra inclure un dessin ou un schéma.

2) Que se passe-t-il pour 6×7 ? Comment adapter la méthode pour obtenir le résultat dans ce cas particulier ? Déterminer tous les cas qui entrent dans cette catégorie. On justifiera la réponse.

3) En nommant x et y les deux nombres à multiplier, justifier la méthode.

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS) ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES
--

Un enseignant de cycle 3 (CE2) a proposé le problème suivant à ses élèves :

<i>« Le papa d'Henri collectionne les vieux véhicules (motos et voitures). Il en possède 9. Lorsque son fils compte les roues, il en trouve 30. Combien y a-t-il de voitures et de motos ? »</i>
--

- 1) Énoncer deux des principales compétences mathématiques, autres que numériques, que ce problème permet de travailler.
- 2) L'annexe 1 présente les travaux de cinq élèves (A, B, C, D, E) de cette classe. Analyser les procédures employées par les élèves A, B et C.
- 3) Pour chacun des cinq élèves, repérer et caractériser les erreurs et les réussites éventuelles.

SECOND VOLET (8 POINTS)

Les deux documents en annexe 2 et 3 sont les pages 14 et 15 du manuel « Le nouveau Math-Elem », CE2, collection BELIN.

I FICHE 8

1) Sur la fiche 8, citer deux compétences mathématiques, autres que celles liées à l'algorithme de l'addition, nécessaires pour réussir les activités qui y sont présentées.

A propos de l'exercice 1 : Collection de timbres.

2) A votre avis, pourquoi les nombres 40 et 100, ajoutés à la question b), sont-ils « peu compliqués » ?

3) A la question c), le maître souhaite que les élèves ne posent pas l'addition. Comment un élève de CE2 peut-il justifier que le nombre total de timbres dépassera 1000 ?

A propos de l'exercice 2 : Terminus.

4) Le problème posé aux enfants est illustré par un schéma. Donner un argument en faveur de sa présence et un pour son absence.

A propos de l'exercice 3 : Complète.

5) Donner deux variables didactiques et leurs effets.

II FICHE 9

1) Différencier les notions de somme et d'addition.

A propos de l'exercice 2 : Problèmes.

2) Analyser cette suite de petits problèmes du point de vue de la tâche de l'élève et des difficultés internes à chaque problème.

3) En liaison avec la maîtrise de la langue, proposer une piste de travail pour des élèves qui n'auraient pas su calculer le nombre d'escargots trouvés par Jacques et Eric.

III QUESTIONS D'ORDRE GENERAL

Ces deux fiches présentent chacune un encadré sur le sens de l'addition, commençant par « l'addition sert à... ».

- 1) Proposer une autre utilisation de l'addition et l'illustrer par un exemple d'énoncé de problème.
- 2) Comment peut-on justifier le contenu de ces deux fiches en référence aux compétences mathématiques de fin de cycle 2 ? On pourra s'appuyer sur les programmes de 1995 ou de 2002.

Annexe 1 (page 1/2)

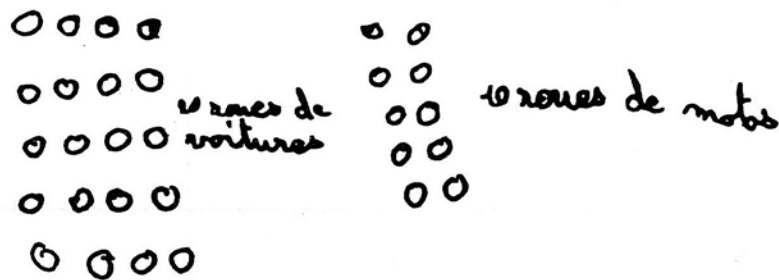
Elève A



6 voitures et 3 motos

Elève B

J'ai trouvé 5 motos et 5 voitures



$$\begin{array}{r} 20 \\ + 10 \\ \hline 30 \end{array}$$

Elève C

$\begin{array}{r} 9 \\ \times 2 \\ \hline 18 \end{array}$ il y a 18 motos parce que $9 \times 2 = 18$ et aussi parce que une moto a 2 roues

et 3 voitures parce que dans une voiture il y a 4 roues alors $4 \times 3 = 12$ et $12 + 18 = 30$

Annexe 1 (page 2/2)

Elève D

$$\begin{array}{r} 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{r} 9 \\ 18 \end{array} = 18$$

Il y a 6 voitures et 3 motos

$$\begin{array}{r} 1 \\ 4 \end{array} \begin{array}{r} 8 \\ 16 \end{array} = 20$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 8 \end{array} \begin{array}{r} 7 \\ 14 \end{array} = 24$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 102 \end{array} \begin{array}{r} 6 \\ 12 \end{array} = 24$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 16 \end{array} \begin{array}{r} 5 \\ 10 \end{array} = 36$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ 20 \end{array} \begin{array}{r} 4 \\ 8 \end{array} = 28$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 24 \end{array} \begin{array}{r} 3 \\ 6 \end{array} = 30$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 9 \end{array} \begin{array}{r} 1 \\ 0 \end{array}$$

Elève E

$$30 - 4 = 26$$

$$26 - 4 = 22$$

$$22 - 4 = 16$$

$$16 - 2 = 14$$

$$14 - 2 = 12$$

$$12 - 4 = 8$$

$$8 - 2 = 6$$

$$6 - 2 = 4$$

$$4 - 4 = 0$$

VOITURES
|||||

MOTOS
|||

Le papa d'Henry
a 5 voitures et 4 motos

Annexe 2

Fiche
8

Ajouter

1 Collections de timbres

a. Victor a 312 timbres. Thomas en a 328 et Ninon 256.

Qui a le plus de timbres ? _____ • Qui en a le moins ? _____

b. L'oncle de Victor lui donne 40 timbres et Ninon en achète 100.

Qui a maintenant le plus de timbres ? _____ • Qui en a le moins ? _____

c. À eux trois ont-ils plus de 1 000 timbres ? _____

Pourquoi ? _____

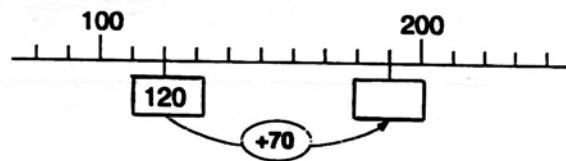
2 Terminus !

Un autocar a déjà parcouru 120 km depuis ce matin.

Pour arriver au terminus, il lui reste 70 km à faire.

Combien de kilomètres aura-t-il parcouru ce jour-là ?

Avant de répondre, complète le schéma.



En tout, l'autocar
aura parcouru _____ km
dans la journée.

Sens de l'addition

L'addition sert à trouver le résultat d'un ajout (on a ajouté),
d'un gain (on a gagné), d'une augmentation (on a augmenté).

3 Complète.

$$97 + 100 \rightarrow \square$$

$$\square + 50 \rightarrow 750$$

$$400 + \square \rightarrow 900$$

$$325 + 25 \rightarrow \square$$

$$135 + 40 \rightarrow \square$$

$$275 + 100 \rightarrow \square$$

4 La cachette des écureuils

Au début de la journée, la cachette des écureuils contenait 31 noisettes.

Hector l'écureuil en apporte 240.

Dans l'après-midi, Hectorine, sa compagne, en apporte autant que lui.

À la fin de la journée, la cachette contient _____ noisettes.



Annexe 3

Fiche
9

Réunir

CALCUL MENTAL
• Trouver deux nombres dont la somme est 10.
• Tables d'addition de 2 et de 3.

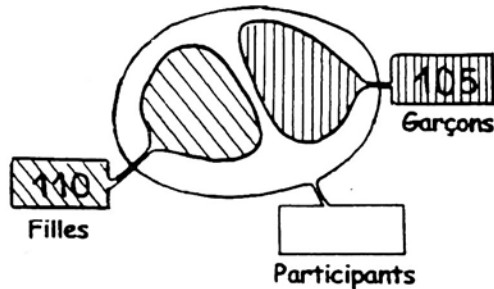
1

Problème

110 filles et 105 garçons
participent à un cross.

Combien y a-t-il
de participants en tout ?

Complète le schéma
puis les phrases.



- Il y a _____ participants.
- _____ est la somme de 110 et de _____

À quoi sert l'addition ?

L'addition sert à trouver le **nombre total** d'éléments de **deux** (trois, quatre...) **collections** que l'on **réunit**.

2

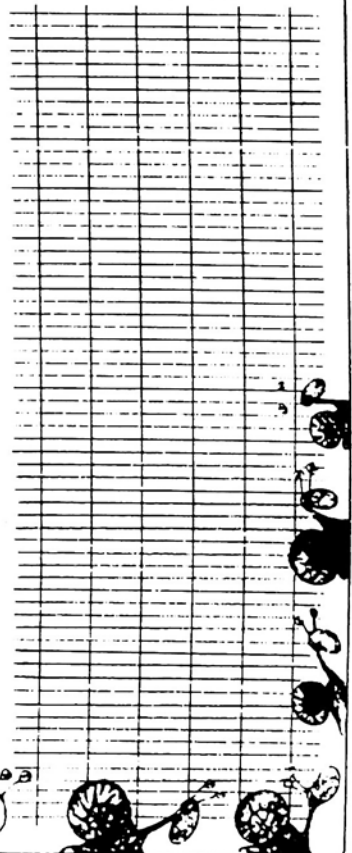
Problèmes

a. Un parking contient 250 places au rez-de-chaussée,
300 places au premier sous-sol et 150 au deuxième sous-sol.
Combien de voitures peuvent se garer sur ce parking ?

b. Trois colliers sont formés chacun de 42 perles de couleurs.
Avec ces 3 colliers, Amélie en fait un très grand.
Combien de perles ce nouveau collier aura-t-il ?

c. Éric, Jacques et Pierre sont allés ramasser des escargots.
Pierre a trouvé 42 escargots.
Jacques en a trouvé deux fois plus que Pierre.
Éric en a trouvé deux fois moins que Pierre.
Combien d'escargots rapportent-ils à eux trois ?

d. Jules envoie trois enveloppes par la poste.
La première pèse 50 grammes et la deuxième 75 grammes.
La troisième est aussi lourde que les deux autres réunies.
Quel est le poids total des trois enveloppes ?



LILLE

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS) MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE 1

Les données de cet exercice sont issues de la « Note d'Information » du Ministère de l'Éducation Nationale (Direction de la programmation et du développement) de mars 2003.

Les évaluations en lecture dans le cadre de la Journée
d'Appel de Préparation à la Défense (JAPD)
Année 2001-2002

Pourcentage de lecteurs en grave difficulté selon le niveau de scolarité (en %)					
	Niveaux de scolarité				Ensemble
	1 Etudes n'ayant pas dépassé le collège	2 Etudes de niveau CAP ou BEP	3 Etudes professionnelles et techniques supérieures au BEP*	4 Etudes générales à partir du lycée	
Garçons	27,6	12,9	3,6	1,6	8,0
Filles	20,1	8,4	2,8	1,2	3,9
Garçons et filles	25,3	11,1	3,2	1,4	6,0

Répartition de l'ensemble par niveau	6,7	29,1	11,7	52,5	100,0
---	-----	------	------	------	-------

Lecture

- 27,6% des garçons de niveau scolaire 1 sont en grave difficulté de lecture. Ce taux est de 8% sur l'ensemble des garçons dont les résultats à la JAPD 2001-2002 sont connus.
- 6,7% de l'ensemble de la population présente à la JAPD n'ont pas dépassé le collège.

* Pour avoir une définition complète du niveau 3 de scolarité, il faut ajouter « et allant jusqu'au bac professionnel ou au brevet de technicien ».

- 1) Peut-on parler de situation de proportionnalité entre garçons et filles pour décrire la situation des lecteurs en grave difficulté ? Si oui, pourquoi ? Si non, pourquoi ?
- 2) a) Le nombre de jeunes participant à la JAPD est de 522 148. Calculer le nombre de jeunes qui ont une scolarité de niveau 1 ; puis, parmi cette population dont la scolarité est de niveau 1, calculer le nombre de jeunes (garçons et filles confondus) en grave difficulté. Faire de même pour les niveaux 2, 3 et 4.
b) Calculer le pourcentage de jeunes (garçons et filles confondus) en grave difficulté par rapport à la population totale, pour chaque niveau de scolarité.
- 3) En appelant x le nombre de garçons de niveau 1 et y le nombre de filles de niveau 1, donner deux relations qui lient x et y . Calculer ensuite les valeurs de x et y .

EXERCICE 2

Toutes les constructions demandées dans cet exercice seront réalisées sur la feuille blanche anonymée. Il sera attribué une note à la figure définitive.

Construire un carré ABCD de côté 8 cm et de centre I.

On appelle E, F, G et H les symétriques de I par rapport respectivement aux côtés [AB], [BC], [CD] et [DA] du carré.

- 1) Quelle est la nature du quadrilatère AEHI ?
- 2) Quelle est la nature du quadrilatère EFGH ?
- 3) Montrer que les points E, B et F sont alignés.
- 4) On appelle M, N, O et P les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA] du carré.
 - a) Soit Q le point d'intersection des segments [EP] et [AB].
Montrer que $AQ = \frac{1}{4}AB$.
 - b) Quelle est la nature du quadrilatère ENGP ?
 - c) Comparer les aires des quadrilatères ABCD et ENGP.
- 5) Soit R le point d'intersection des segments [AB] et [EN]. Soient S et T les points d'intersection du segment [CD] avec respectivement les segments [GN] et [GP].
Calculer l'aire du polygone QRNSTP.

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES

Cet exercice (reproduit à une échelle moindre) a été proposé aux élèves de CE2 dans le cadre des Evaluations Nationales à l'entrée au CE2 de septembre 2003.

*Un enfant compte son argent de poche. Il a 2 billets de 10 €, 4 pièces de 2 € et 7 pièces de 1 €.
Il veut échanger tout cet argent contre des billets de 5 €.
Combien de billets de 5 € lui donnera-t-on en échange de tout cet argent ?*

Tu peux utiliser ce cadre pour faire tes recherches.

Il peut obtenir.....billets de 5 €.

Les productions de 4 élèves vous sont proposées en annexes 1 et 2.

Pour chacune de ces productions :

- 1) Décrire la stratégie mise en œuvre par l'élève et préciser sa validité.
- 2) Se prononcer sur la validité de la production écrite et de la réponse.
- 3) Emettre des hypothèses quant à la (les) cause(s) possible(s) d'erreur(s).
- 4) Vous êtes dans la situation de rencontrer individuellement les parents de ces quatre élèves. Quel serait le message essentiel à leur communiquer à propos du travail de leur enfant pour cet exercice ?

Organiser les réponses sous forme d'un tableau est vivement conseillé.

Exemple d'une présentation possible :

<i>Prénoms</i>	<i>Description de la stratégie et validité.</i>	<i>Validité de la production écrite et de la réponse</i>	<i>Cause(s) d'erreurs(s) possibles(s)</i>	<i>Message aux parents</i>
<i>Clémence</i>				
<i>Brandon</i>				
<i>Malika</i>				
<i>Ludovic</i>				

SECOND VOLET (8 POINTS)

Cette partie est consacrée à l'étude d'une séquence de mathématiques qui se déroule sur plusieurs séances au cycle 3. Voici la préparation du maître :

RECHERCHE I

1. Recherche individuelle

Consigne donnée à l'élève :

Compléter chaque case de la grille ci-dessous pour obtenir un carré magique.

Définition d'un carré magique :

Un carré magique 3 x 3 est rempli avec les nombres de 1 à 9 utilisés une seule fois de telle manière que la somme des 3 nombres écrits sur chacune des trois lignes, des trois colonnes et des deux diagonales soit chaque fois la même.

Remarque : cette somme est égale à 15.

2. Phase collective

Relancer l'activité en écrivant au tableau deux solutions trouvées par les élèves. Par exemple :

8	1	6
3	5	7
4	9	2

4	3	8
9	5	1
2	7	6

Demander aux élèves de vérifier qu'il s'agit de carrés magiques, de comparer ces 2 carrés magiques et de mettre en évidence la place centrale du nombre 5.

Leur poser ensuite les questions suivantes :

- Quel doit être le résultat de l'addition des deux autres nombres dans chaque ligne, colonne ou diagonale, incluant le nombre 5 ?
- Quelles sont les possibilités pour trouver ce résultat en additionnant deux nombres ?

3. Phase individuelle

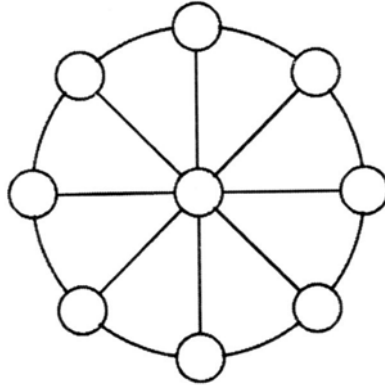
Consigne donnée à l'élève :

Rechercher d'autres carrés magiques 3 x 3.

Proposer aux élèves l'une des 2 recherches suivantes selon leur réussite à la RECHERCHE I.

RECHERCHE A

Compléter la roue ci-dessous avec tous les nombres de 1 à 9, utilisés une seule fois, de manière à obtenir la même somme sur chaque diamètre :



RECHERCHE B

Compléter le carré magique ci-dessous avec les nombres de 1 à 16, utilisés une seule fois :

1		14	
		7	
8	10		
13			16

Les candidats ont à répondre aux questions ci-dessous :

QUESTIONS concernant l'ensemble de la séquence

- 1) Quelle est la notion mathématique travaillée dans cette séquence ?
- 2) Citez trois compétences plus particulièrement mises en jeu dans ces recherches. Justifiez vos réponses.
- 3) A propos de cette séquence, développez un argument qui plaiderait en faveur de l'utilisation de la calculatrice et un autre qui s'y opposerait.

QUESTIONS concernant la recherche I proposée aux élèves

4) Dans le carré magique 3×3 , justifiez le fait que la somme des nombres de chaque ligne soit toujours égale à 15 et que la somme des nombres de chaque colonne soit toujours égale à 15.

5) En quoi la situation de recherche est-elle modifiée si on indique seulement que la somme des nombres écrits sur chacune des 3 lignes, des 3 colonnes et des 2 diagonales doit être la même, sans faire mention du nombre 15.

6) Justifiez la recherche individuelle initiale.

7) Analysez la phase collective :

- Quelles sont les intentions du maître ?
- Qu'est-ce que ce moment apporte dans la séance ?

8) Quel nombre les élèves doivent-ils savoir décomposer pour trouver les autres solutions ? Ecrivez toutes les décompositions attendues pour compléter le carré magique.

En vous aidant de ces décompositions, proposez au moins quatre autres carrés magiques. Quelle(s) transformation(s) géométrique(s) du plan peut-on utiliser pour trouver tous les autres carrés magiques ?

QUESTIONS concernant la recherche A proposée aux élèves

9) Que veut vérifier le maître en proposant de compléter la roue ?

QUESTIONS concernant la recherche B proposée aux élèves

10) Trouvez la solution.

11) Au regard de la démarche que vous avez utilisée, déterminez la (ou les) difficulté(s) supplémentaire(s) que va rencontrer l'élève par rapport à la recherche I. Dans ce cas, quel type d'aide le maître doit-il prévoir ?

Annexe 1

CLEMENCE

Tu peux utiliser ce cadre pour faire tes recherches

$$\begin{array}{r}
 10 \\
 + 10 \\
 + 2 \\
 + 2 \\
 + 2 \\
 + 1 \\
 + 1 \\
 + 1 \\
 + 1 \\
 + 1 \\
 + 1 \\
 + 1 \\
 \hline
 = 33
 \end{array}$$

$$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 3$$

Il peut obtenir 6..... billets de 5 €.

BRANDON

Tu peux utiliser ce cadre pour faire tes recherches

$$\begin{aligned}
 27 \quad 2717 &= 5 \\
 27 \quad 2717 &= 5 \\
 17 \quad 17171717 &= 5 \\
 107 &= 2 \text{ billet de } 57 \\
 107 &= 2 \text{ billet de } 57
 \end{aligned}$$

Il peut obtenir 5..... billets de 5 €.

Annexe 2

MALIKA

Tu peux utiliser ce cadre pour faire les recherches

①

$$\begin{array}{r} 20 \\ + 2 \\ + 2 \\ + 2 \\ + 2 \\ + 7 \\ \hline = 35 \end{array}$$

②

$$\begin{array}{r} 5 \\ + 5 \\ + 5 \\ + 5 \\ + 5 \\ + 5 \\ + 5 \\ \hline = 35 \end{array}$$

Il peut obtenir 7..... billets de 5 €.

LUDOVIC

Tu peux utiliser ce cadre pour faire tes recherches

10	2	1
10	2	1
	3	1
	2	1
	1	1
		1
		1

Il peut obtenir 35 billets de 5 €.

LYON

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS) MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE 1

Toto additionne deux nombres entiers avec la méthode habituelle, et trouve 499 sans faire d'erreur. Combien de retenues a-t-il effectuées ?

EXERCICE 2

1) Lors du référendum de 2003 en Martinique, un camp a obtenu 1044 voix de plus que l'autre, soit un résultat de 50,48% contre 49,52%.

- a) Calculer, si possible, le nombre de suffrages exprimés.
- b) Calculer, si possible, le nombre d'électeurs inscrits.

2) Dans un bureau de vote de Terre-de-France, il y a eu, en 2003, un tiers de suffrages exprimés de plus que lors de la consultation de 1992. En 1992, il y a eu 450 suffrages exprimés, dont 62% de "Non". Lors du référendum de 2003, les "Non" ne représentaient que 47%. Le nombre de "Non" a-t-il augmenté ou diminué ?

PROBLÈME

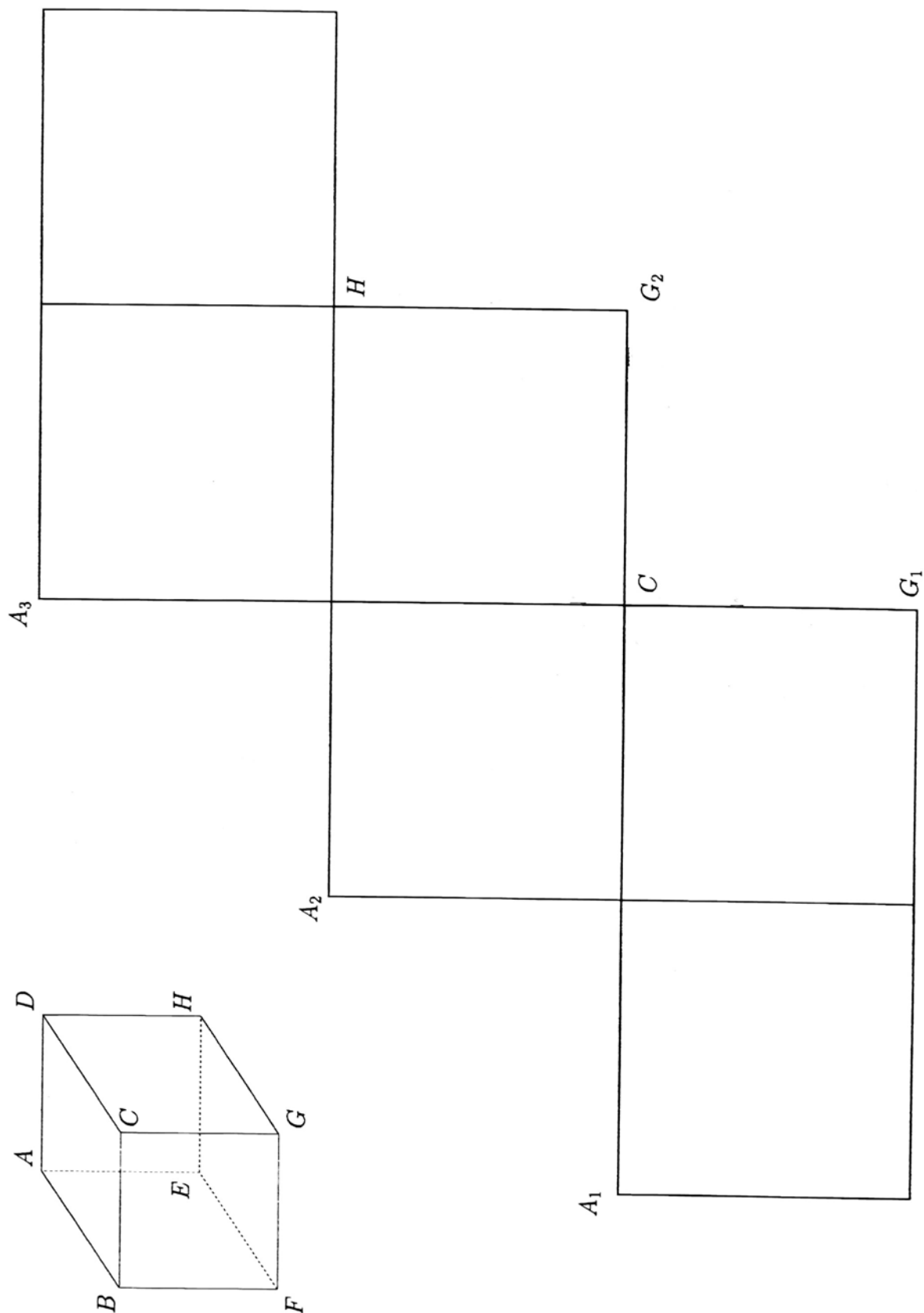
On fixe un cube ABCDEFGH, d'arête 1. Une représentation du cube en perspective et son patron sont donnés sur le document-réponse *que l'on remettra avec la copie*. Par exemple, le sommet A du cube est représenté par les trois points A_1 , A_2 , A_3 du patron.

On appelle "distance" entre deux points M et N de la surface du cube, la longueur du plus court chemin tracé sur la surface du cube et qui relie ces deux points. Pour ne pas confondre la "distance" avec la distance usuelle, on la notera $d(M, N)$.

Par exemple, la "distance" de G à C est 1, car le plus court chemin qui les relie est l'arête [GC]. En revanche, la "distance" de G à A est strictement plus grande que la longueur usuelle de la diagonale [AG] du cube (voir question 4).

1) Compléter le patron en nommant tous les sommets du cube. (On ne demande pas de justifications pour cette question.)

Document-réponse à rendre avec la copie



2) a) Tracer, en rouge sur le patron, l'ensemble des points qui représentent des points de la ligne brisée ACG (réunion des segments [AC] et [CG]).

b) Calculer la longueur l de la ligne brisée ACG.

c) Soit J le point de la ligne brisée ACG qui est à mi-chemin de A et G, c'est-à-dire tel que $d(A, J) = AJ = \frac{l}{2}$.

Décrire, justifier et effectuer une construction du point J sur le patron.

3) Décrire et représenter sur le patron l'ensemble des points M de la surface du cube qui sont à la même "distance" de G que C, c'est-à-dire tels que : $d(G, M) = d(G, C)$.

4) a) Parmi les chemins qui relient les sommets A et G, et qui sont totalement contenus dans les faces ABCD et CDHG, on considère le plus court. Le tracer en bleu sur le patron, puis sur le cube en perspective, en justifiant chaque étape de la construction.

b) Quelle est la longueur de ce chemin ?

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS) ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES
--

Les annexes 1, 2, 3 et 4 présentent un problème résolu par des élèves de Cours Moyen (CM1 et CM2).

1) Quelle est la principale notion mathématique abordée dans ce problème ?

2) Analyser les productions de chaque élève :

- a) procédures mises en oeuvre (description, raisonnement utilisé, pertinence) ;
- b) réponses aux questions posées.

3) Pour chaque question du problème, proposer une procédure autre que celles que l'on a repérées à la question 2. Ces trois procédures devront être de types différents.

SECOND VOLET (8 POINTS)

Les documents proposés sont extraits des ouvrages suivants :

- *Mille maths CP* (Editions Nathan) :
 - annexe 5 : guide de l'enseignant ;
 - annexe 6 : fichier de l'élève ;
- *Cap maths CP* (Editions Hatier) :
 - annexe 7 : guide de l'enseignant ;
 - annexe 8 : ziglotrons et bons de commande.

L'objectif commun aux activités proposées dans les deux ouvrages est de faire comprendre aux élèves le rôle de la position de chaque chiffre dans l'écriture d'un nombre.

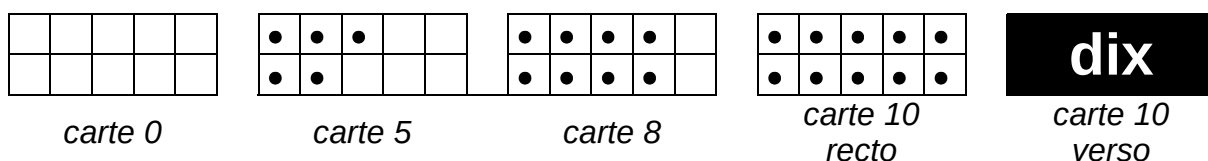
I Analyse de la séquence extraite de *Mille maths CP*

Deux séries d'activités sont proposées pour travailler sur la notion de dizaine :

- série 1 : Les nombres de 0 à 30 (annexe 5 : extrait du guide de l'enseignant) ; les activités proposées dans l'extrait sont suivies d'exercices sur fichier, non fournis ici ;
- série 2 : Utiliser la dizaine (annexe 6 : extrait du fichier de l'élève).

Le matériel "cartes à points" utilisé dans la première série d'activités est composé de dix cartes présentant les nombres de 0 à 9 et de plusieurs "cartes 10" présentant au recto la carte 10 (avec les points) et au verso l'indication "dix".

Exemples de cartes :



Le matériel "bande numérique" est illustré par cet extrait d'une bande qui va de 1 à 30 :

18	19	20	21	22
dix-huit	dix-neuf	vingt	vingt-et-un	vingt-deux
dix • • • • • • • •	dix • • • • • • • •	dix dix	dix dix • • • • • • • •	dix dix • • • • • • • •

Questions :

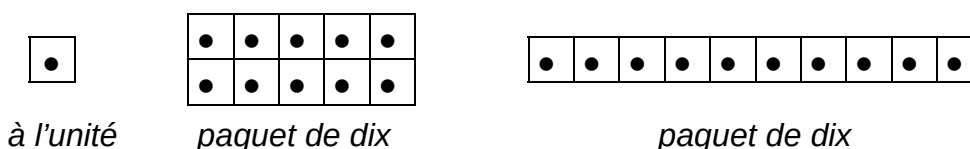
- 1) Dans l'activité "Décomposer en utilisant 10" de l'annexe 5, les auteurs souhaitent que les élèves ne comptent pas les points un à un, mais comptent d'abord les "dix".
 - a) Quelles compétences les élèves doivent-ils maîtriser pour utiliser la procédure souhaitée ?
 - b) Quelle contrainte supplémentaire pourrait être utilisée pour inciter les élèves à recourir à cette procédure ?
 - c) Le deuxième exercice de cette activité, "Ecrire un nombre en chiffres au tableau...", est-il pertinent pour faire prendre conscience aux élèves de l'intérêt qu'il y a à utiliser "dix" ? Justifier la réponse.
- 2) Dans l'activité "Dénombrer des collections" (annexe 5), les auteurs évoquent les difficultés que rencontrent des élèves pour dénombrer correctement des collections importantes. Citez trois difficultés que peuvent rencontrer des élèves de CP pour trouver le nombre d'objets. (Les difficultés liées à la production de l'écriture en chiffres ne sont pas demandées.)
- 3) Les questions qui suivent portent sur l'annexe 6.
 - a) L'objectif annoncé en haut et à droite de la fiche est formulé ainsi : "Compter des objets en les groupant par dix." Les exercices proposés correspondent-ils à cet objectif ?
 - b) Décrire trois procédures que les élèves peuvent utiliser pour répondre à l'exercice A, en précisant les connaissances sollicitées.
 - c) Des élèves peuvent réussir totalement ou partiellement l'exercice B sans mettre en oeuvre les connaissances attendues. Expliquer comment ils peuvent s'y prendre.

II Analyse de la séquence extraite de *Cap maths CP*

Dans les trois séances décrites en annexe 7, les élèves doivent commander au marchand juste ce qu'il faut de boutons pour réparer le grand ziglotron, c'est-à-dire pour pouvoir placer un bouton sur chaque carré blanc. Trois exemples de ziglotrons sont fournis en annexe 8.

Pour répondre à la question posée, ils peuvent commander des boutons "à l'unité" ou par paquets de dix.

Exemples :



Le déroulement de chaque séance, décrit dans le guide de l'enseignant, est le suivant :

- *Première phase : Présentation du problème (voir descriptions en annexe 7) ;*
- *Deuxième phase : Résolution par équipes de deux élèves (séances 1 et 2) ou individuellement (séance 3) ;*

- *Troisième phase : Mise en commun et reprise éventuelle de l'activité avec d'autres ziglotrons.*

Des exercices d'entraînement oraux et écrits, non fournis ici, sont proposés à l'issue de la séance 3.

Questions :

4) Décrire deux stratégies que les élèves acheteurs peuvent utiliser pour réussir leur commande dans la séance 1. Préciser les connaissances mises en œuvre pour chacune de ces stratégies. On rappelle que, dans la séance 1, les bons de commande ne sont pas utilisés.

5) Dans la séance 2, préciser l'intérêt :

- a) de chacune des trois premières contraintes par rapport à l'apprentissage visé ;
- b) de la quatrième contrainte.

6) Dans la séance 3 :

- a) Pourquoi les auteurs proposent-ils que seul l'enseignant soit en possession du ziglotron ?
- b) Donner trois procédures que les élèves peuvent utiliser pour répondre à la question posée.
- c) La réussite d'un élève garantit-elle que l'apprentissage visé est effectif pour cet élève ?

III Synthèse

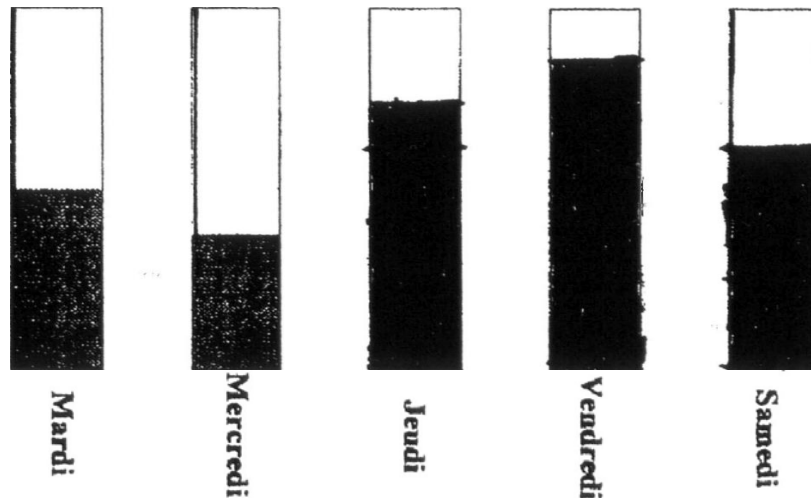
7) Faire une analyse comparative des dispositifs proposés dans *Mille maths* et dans *Cap maths*, par rapport aux deux points suivants :

- a) l'apprentissage visé ;
- b) les modalités utilisées pour provoquer cet apprentissage.

Annexe 1

Yann C.M.2

Un libraire représente par un graphique ses ventes de livres pour chaque jour de la semaine.



Le mardi, il a vendu 60 livres.

Le mercredi, il en a vendu 45.

Le jeudi, il en a vendu 90.

Le vendredi, il en a vendu 105.

Enfin, le samedi, il n'en a vendu que 75.

Complète le graphique pour représenter les ventes du jeudi et explique ta méthode :

J'ai vu que le mardi il avait vendu 60 livres soit 30 livres de moins que le jeudi. Entre le mardi et le mercredi il y a 15 livres d'écart et $15 \times 2 = 30$ donc je prends deux fois l'écart entre le mardi et le mercredi en partant du mardi.

Complète le graphique pour représenter les ventes du vendredi et explique ta méthode :

J'ai vu que le mardi il avait vendu 60 livres soit 45 de moins que le vendredi. Entre le mardi et le mercredi il y a 15 livres d'écart et $15 \times 3 = 45$ donc je prend trois fois l'écart entre le mardi et le mercredi en partant du mardi.

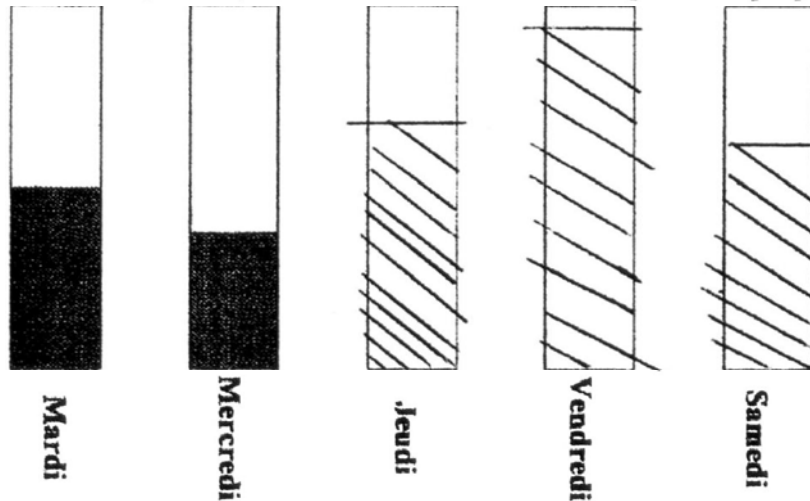
Complète le graphique pour représenter les ventes du samedi et explique ta méthode :

J'ai vu que le mardi il avait vendu 60 livres soit 15 livres de moins que le samedi. Entre le mardi et le mercredi il y a 15 livres donc je prend l'écart entre le mardi et le mercredi en partant du mardi.

Annexe 2

Alexis CM1

Un libraire représente par un graphique ses ventes de livres pour chaque jour de la semaine.



Le mardi, il a vendu 60 livres.

Le mercredi, il en a vendu 45.

Le jeudi, il en a vendu 90.

Le vendredi, il en a vendu 105.

Enfin, le samedi, il n'en a vendu que 75.

Complète le graphique pour représenter les ventes du **jeudi** et explique ta méthode :

J'ai regardé le mardi comme il y en avait 60, au jeudi j'ai mis un peu plus haut. j'ai ajouté 3 dizaines.

Complète le graphique pour représenter les ventes du **vendredi** et explique ta méthode :

J'ai regardé ~~jeudi~~ le jeudi comme il y en avait 90, au vendredi j'ai mis ~~un~~ plus haut. J'ai ~~ajouté~~ 1 dizaine et 5 unités.

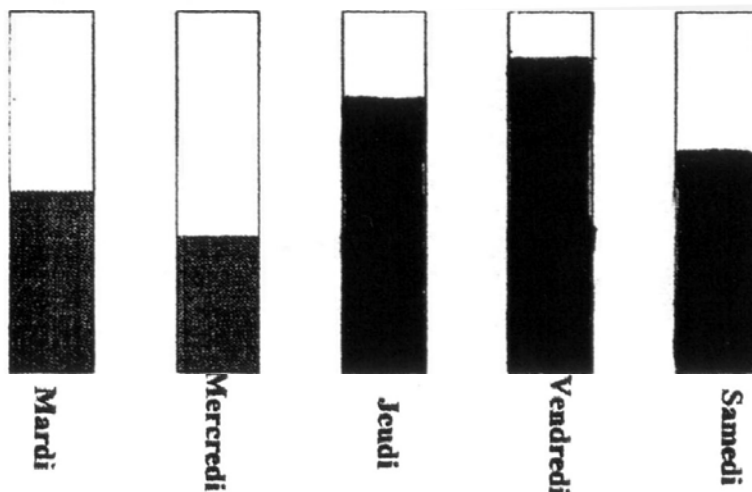
Complète le graphique pour représenter les ventes du **samedi** et explique ta méthode :

J'ai regardé le vendredi comme il y en avait 105, au samedi j'ai mis plus bas. J'ai enlevé 3 dizaines.

Annexe 3

Héloïse C17 1-2.

Un libraire représente par un graphique ses ventes de livres pour chaque jour de la semaine.



Le mardi, il a vendu 60 livres.

Le mercredi, il en a vendu 45.

Le jeudi, il en a vendu 90.

Le vendredi, il en a vendu 105.

Enfin, le samedi, il n'en a vendu que 75.

Complète le graphique pour représenter les ventes du jeudi et explique ta méthode :

On sait que le maximum de livre qu'il peut vendre est 120 livres.

La moitié de 120 est 60, la moitié de 60 est 30, et $30 + 90 = 120$.

Après, sur le Mardi on prend la moitié non coloriée et on coupe la moitié en deux, on reporte sur Jeudi et voilà.

Complète le graphique pour représenter les ventes du vendredi et explique ta méthode :

On sait que $105 + 15 = 120$. $15 + 15 = 30$. On prend la partie non coloriée de Jeudi et on la coupe en deux et on reporte sur Vendredi.

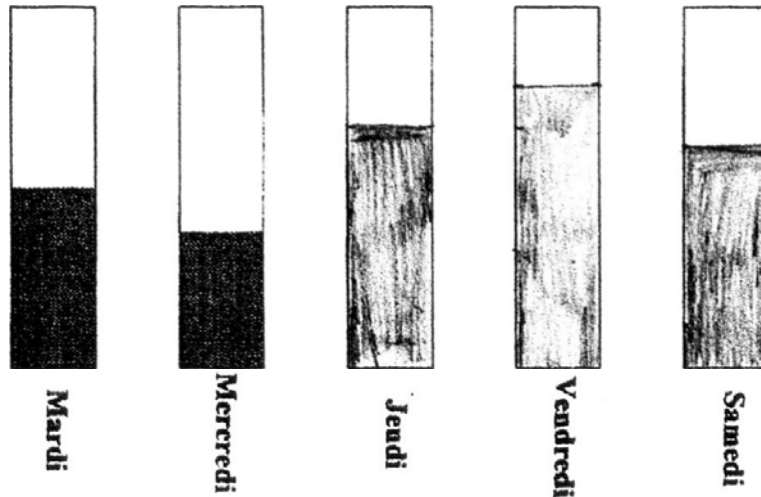
Complète le graphique pour représenter les ventes du samedi et explique ta méthode :

On sait que $75 + 45 = 120$. On prend sur Mercredi et on reporte sur Samedi, puis on y fait à l'envers.

Annexe 4

Benoît : CM2

Un libraire représente par un graphique ses ventes de livres pour chaque jour de la semaine.



Le mardi, il a vendu 60 livres.

Le mercredi, il en a vendu 45.

Le jeudi, il en a vendu 90.

Le vendredi, il en a vendu 105.

Enfin, le samedi, il n'en a vendu que 75.

Complète le graphique pour représenter les ventes du jeudi et explique ta méthode :

J'ai mesuré la moitié de Mardi (ce qui faisait 1,2 cm) puis j'ai additionné la moitié + plus la moitié.

Complète le graphique pour représenter les ventes du vendredi et explique ta méthode :

J'ai calculé le quart du Mardi (0,6 cm) puis je l'ai additionné avec le jeudi.

Complète le graphique pour représenter les ventes du samedi et explique ta méthode :

J'ai additionné le mardi plus son quart

Annexe 5

1. LES NOMBRES DE 0 À 30

PROGRAMME

Le nombre

Dénombrement des éléments d'une collection, codage dans le système décimal. Connaissance des nombres entiers et de leurs désignations écrites (chiffres ou lettres) et parlée : numération décimale, comparaison et rangement (puis utilisation des signes =, < et >).

OBJECTIFS

1. Dénombrer des collections en utilisant des groupements de dix.
2. Utiliser les écritures additives avec 10.
3. Associer l'écriture en chiffres et l'écriture en lettres d'un nombre.
4. Comparer deux nombres.

OBJECTIF DE DEVELOPPEMENT

Comprendre et utiliser les premiers nombres ordinaux : premier, deuxième...

MATÉRIEL

- Les cartes à points individuelles et collectives.
- Divers objets (cubes, jetons... ; prévoir une trentaine d'objets par groupe de deux ou trois élèves).
- Les bandes numériques individuelles (à prolonger jusqu'à 30 : voir p. 312) et un jeton pour chaque élève.
- Le fichier de l'élève pages 74 et 75.

ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

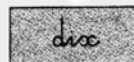
TRAVAIL COLLECTIF

1. Associer écriture littérale et écriture chiffrée d'un nombre

(...)

2. Décomposer en utilisant 10

Les élèves disposent de **leurs cartes à points en carton**. Les faire aligner, de la carte 0 à la carte 10, devant eux. Plusieurs cartes 10 sont disponibles. Les faire mettre sur la face :



Demander de prendre deux cartes 10 et la carte 1 et les faire placer en ligne. Poser la question : « Combien y a-t-il de points en tout sur les trois cartes ? »

Si les élèves comptent les points un à un depuis le début, faire apparaître la possibilité de compter d'abord les « dix » : « dix, vingt », puis de surcompter à partir de « vingt » : « vingt, vingt et un » (utiliser pour cela les propositions des élèves recourant à cette méthode). En déduire les écritures du nombre total de points : 21, $20 + 1$, $10 + 10 + 1$. Refaire ces manipulations pour tous les nombres de 20 jusqu'à 30.

Écrire un nombre en chiffres au tableau (par exemple 24) et demander de reconstituer ce nombre en utilisant deux cartes 10 et une autre carte. Recommencer avec d'autres nombres. L'élève peut avoir recours à sa bande numérique, en prenant la partie des mots : la disposition des cartes y figure.

REMARQUE

Il faut éviter que l'élève compte systématiquement tous les points à partir de « un ». L'inciter à reconnaître directement « dix » et à l'utiliser.

3. Dénombrer des collections

Préparer **des collections de 20 à 30 objets** (jetons, cubes, crayons, objets divers...) et les distribuer aux élèves, répartis en groupes de deux ou trois.

Demander aux élèves de chaque groupe de trouver le nombre d'objets de chaque collection et d'écrire le nombre en chiffres sur une feuille ou sur une ardoise. Les principales difficultés des élèves proviennent de l'impossibilité de dénombrer correctement des collections importantes. Faire apparaître l'intérêt de grouper les objets par 10 et de compter les « paquets » ainsi obtenus. Demander d'écrire les nombres sous différentes formes : avec deux chiffres, avec 10 et 20 ($10 + 10 + 4$; $20 + 4$) et en lettres.

Enfin, faire comparer deux collections obtenues précédemment, en déterminant la plus grande des deux (par exemple, en entourant le nombre de la collection la plus grande).

Annexe 6

3

UTILISER LA DIZAINE

Activité préparatoire
► Compter des objets en les groupant par dix.

Découvre et comprends

A. Les boîtes de chocolats

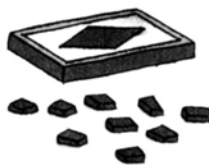
Dans une boîte, il y a 10 chocolats.



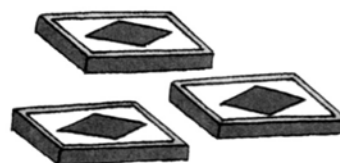
Compte.



Il y a 25 chocolats.



Il y a _____ chocolats.



Il y a _____ chocolats.

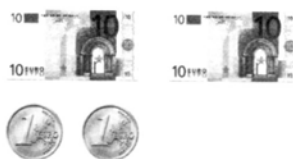
B. Les pièces et les billets

Observe et calcule.



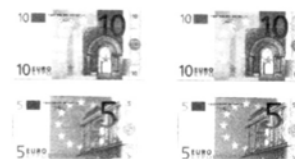
$$\begin{array}{r} 10 + 10 + 5 + 2 \\ \hline 20 + 7 \\ \hline 27 \end{array}$$

Pauline a 27 €.



$$\begin{array}{r} 10 + 10 + \\ \hline + \\ \hline \end{array}$$

David a _____ €.



$$\begin{array}{r} + \\ \hline + \\ \hline \end{array}$$

Léa a _____ €.

As-tu compris ?

Écris le nombre de bonbons.



Il y a _____ bonbons.



Il y a _____ bonbons.

78 soixante-dix-huit

Annexe 7

Réparer le grand ziglotron

L'activité est organisée sur 3 séances. Elle a pour but de commencer à mettre en évidence la signification de chaque chiffre dans l'écriture chiffrée d'un nombre.

Séance 1

● Présentation de la situation

Gribouille a joué avec les nouveaux ziglotrons, plus grands que les premiers (ces derniers ont beaucoup plus de boutons).

— *“ Le marchand de boutons s'est organisé : il a des boutons seuls et des paquets tout prêts qui contiennent dix boutons (les deux catégories de “produit” sont montrées aux élèves). Il suffit de lui demander ce qu'on veut. Mais attention, il donne exactement ce qu'on lui demande. Il faut donc bien préciser si on veut des paquets ou des boutons seuls. ”*

On insiste sur deux choses :

- le fait qu'il y a dix boutons dans chaque paquet ;
- le fait que les marchands doivent donner exactement ce qu'on leur demande : on peut leur demander, par exemple, “douze boutons” ou “quinze paquets” ou encore “huit paquets et onze boutons”.

Les boutons vendus en paquets devront être découpés avant d'être placés sur le ziglotron.

— *“ Dans chaque groupe, un seul élève ira vers le marchand et il ne pourra y aller qu'une seule fois. Il faut ramener juste ce qu'il faut de boutons, ni plus, ni moins. ”*

Séance 2

● Présentation du problème

La même situation est reprise, mais avec quatre contraintes supplémentaires :

- Il faut écrire sur la feuille du ziglotron, le nombre de boutons nécessaires et, en dessous, le nombre de paquets et le nombre de boutons isolés que l'on souhaite ;
- Les marchands ayant été dévalisés, ils ne peuvent pas donner plus de neuf boutons isolés ;
- Les marchands doivent lire la commande écrite pour servir les acheteurs ;
- Il n'y a pas de validation immédiate (les acheteurs devront garder ce qui leur a été donné).

Séance 3

● Présentation du problème

La même situation est évoquée, mais cette fois-ci seul l'enseignant possède le ziglotron (il le montre). Il a déjà compté le nombre de boutons manquants.

Ce nombre est indiqué sur le bon de commande qui figure sur la fiche remise aux élèves. Chaque élève doit maintenant compléter la commande pour qu'on puisse réparer le ziglotron.

● Travail par équipes de deux élèves

● Matériel par équipe d'élèves « acheteurs » :

- un ziglotron comportant soit 23, soit 30, soit 37 boutons
- une feuille blanche
- des ciseaux

● Matériel pour les « vendeurs » :

- une boîte contenant 150 boutons isolés
- une boîte contenant 50 paquets de dix boutons

● Travail par équipes de deux élèves

● Matériel par équipe d'élèves « acheteurs » :

- un ziglotron comportant soit 28, soit 34, soit 45 boutons
- une feuille blanche
- un bon de commande

● Matériel pour les « vendeurs » :

- une boîte contenant 40 boutons isolés
- une boîte contenant 50 paquets de dix boutons

● Travail individuel

● Matériel collectif :

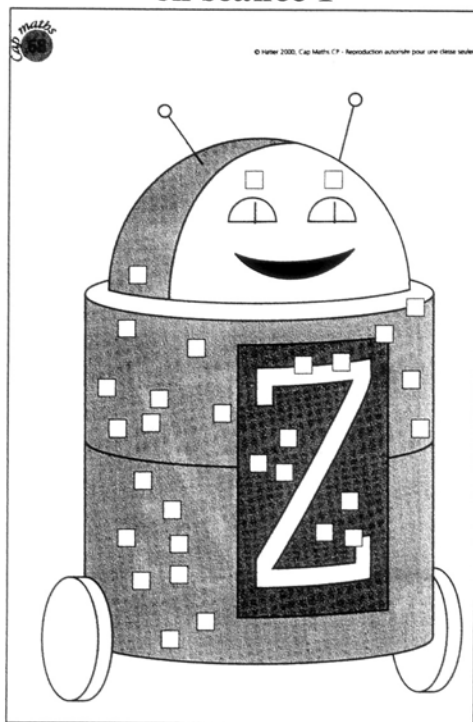
- un ziglotron comportant 42 boutons
- une feuille blanche
- un bon de commande

● Matériel par élève :

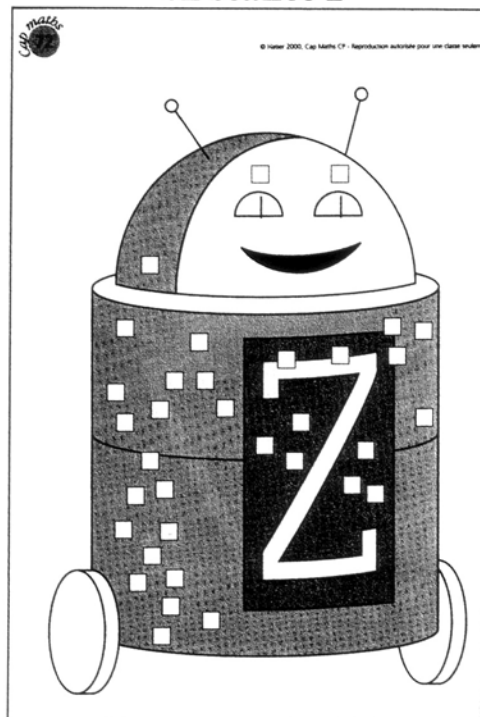
- un bon de commande
- une feuille blanche

Annexe 8

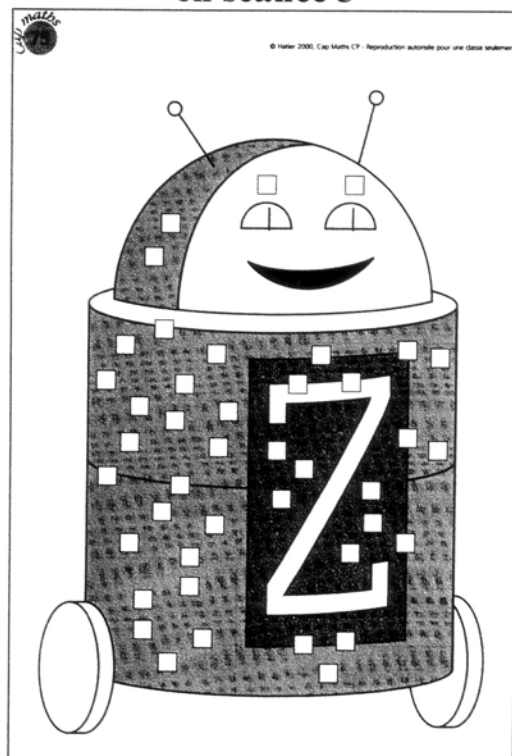
**Exemple de ziglotron utilisé
en séance 1**



**Exemple de ziglotron utilisé
en séance 2**



**Ziglotron utilisé
en séance 3**



**Bon de commande utilisé
en séance 2**

Prénom :

Il faut boutons.

Notre commande :

..... paquets de dix boutons,

..... boutons.

**Bon de commande utilisé
en séance 3**

Prénom :

Il faut 42 boutons.

Notre commande :

..... paquets de dix boutons,

..... boutons.

MARTINIQUE

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS) MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE 1

Les nombres.

Les questions suivantes sont indépendantes.

1) Recopier sur votre copie les égalités vraies.

$$\frac{1}{20} = 0,50 ; \quad \frac{1}{5} = 0,2 ; \quad \frac{1}{3} = 0,333 ; \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6} ; \quad \sqrt{2} = 1,414 ; \quad \pi = 3,14$$

2) Ranger dans l'ordre croissant les décimaux :

1,7 ; 1,07 ; 1,109 ; 1,81.

3) Donner deux décimaux pouvant s'intercaler entre 1,102 et 1,12.

4) Donner en heures, minutes et secondes les durées suivantes exprimées en heures dans le système décimal :

1,5 ; 2,25 ; 0,3 ; 3,375.

5) Calculer et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible :

$$A = \frac{5}{8} + 0,25$$

$$B = \frac{2}{10} + \frac{7}{4} + 0,15$$

PROBLÈME 1

Voici les tarifs de deux terrains de camping d'une même localité :

Camping Beausoleil

Forfait installation : 50 euro

15 euro par personne et par nuit
pour les adultes et les enfants de
plus de 15 ans,

10 euro par personne et par nuit pour
les enfants de moins de 15 ans

Camping Bellevue

20 euro par personne et par nuit
pendant la première semaine

15 euro par personne et par nuit
pendant la deuxième semaine

12 euro par personne et par nuit
pendant le reste du séjour.

Gratuit pour les enfants de moins de 5
ans

1) M. et Mme Lelong et leurs trois enfants (3 ans, 10 ans, 16 ans) souhaitent camper dans cette localité. Ils veulent dépenser le moins d'argent possible. Dites leur où ils doivent aller camper s'ils veulent coucher dix nuits sur le même terrain de camping.

2) M. et Mme Dubois et leurs deux enfants vont séjourner deux semaines dans un camping de cette localité. Indiquer selon l'âge des enfants, le terrain de camping le plus économique pour eux.

PROBLÈME 2

Jean, Pascal et Sandrine versent respectivement 60 000 €, 43 200 € et 46 800 € pour acheter un bateau. Lors de l'achat à l'étranger, le vendeur leur fait une remise de 20% sur le prix initial.

1) Calculer le prix réel payé par chaque associé, si la remise s'applique sur chaque part ?

2) Le coût de gardiennage et d'entretien s'élève à 5 000 € par an ; sachant qu'il est réparti proportionnellement aux parts, calculer la contribution de chacun ?

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS) ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES
--

Dans un exercice de calcul mental de l'évaluation nationale 6^{ème}, on propose les calculs suivants lus oralement :

- soixante moins dix neuf
- trois fois zéro virgule cinq
- un virgule sept plus deux virgule trois
- deux virgule cinq multiplié par quatre

Voici les résultats de trois élèves Alex, Claire et Raoul :

<u>ALEX</u>	<u>CLAIRE</u>	<u>RAOUL</u>
$60 - 19 = 59$	$60 - 19 = 41$	$60 - 19 = 51$
$3 \times 0,5 = 0,15$	$3 \times 0,5 = 1,5$	$3 \times 0,5$ sans réponse
$1,7 + 2,3 = 3,10$	$1,7 + 2,3 = 3,10$	$1,7 + 2,3 = 3$
$2,5 \times 4 = 8,20$	$2,5 \times 4 = 10$	$2,5 \times 4$ sans réponse

1) Quelles sont les compétences nécessaires pour réussir cet exercice ?

2) Analyser les productions des trois élèves et proposer pour chacun d'eux deux aides possibles leur permettant de dépasser leurs difficultés. Vous présenterez vos réponses sous forme de tableau.

SECOND VOLET (8 POINTS)

Un maître se propose de mettre en place des activités de construction de figures planes.

Le projet de séquence est décrit en annexe 1.

Les questions suivantes visent à étudier avec précision les dessins proposés et à conduire une analyse de ce projet de séquence.

1) Niveau concerné

A quel niveau de cycle peut-on proposer cette séquence ? Justifier votre réponse en trois points.

2) Analyse des activités 1, 2 et 3

Pour chaque activité, répertorier deux compétences à mettre en oeuvre pour la réussir. Présenter les réponses sous forme de tableau.

3) Analyse de la séquence

Quelle logique conduit l'enseignant à proposer cette suite d'activités ?

4) Activité 3

- a) Préciser pour cette activité les rôles des 2 instruments de dessin (règle, équerre).
- b) Donner deux difficultés prévisibles pour la construction.
- c) Donner trois difficultés prévisibles pour la rédaction du programme de construction.
- d) L'enseignant veut réaliser un bilan en fin de l'activité 3, donner 3 composantes qui vous paraissent essentielles pour ce bilan.

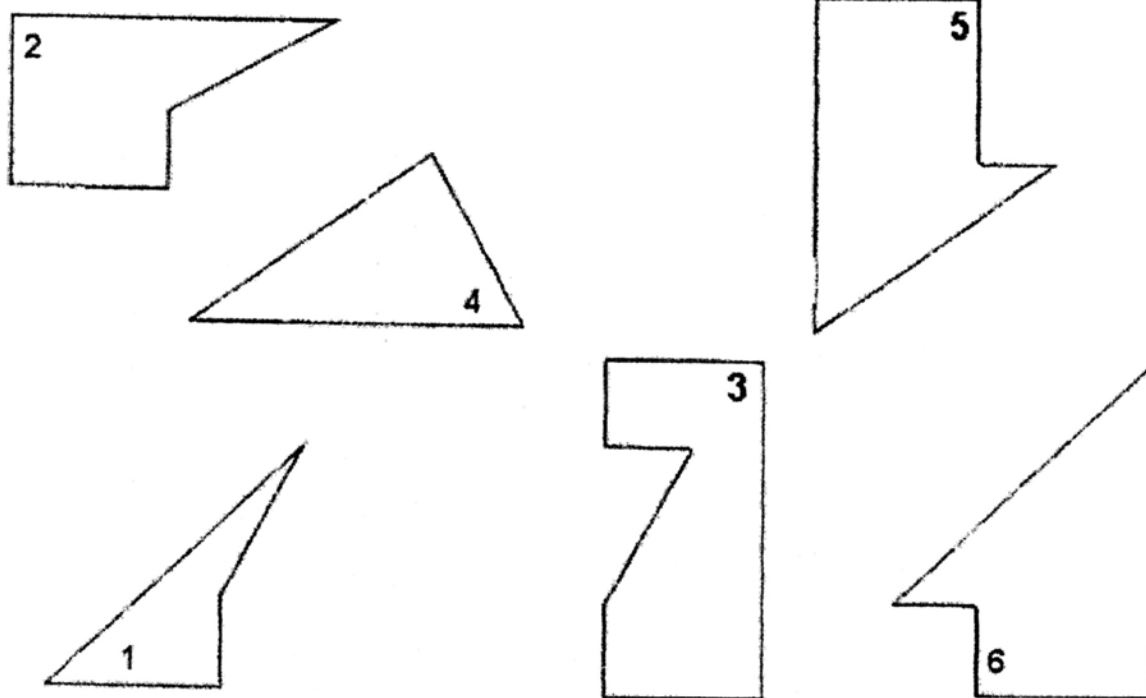
Annexe 1

Projet de séquence de géométrie

Activité 1

Quels polygones faut-il assembler pour obtenir 2 carrés ?

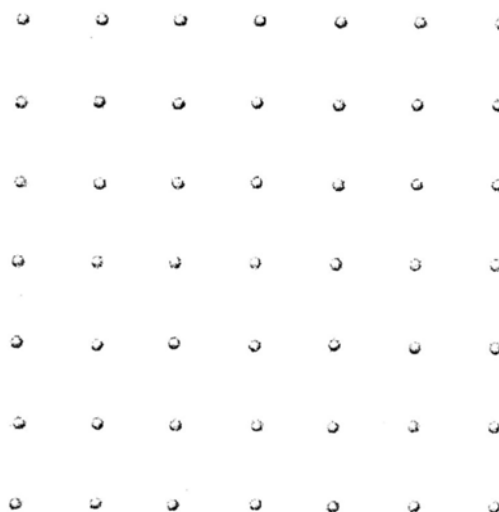
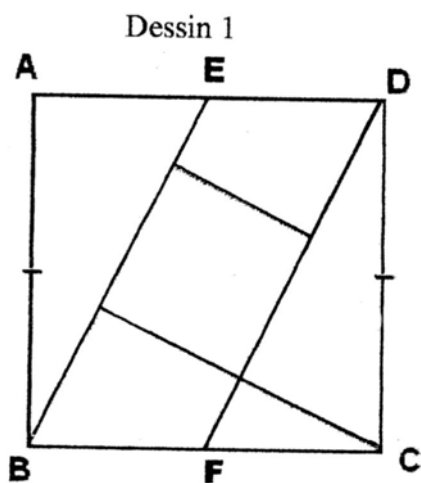
Tu peux utiliser le crayon à papier et le tracé à main levée sur la feuille pour rechercher les solutions à partir des dessins.



Activité 2

Le dessin 1 a été réalisé à partir d'un carré et des milieux de ses côtés.

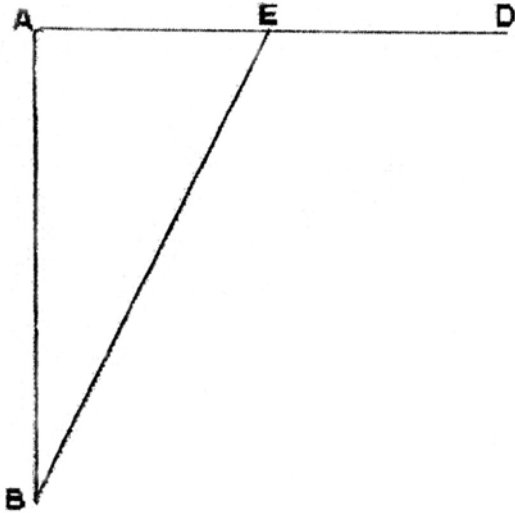
Reproduis le dessin 1, à l'aide de la règle non-graduée, en utilisant uniquement les points du quadrillage (seules les formes seront respectées).



Activité 3

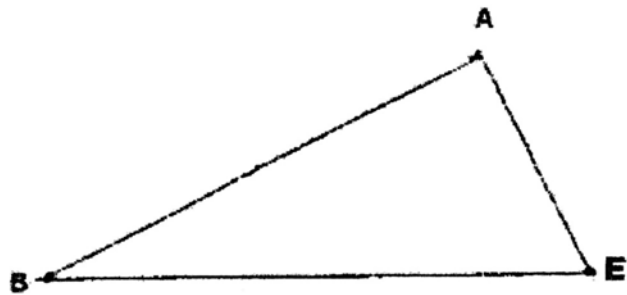
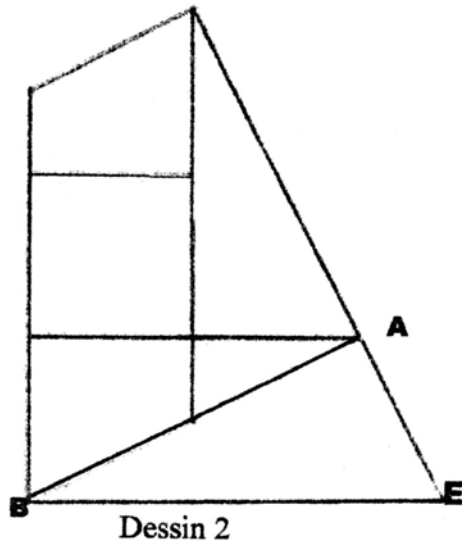
1) Reproduis le dessin 1 sur cette feuille blanche à partir du nouveau dessin ABED.
Instruments autorisés : règle non graduée, équerre.

2) Rédige un programme de construction.



Activité 4

1) Reproduis le dessin sur cette feuille à partir du triangle ABE.
Instruments autorisés : compas, règle non graduée, équerre.



2) Quelles remarques peux-tu faire sur les polygones qui composent le dessin 2 ?

3) Que remarques-tu en comparant le dessin 1 et le dessin 2 ?

NOUVELLE-CALÉDONIE

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS) MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE 1

Rechercher et citer tous les diviseurs de 72.

Trouver le nombre entier x tel que le produit des trois nombres, x , le suivant de x , le double de x , soit égal à 72.

EXERCICE 2

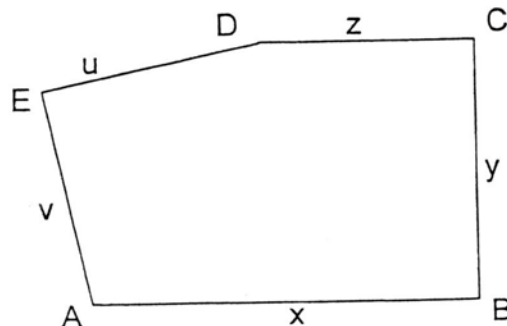
Une caisse à paroi rectangulaire a pour dimensions en cm, 180, 150 et 90. On veut fabriquer des boîtes cubiques aussi grandes que possible dont l'arête est mesurée par un nombre entier de centimètres et avec lesquelles on se propose de remplir la caisse.

Calculez le nombre de ces boîtes.

EXERCICE 3

Les seuls instruments autorisés pour les tracés sont la règle et le compas.

On considère le pentagone convexe ABCDE ci-dessous tel que :



$AB = x$, $BC = y$, $CD = z$, $DE = u$, $EA = v$; $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{DEA} = 90^\circ$

- 1) Soit S l'aire de ce pentagone. Vérifiez l'égalité :
 $2S = xy + yz + uv$

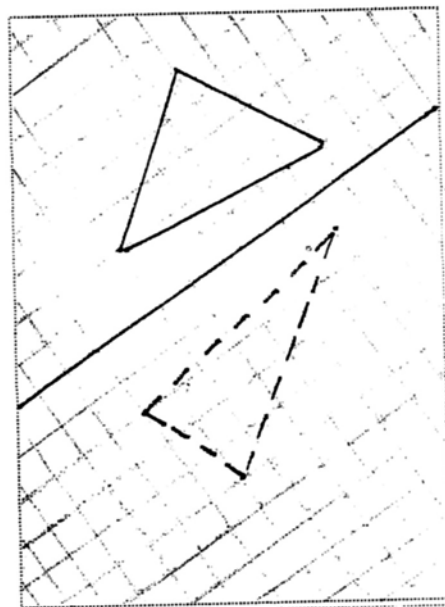
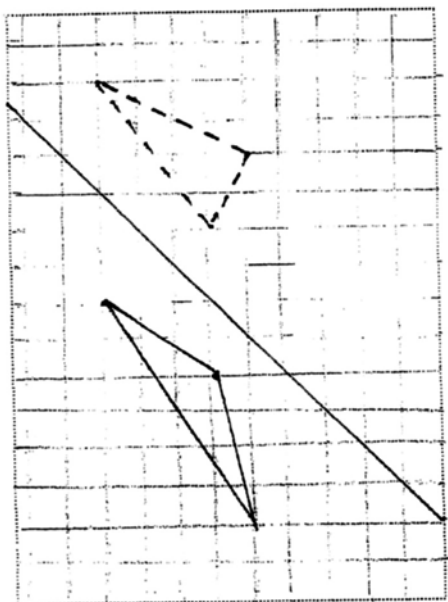
2) Dans la suite de l'énoncé, on considère que :

$$AB = x ; \quad v = y = \frac{3}{4}x ; \quad xy = 12z$$

- a) Sur la feuille blanche (sans lignes ni carreaux), construire avec la règle et le compas ce pentagone sachant que la mesure du segment $[AB]$ est de 8 cm. Vous laisserez nettement apparents les tracés de construction.
- b) Vous écrierez le programme correspondant tout en justifiant la construction du point E.
- c) Montrez que : $4 AC = 5 x$
- d) Calculez l'aire du pentagone pour $x = 8$ cm

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES

Lors de la construction d'une figure symétrique un élève fait les erreurs suivantes :



- 1) Quel est le niveau de classe concerné ?
- 2) Quelles compétences disciplinaires sont évaluées ?
- 3) Après avoir analysé la situation pédagogique proposée vous expliquerez les procédures que l'élève semble avoir utilisées.
- 4) Quelles activités le maître peut-il proposer à l'élève pour l'aider ?

SECOND VOLET (8 POINTS)

1) L'extrait du livre d'un élève de CE2, porté en annexe 1, propose une des deux techniques opératoires de la soustraction en usage dans les classes de l'école élémentaire.

a) A partir de l'exercice d'application, proposé dans l'extrait, préciser sur quelles connaissances de la soustraction s'appuie cette technique ainsi que les compétences supposées des élèves.

b) Calculer : $a = 4000 - 1752$ (poser et effectuer l'opération selon le même principe). Dégager, ensuite, les principaux avantages et inconvénients de cette technique.

2) Voici deux autres modalités opératoires de la soustraction appliquées à un même exemple :

α)

$$\begin{array}{r} 2 \text{ } ^1 7 \text{ } 9 \\ - 1 \text{ } ^1 8 \text{ } 7 \\ \hline \end{array}$$

β)

$$\begin{array}{r} 1 \text{ } 8 \text{ } 7 \\ + \text{ } \cdot \text{ } \cdot \text{ } \cdot \\ \hline 2 \text{ } 7 \text{ } 9 \end{array}$$

a) A quelle notion mathématique font appel ces deux nouvelles modalités opératoires ?

b) Dégager l'intérêt pédagogique et didactique des différentes techniques opératoires présentées tout en précisant à quelles conditions elles sont adaptées aux possibilités d'enfants de cycle deux ou de cycle trois.

3) Après avoir introduit la soustraction un maître propose à ses élèves de CE1 quatre problèmes (annexe 2)

a) Quels types de situations sont utilisés dans ce document ?

b) Ces situations vous semblent-elles pertinentes ?

Annexe 1

La soustraction posée : technique (3)

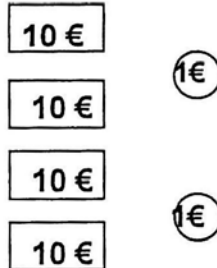
Objectif : effectuer une soustraction en « cassant une dizaine, une centaine »

Piste de recherche

Les bon amis

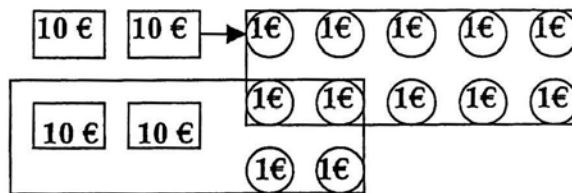
a) Fédérico possède 42 €
Il achète un coffret de 5 vidéo cassettes
à son ami Antoine pour 24 €

Combien lui reste-t-il ?



Observe comment il procède.

Il change un billet de 10 € :
Il obtient 10 pièces de 1 €
Il peut maintenant donner 24 €
Pour payer son coffret



Observe le calcul :

d u

vérification

$$\begin{array}{r} 3 \\ \cancel{4} 2 \\ - 24 \\ \hline 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 18 \\ + 24 \\ \hline 42 \end{array}$$

Il lui reste donc 18 €

b) Ingrid possède 315 €
Elle achète six places de théâtre pour 152 €
Calcule combien il lui reste.
Vérifie le résultat en faisant une addition

Extrait de :

« Pour comprendre les mathématiques »
CE2 ;
Hachette Education

Annexe 2

NOM :

Date :

PRENOM :

- 1) Cherche la différence de prix entre un ballon de rugby à 125 F et un ballon de football à 88 F.
- 2) On fait une remise de 15 F sur une valise de 82 F. Calcule le prix de vente de cette valise.
- 3) Un coffre à jouets contient 42 petites voitures.
 - a) Calcule le nombre de voitures qui restent dans le coffre, si l'on en prend 28.
 - b) Calcule le nombre de voitures prises, si tu en comptes 24 dans le coffre.
- 4) Dans l'école, il y a 158 élèves ; 77 sont des filles. Combien y-a-t-il de garçons ?

CORRIGÉS

AIX-MARSEILLE, CORSE, MONTPELLIER, NICE, TOULOUSE

Note préliminaire :

Dans le corrigé qui suit, le texte en italique correspond à des compléments de formation. Ces remarques ne sont pas exigibles du candidat, elles visent à enrichir l'étude du sujet.

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS) MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE 1

L'échelle d'une carte est le rapport entre la mesure d'une distance séparant deux points représentés sur la carte et la mesure de la distance entre ces mêmes points sur le terrain ou dans la réalité, toutefois pour établir leur rapport ces deux distances doivent être exprimées dans la même unité de longueur, des conversions sont donc souvent nécessaires.

Ici on nous indique que 10 cm sur la carte représentent une longueur de 25 km dans la réalité, pour exprimer l'échelle de cette carte on peut donc convertir 25 km en cm.

$$\begin{array}{ll} 1 \text{ km} = 1000 \text{ m} & \text{donc } 25 \text{ km} = 25\,000 \text{ m} \\ 1 \text{ m} = 100 \text{ cm} & \text{donc } 25\,000 \text{ m} = 2\,500\,000 \text{ cm} \end{array}$$

On peut écrire que l'échelle est égale à $10 / 2\,500\,000^{\text{ème}}$.

Mais on convient généralement d'exprimer les échelles sous la forme d'un rapport dont le numérateur est égal à 1, en simplifiant le rapport précédent par dix on obtient une réponse plus conventionnelle : l'échelle est égale à $1 / 250\,000^{\text{ème}}$.

Autre méthode :

Si 10 cm sur la carte représentent 25 km sur le terrain, 1 mètre représente dix fois plus, soit 250 kilomètres. 250 km correspondent à 250 000 mètres. L'échelle est donc égale au rapport $\frac{1}{250000}$.

EXERCICE 2

Remarque :

Pour justifier qu'une affirmation est vraie, il faut prouver qu'elle est vraie dans tous les cas possibles, ce qui nécessite soit d'étudier la liste exhaustive de tous les cas possibles, soit d'étudier la question dans un cas général ; pour justifier qu'une affirmation est fausse il suffit d'exhiber un cas particulier dans lequel elle ne s'applique pas, un tel cas est alors appelé un contre-exemple, mais on peut aussi étudier le cas général et montrer que l'affirmation ne s'y applique pas.

Examinons chacune des affirmations proposées :

Affirmation 1 :

« Le produit de deux diviseurs d'un nombre entier est un diviseur de ce nombre ».

Voici un contre-exemple direct construit à partir des diviseurs de 6 :

L'ensemble des diviseurs de 6 est l'ensemble formé des nombres : 1 ; 2 ; 3 ; 6

Si l'on multiplie 1 par 2, par 3, ou par 6, on retrouve le même nombre.

Si on multiplie 2 par 3, on trouve 6 qui est bien un des diviseurs, mais si on multiplie 2 par 6 on trouve 12 qui n'est pas un diviseur de 6, de même si on multiplie 3 par 6 on trouve 18 qui n'est pas non plus un diviseur de 6, en multipliant 6 par 6 on trouve 36 qui n'est pas non plus un diviseur de 6, l'un de ces trois derniers exemples suffit pour prouver que cette affirmation est fausse.

Autre méthode :

On peut être tenté de faire une démonstration générale : Considérons un entier n supérieur à 1, n est toujours un diviseur de lui-même, il est même le plus grand de ses diviseurs.

En multipliant n par n on obtient n^2 qui est un entier supérieur à n et qui n'est donc jamais un diviseur de n . Cela prouve aussi que l'affirmation est fausse.

Affirmation 2 :

« La médiane d'un triangle partage ce triangle en deux triangles de même aire ».

Remarque :

Ce résultat est énoncé de façon incorrecte car l'énoncé laisse penser qu'un triangle ne possède qu'une seule médiane, or il en possède trois. Toutefois chacune de ses trois médianes possède la propriété de le partager en deux triangles de même aire.

Cette affirmation est vraie.

Vu la longueur du sujet il est probable que les examinateurs se seront contentés d'une réponse du type suivant :

« La médiane d'un triangle le partage bien en deux triangles de même aire car l'aire d'un triangle se calcule à l'aide de la formule : Aire = (base $\times$ hauteur) : 2 ; et les deux triangles que fait apparaître la médiane ont même base et même hauteur. »
enrichie d'une figure qui l'illustre, comme celle proposée ci-après.

Toutefois, pour prouver sa validité, il faut la démontrer de façon rigoureuse dans le cas général. Nous vous proposons ci-dessous une démonstration possible :

Si on considère un triangle ABC, une de ses médianes est une droite passant par un de ses sommets et par le milieu du côté opposé à ce sommet, elle partage donc toujours le triangle initial en deux nouveaux triangles ayant la médiane comme côté commun.

Si nous choisissons la médiane passant par A et par le milieu I du côté [BC], elle découpe le triangle ABC en deux triangles ABI et ACI, il faut prouver qu'ils ont la même aire.

L'aire d'un triangle peut s'obtenir en faisant en utilisant la formule :

$$\text{Aire triangle} = \frac{\text{Base} \times \text{Hauteur}}{2}$$

Remarque :

Pour utiliser correctement cette formule, il faut savoir que n'importe quel côté d'un triangle peut être choisi comme « base » et qu'alors, la hauteur qui doit lui être associée est celle qui passe par le sommet opposé au côté choisi et qui est perpendiculaire à ce côté.

Si on exprime l'aire de ABI en choisissant comme « base » le côté [BI], si on nomme H le pied de la hauteur issue de A nous obtenons :

$$\text{Aire ABI} = \frac{\text{BI} \cdot \text{AH}}{2}$$

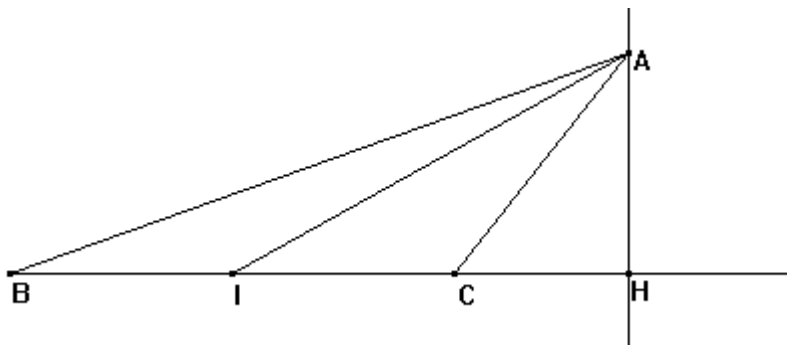
Si on exprime l'aire de ACI en choisissant comme « base » le côté [CI], la hauteur issue du sommet A est la même que pour le triangle ABI car les points B, C et I sont alignés sur (BC) et il n'existe qu'une seule droite perpendiculaire à (BC) passant par le point A, donc la hauteur correspondant au côté [CI] est aussi (AH). Nous obtenons alors :

$$\text{Aire ACI} = \frac{\text{CI} \cdot \text{AH}}{2}$$

Comme I est le milieu de [BC], on a $\text{BI} = \text{CI}$; de cette égalité de longueur on déduit l'égalité des aires de ABI et ACI. La médiane (AI) partage donc bien le triangle ABC en deux triangles de même aire.

Remarque :

Le dessin ci-dessous peut servir d'appoint visuel pour suivre la démonstration précédente qui conserve un caractère général car applicable à n'importe quel triangle.



Affirmation 3 :

« $\frac{1}{3}$ est solution de l'équation $x^3 + x^2 + x = 0,48$ ».

Pour qu'un nombre soit solution d'une équation il faut qu'en remplaçant l'inconnue par ce nombre l'équation se transforme en une égalité vraie. Pour savoir si cette affirmation est vraie, il suffit donc de remplacer x par $\frac{1}{3}$ dans le premier membre de l'équation et regarder si la fraction obtenue au terme des calculs est ou non égale à 0,48 :

$$x^3 + x^2 + x = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{1}{27} + \frac{3}{27} + \frac{9}{27} = \frac{13}{27}$$

Il s'agit donc de savoir si $\frac{13}{27}$ est égal à 0,48.

Pour cela deux méthodes s'offrent à nous :

- Soit donner une écriture décimale de la fraction et la comparer à 0,48 :

Une machine donne $13/27 = 0,481481...$

La valeur 0,48 est donc un arrondi de cette fraction au centième près, mais n'en est pas la valeur exacte. Il faut donc conclure que l'égalité est fausse et que l'affirmation 3 est elle aussi fausse.

- Soit transformer 0,48 en fraction ce qui est toujours possible avec un décimal et comparer cette fraction avec $13/27$:

$0,48 = \frac{48}{100}$ pour savoir si $\frac{13}{27} = \frac{48}{100}$, il suffit de comparer les produits en croix :

$13 \times 100 = 1300$ et $27 \times 48 = 1296$; on constate que les produits en croix ne sont pas égaux, les fractions ne sont donc pas égales et l'affirmation 3 est fausse.

Remarques :

1. Cette dernière méthode présente l'avantage de ne pas faire appel à des valeurs approchées.
2. On pouvait aussi démontrer que la fraction irréductible $\frac{13}{27}$ représentait un nombre rationnel non décimal en considérant que son dénominateur n'était pas un diviseur d'une puissance de dix ou que sa décomposition en facteurs premiers ($27 = 3 \times 3 \times 3$) contenait d'autres facteurs que des 2 et des 5, et en conclure qu'elle ne pouvait donc pas être égale au nombre décimal 0,48.

Affirmation 4 :

« Si on multiplie le diamètre d'un cercle par 2 son aire est multipliée par 2 ».

Remarque :

Pour savoir si cette affirmation est vraie ou fausse, on peut soit se référer à un résultat concernant l'agrandissement des figures : « Quand toutes les dimensions d'une figure sont multipliées par le même facteur k , son aire est multipliée par le

facteur k^2 », soit regarder ce que vaut l'aire d'un disque initial et celle du disque ayant un diamètre double.

En se référant au résultat précédent appliqué à un disque, sa seule dimension étant son rayon ou son diamètre, lorsqu'on multiplie son rayon ou son diamètre par 2, son aire se trouve multipliée par $2^2 = 4$; l'affirmation 4 est donc fausse.

En écrivant l'aire A d'un disque initial de rayon R et de diamètre $D = 2R$ on obtient :

$$A = \pi R^2$$

En écrivant l'aire A' du disque de diamètre double $D' = 2D$ et donc de rayon $R' = 2R$ on obtient :

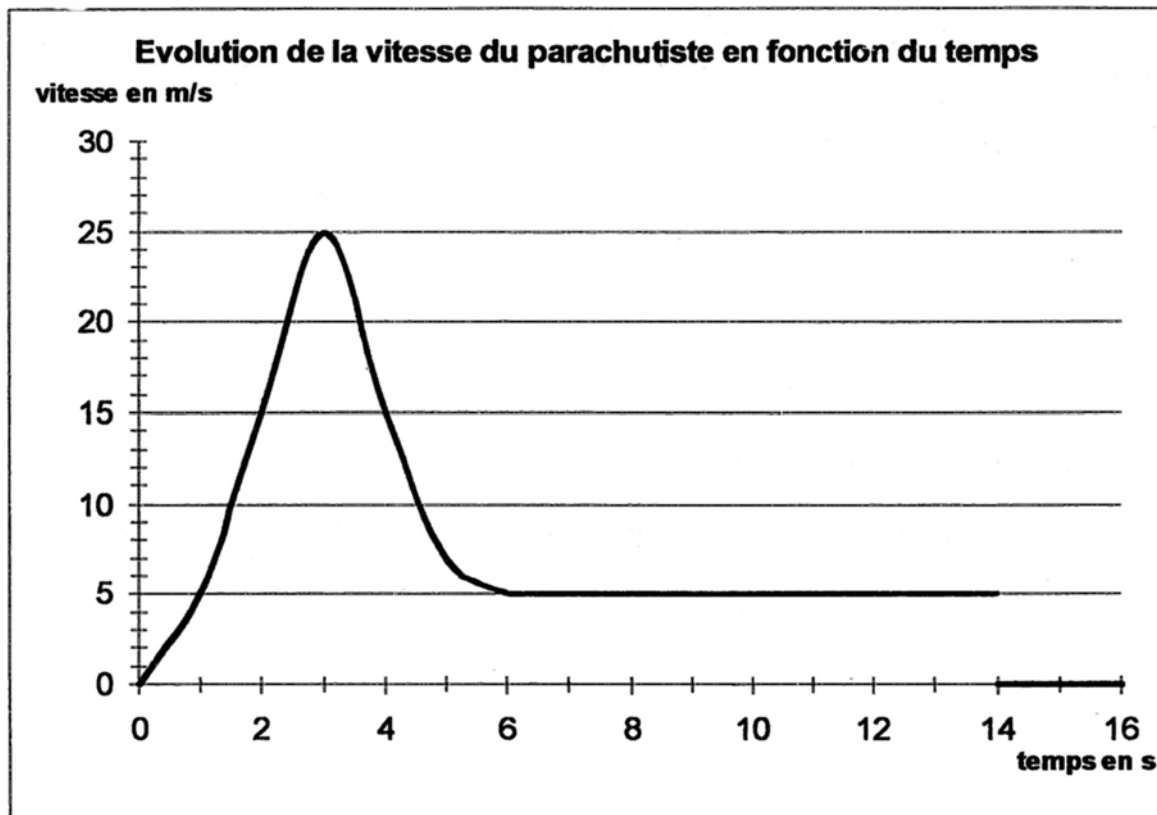
$$A' = \pi R'^2 = \pi (2R)^2 = \pi 4R^2 = 4\pi R^2 = 4A$$

Donc l'aire A est multipliée par 4 et non par 2, l'affirmation 4 est fausse.

EXERCICE 3

Question 1

Le graphique ci-dessous indique la façon dont la vitesse de chute du parachutiste mesurée en m/s (indiquée en ordonnée) varie en fonction du temps mesuré en secondes (indiqué en abscisse).



La vitesse est constante quand elle conserve la même valeur alors que le temps s'écoule entre deux instants. Cela se traduit sur le graphique par des points ayant

tous la même ordonnée, ce qui fait apparaître un segment de droite parallèle à l'axe des abscisses.

On observe que cela se produit pour $v = 5 \text{ m/s}$ et t variant entre 6 s et 14 s.

La vitesse est donc constante sur l'intervalle $[6 ; 14]$.

La vitesse est aussi constante (0 m/s) sur l'intervalle $]14 ; 16]$ (t variant entre 14s et 16s).

Question 2

L'ouverture du parachute provoque une diminution de la vitesse de chute du parachutiste qui jusque là augmentait ; elle correspond donc au moment où la vitesse cesse d'augmenter pour se mettre à diminuer, c'est-à-dire au sommet de la courbe représentée sur le graphique dont les coordonnées sont 3 s en abscisse et 25 m/s en ordonnée.

Ou encore le point de coordonnées : (3 ; 25)

Question 3

Entre 3s et 6s la vitesse du parachutiste diminue de 25 m/s à 5 m/s (après quoi elle reste constante).

Question 4

La chute du parachutiste dure en tout 14 secondes, la seconde moitié de sa chute correspond donc à une durée de 7 secondes et à l'intervalle $[7 ; 14]$. Sur cet intervalle la vitesse est constante, sa valeur est de 5 m/s. La distance parcourue est donc égale au produit : $5 \text{ m/s} \times 7 \text{ s} = 35 \text{ m}$

Question 5

Sa vitesse moyenne est égale au quotient entre la distance parcourue (115 mètres) et la durée totale de sa chute (14 secondes) :

$$\text{Vitesse} = 115 \text{ m} / 14 \text{ s} \approx 8,214... \text{ m/s}$$

Cette vitesse se trouve naturellement exprimée en m/s puisqu'on divise des mètres par des secondes, on demande de l'exprimer en km/h, la vitesse en km/h correspond à la distance (exprimée en km) parcourue en une heure. Nous pouvons donc faire le calcul suivant :

Distance parcourue en une heure soit en 3600 secondes, exprimée en mètres :

$$8,214 \text{ m/s} \times 3600 \text{ s} = 29\,570,4 \text{ m}$$

Distance parcourue en une heure exprimée en kilomètres : 29,5704 km

Vitesse moyenne arrondie au centième, exprimée en km/h : 29,57 km/h

Remarque :

On constate que pour obtenir le nombre exprimant la vitesse en km/h, on a multiplié le nombre exprimant la vitesse en m/s par 3600 puis divisé le produit par 1000.

Si on rassemble ces deux opérations en une seule on aboutit à une multiplication par 3,6.

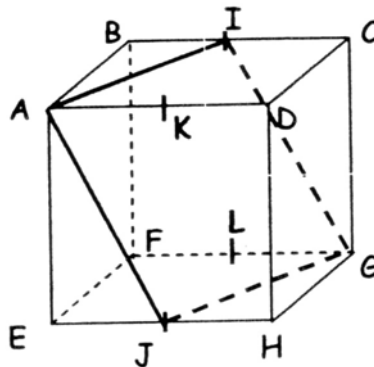
On apprend et on applique quelquefois la relation suivante :

Nombre exprimant la vitesse en m/s $\times 3,6$ = Nombre exprimant la vitesse en km/h

Cette relation purement numérique a le mérite d'économiser toute réflexion, mais a l'inconvénient de supprimer tout le raisonnement sur les unités qui permet de contrôler le travail de conversion.

EXERCICE 4

Les questions concernent le cube ABCDEFGH reproduit ci-dessous (extrait du sujet), de 4 cm d'arête, les points I, J, K, et L étant les milieux respectifs des côtés [BC], [EH], [AD], et [FG].



Remarque:

L'énoncé utilise le mot « côté » à la place du mot « arête » dont l'usage est ici plus pertinent.

Question 1

Dans une représentation en perspective cavalière, le solide représenté est comme projeté sur un écran parallèle à l'observateur par un faisceau de droites toutes parallèles entre elles et dont la direction est celle du regard de l'observateur. Il peut donc arriver que des points soient confondus ou alignés sur la représentation par effet de projection alors qu'ils ne le sont pas sur le solide réel.

Ici il s'agit de savoir si le point D appartient au segment [IG] sur le solide réel, ce qui est un implicite de la question. Sur la représentation en perspective cavalière on voit que le point D est sur le segment [IG], mais sur le cube réel le segment [IG] est tout entier contenu dans la face BCGF du cube (face arrière), alors que le point D est sur la face ADHE du cube (face avant), ces deux faces sont parallèles et ne se touchent pas, le point D, contrairement aux apparences, n'appartient donc pas au segment [IG] sur le solide réel.

Question 2 a

AC, CH, HF et FA sont toutes quatre des longueurs de diagonales de faces du cube. Or toutes les faces d'un cube sont formées de carrés isométriques (ou superposables), cela suffit pour affirmer que ces quatre longueurs sont égales.

Autres méthodes :

1. On peut énoncer le résultat concernant la diagonale d'un carré : La longueur de la diagonale d'un carré est égale au produit de la longueur du côté du carré par le réel $\sqrt{2}$.
Ici chacune de ces longueurs est une diagonale d'un carré ayant 4 cm de côté elles sont donc toutes égales à $4\sqrt{2}$ cm.
2. On pouvait aussi chercher à calculer chacune de ces longueurs en appliquant le théorème de Pythagore à chacun des triangles rectangles formés par les demi-carrés qu'elles déterminent sur les faces du cube :
Dans le triangle ABC rectangle en B et isocèle, le théorème de Pythagore permet d'écrire :
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32 \quad \text{et} \quad \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2}$$

Donc : $AC = 4\sqrt{2}$ cm.
On obtient les mêmes valeurs avec la même démarche pour les trois autres longueurs.

Question 2 b

Un quadrilatère ayant ses quatre côtés de même longueur est un losange, mais ce théorème ne s'applique que dans le plan à des figures polygonales qui sont toutes des figures planes.

Ici la figure dont les sommets sont les quatre points A, C, H, et F n'est pas une figure plane ; en effet le plan défini par A, C et H coupe les faces du cube suivant les segments [AC], [CH] et [HA] qui sont tous trois des diagonales de faces du cube, et le point F n'appartient pas à ce plan, car si c'était le cas la droite (CF) couperait la droite (AH) ou lui serait parallèle, or ces deux droites sont portées par les diagonales de deux faces opposées du cube et ne sont pas parallèles entre elles. ACHF n'est donc pas un losange, il s'agit en fait d'un solide ayant six arêtes de même longueur à savoir un tétraèdre régulier ou pyramide (régulière) à base triangulaire.

Autres méthodes :

1. On peut aussi prouver que ACHF n'est pas un losange en prouvant que ses diagonales [AH] et [CF] ne se coupent pas, en effet elles sont situées dans les faces ADHE (face avant) et BCGF (face arrière) qui sont des faces opposées et parallèles du cube.
2. On pouvait aussi examiner deux côtés opposés et montrer qu'ils n'étaient pas parallèles :
[FH] est une diagonale de la face EFGH du cube, elle est parallèle à la diagonale [BD] de la face ABCD du cube qui lui est opposée et parallèle, [AC] est la deuxième diagonale de la même face ABCD, donc [BD] et [AC] se coupent au centre de la face ABCD.

Si $[FH]$ était parallèle à $[AC]$ comme $[FH]$ est parallèle à $[BD]$ on aurait $[AC]$ parallèle à $[BD]$, or comme on vient de le voir, ce n'est pas le cas puisque ces deux segments se coupent, cela prouve que $[FH]$ et $[AC]$ ne sont pas parallèles et donc que $ACHF$ n'est pas un losange.

Question 3

Étude du quadrilatère AICK :

Première méthode :

Le quadrilatère AICK est tout entier contenu dans la face ABCD du cube, il est donc plan.

Les côtés $[IC]$ et $[AK]$ sont portés respectivement par les côtés $[BC]$ et $[AD]$ du carré qui sont parallèles, ils sont donc eux aussi parallèles. Comme I et K sont les milieux de $[BC]$ et $[AD]$, les longueurs IC et AK sont toutes deux égales à la moitié de la longueur du côté du carré, elles sont donc égales entre elles. Le quadrilatère AICK possède donc deux côtés parallèles et de même longueur, comme de plus il est **convexe**, c'est un parallélogramme.

Deuxième méthode :

Si on appelle O le centre du carré ABCD, et si l'on note S la symétrie centrale de centre O, comme S transforme $[AD]$ en $[CB]$, on peut affirmer qu'elle transforme le milieu K de $[AD]$ en le milieu I de $[CB]$ donc O est le milieu commun de $[AC]$ et $[IK]$ et le quadrilatère AICK possède deux diagonales qui se coupent en leur milieu, c'est donc un parallélogramme.

Étude du quadrilatère CKJG :

Première méthode :

On peut utiliser la propriété : Dans un carré la droite qui joint les milieux de deux côtés opposés (médiane du carré) est parallèle aux deux autres côtés du carré et de même longueur que ces derniers, à ce titre $(JK) \parallel (DH)$ et $JK = DH$

Comme dans le carré DCGH on a $(DH) \parallel (CG)$ et $DH = CG$; on en déduit que : $(JK) \parallel (CG)$ et $JK = CG$, le quadrilatère CKJG étant **convexe** et possédant deux côtés opposés parallèles et de même longueur, on peut affirmer qu'il s'agit d'un parallélogramme.

Deuxième méthode :

On cherche à montrer que CKJG est un rectangle et on en déduit que c'est donc un parallélogramme. On reprend la première partie de la méthode précédente pour montrer que $(JK) \parallel (DH)$, puis on utilise le fait que dans un cube chaque arête est perpendiculaire aux plans des faces qui passent par ses extrémités donc (DH) est perpendiculaire au plan ABCD et au plan EFGH.

Comme $(JK) \parallel (DH)$ on en déduit que (JK) est elle aussi perpendiculaire au plan ABCD et au plan EFGH.

Quand une droite est perpendiculaire à un plan, elle est perpendiculaire à toutes les droites de ce plan qui passent par le point où elle traverse le plan, donc $(JK) \perp (KC)$ et $(JK) \perp (JG)$.

En raisonnant de la même manière on obtient (CG) perpendiculaire aux plans $ABCD$ et $EFGH$, donc $(CG) \perp (KC)$ et $(CG) \perp (JG)$.

Le quadrilatère $CKJG$ possède donc quatre angles droits, c'est un rectangle et donc un parallélogramme.

Remarque :

Il était tentant de se livrer à des raisonnements du genre :

(JG) est dans le plan EFGH et (KC) est dans le plan (ABCD), ces deux plans sont parallèles car ce sont deux faces opposées du cube « donc » les droites (JG) et (KC) sont parallèles. Cette dernière déduction est fautive car deux droites se trouvant dans deux plans parallèles peuvent très bien ne pas être parallèles entre elles, elles ne le sont qu'à la condition supplémentaire de se trouver dans un même plan !

ou encore

(CG) est perpendiculaire au plan EFGH donc (CG) est perpendiculaire à (JG) qui est contenue dans ce plan, ce qui est exact. De même (CG) est perpendiculaire au plan ABCD donc (CG) est perpendiculaire à (CK) qui est contenue dans ce plan, ce qui est aussi exact.

Les droites (JG) et (CK) étant toutes deux perpendiculaires à la même droite (CG), elles sont parallèles entre elles. Cette dernière déduction qui est vraie dans le plan n'est pas vraie dans l'espace car les droites (JG) et (CK) pourraient ne pas être dans le même plan en ayant tourné différemment autour de (CG), ce qui les empêcherait d'être parallèles.

Ces deux raisonnements étaient donc des raisonnements faux qui ne devaient pas être appliqués ici même si les affirmations auxquelles ils conduisaient étaient exactes dans le cas particulier du quadrilatère $CKJG$.

Etude du quadrilatère $AIGJ$:

Première méthode :

Comme le quadrilatère $AICK$ est un parallélogramme on en déduit que les côtés $[AI]$ et $[KC]$ sont de même longueur et portés par des droites parallèles, comme $CKJG$ est un parallélogramme on en déduit que les côtés $[KC]$ et $[JG]$ sont de même longueur et portés par des droites parallèles, donc les côtés $[AI]$ et $[JG]$ sont de même longueur et portés par des droites parallèles, comme $AIGJ$ est un quadrilatère **convexe** ayant deux côtés opposés de même longueur et portés par des droites parallèles, c'est un parallélogramme.

Deuxième méthode :

Si on appelle Ω le centre du cube, la symétrie centrale de centre Ω transforme A en G et le côté $[EH]$ en le côté $[CB]$, donc le milieu J du côté $[EH]$ en le milieu I du côté $[CB]$, de ce fait Ω est le milieu commun des diagonales $[IJ]$ et $[AG]$ donc le quadrilatère $AIGJ$ est un parallélogramme.

Question 4

Pour démontrer que $AIGJ$ est un losange, puisqu'on a montré à la question précédente qu'il s'agissait d'un parallélogramme, il suffit de montrer que deux de ses côtés consécutifs sont de même longueur.

Si on choisit de calculer la longueur AI en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ABI rectangle en B on obtient : $AI^2 = AB^2 + BI^2$

Comme $AB = BC = 4$ cm on en déduit que $BI = 2$ cm et $AI^2 = 4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20$

Donc $AI = \sqrt{20}$ cm $= 2\sqrt{5}$ cm

Si on calcule la longueur AJ en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle AEJ rectangle en E on obtient : $AJ^2 = AE^2 + EJ^2$

Comme $AE = EH = 4$ cm on en déduit que $EJ = 2$ cm et $AJ^2 = 4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20$

Donc $AJ = \sqrt{20}$ cm $= 2\sqrt{5}$ cm

Conclusion : $AI = AJ$ donc le parallélogramme AIGJ est un losange.

Autre méthode :

On pouvait calculer à l'aide du théorème de Pythagore la longueur des quatre côtés de AIGJ, on trouvait alors que les quatre côtés étaient de même longueur ce qui, les points A, I, G et J étant coplanaires, suffisait pour affirmer que AIGJ est un losange sans faire référence à la question précédente.

Remarque :

Il n'était pas indispensable d'effectuer les calculs de longueurs, il suffisait de dire que chaque côté de AIGJ est l'hypoténuse d'un triangle rectangle et que les quatre triangles rectangles concernés sont isométriques.

Question 5

Pour savoir si le quadrilatère AIGJ est un carré il faut voir si deux de ses côtés consécutifs sont perpendiculaires. Pour cela on peut utiliser le théorème de Pythagore d'abord pour calculer la longueur AG puis pour voir si le triangle AJG est rectangle en J :

Si $AG^2 = AJ^2 + JG^2$ alors d'après la réciproque du théorème de Pythagore AJG est rectangle en J.

Si $AG^2 \neq AJ^2 + JG^2$ alors le triangle AJG n'est pas rectangle en J car il ne vérifie pas la relation du théorème de Pythagore.

Calcul de AG :

Le triangle AEG est rectangle en E car (AE) est perpendiculaire au plan EFH et donc (AE) est perpendiculaire à (EG), on donc appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle AEG rectangle en E :

$AG^2 = AE^2 + EG^2$ comme $AE = 4$ cm et $EG = 4\sqrt{2}$ cm, propriété de la diagonale d'un carré, on obtient : $AG^2 = 16 + 32 = 48$

Nous savons grâce à la question précédente que $AJ^2 = JG^2 = 20$ donc $AG^2 \neq AJ^2 + JG^2$ car $48 \neq 20 + 20$; on en déduit que le triangle AJG n'est pas rectangle et donc que le losange AIGJ n'est pas un carré car dans un carré les quatre angles sont droits.

Autre méthode :

Montrer que $IJ = BE$, par exemple en montrant que BIJE est un parallélogramme du fait que [BI] et [EJ] sont de même longueur, portés par des droites parallèles et que le quadrilatère BIJE est convexe, puis calculer sa longueur qui vaut $4\sqrt{2}$ cm (diagonale du carré).

Calculer la longueur de $[AG]$ qui vaut $\sqrt{48} \text{ cm} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$ (voir ci-dessus).

Conclure que AIGJ n'est pas un carré car ses deux diagonales ne sont pas de même longueur.

Question 6

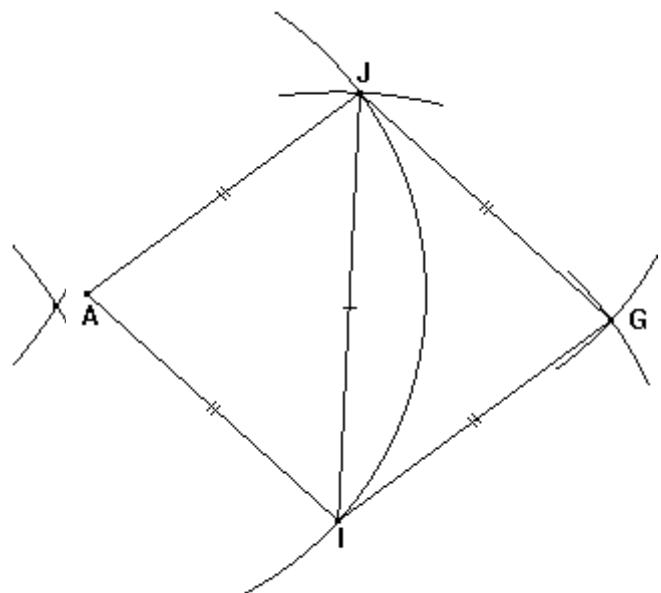
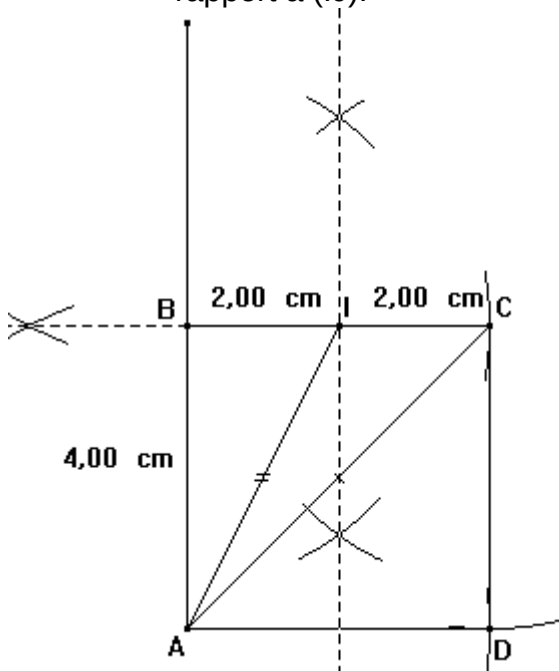
Pour construire le losange AIGJ en vraie grandeur, il faut commencer par construire un demi-loosange avec une des deux diagonales et deux côtés de même longueur, puis le symétrique de ce demi-loosange par rapport à la diagonale choisie.

En effet cela permet, en construisant ce triangle, de déterminer un des angles du losange ce qui en fixe la forme.

On peut choisir soit la diagonale $[AG]$ qui, avec le cm comme unité de longueur, mesure $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$, soit la diagonale $[IJ]$ qui mesure $4\sqrt{2}$, les longueurs des côtés $[AJ]$, $[JG]$, $[GI]$, et $[IA]$ ayant tous pour mesure $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

La première difficulté est donc de construire géométriquement les longueurs AG ou IJ et AJ, pour ce faire nous allons reconstruire les triangles rectangles qui leur ont donné naissance dans la figure précédente :

- la construction du carré de départ ayant 4 cm de côté inclut la construction d'une perpendiculaire à une droite et la construction de la médiatrice d'un côté pour en déterminer géométriquement le milieu, ce carré permet de tracer un premier segment ayant pour longueur $\sqrt{20} \text{ cm}$, soit $2\sqrt{5} \text{ cm}$ et une diagonale ayant pour longueur $4\sqrt{2} \text{ cm}$.
- la construction du losange s'appuie sur la diagonale $[IJ]$ dont la longueur peut être obtenue grâce au carré précédent. On trace le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{20} \text{ cm}$, sur ce cercle on choisit un point J et on trace le segment $[IJ]$ de longueur $4\sqrt{2} \text{ cm}$. Le point G étant le symétrique de A par rapport à (IJ) .



DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS) ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES
--

Conseil :

Avant d'étudier les démarches utilisées par les élèves il est indispensable de résoudre soi-même le problème proposé, pas seulement pour en fournir la ou les réponses mais aussi pour tenter d'en identifier la structure : « Une école comporte deux classes. Dans cette école, il y a 26 filles. Dans la première classe, il y a 12 filles et 11 garçons. Dans la deuxième classe il y a 27 élèves. Quel est le nombre de garçons dans la deuxième classe ? »

On perçoit qu'il s'agit d'un problème de réunion d'ensembles, l'ensemble des élèves de l'école étant découpé d'une part en deux classes et d'autre part entre filles et garçons. On peut penser à un tableau à double entrée pour croiser ces deux paramètres de découpage, mais on peut aussi raisonner directement sur les nombres donnés.

	Première classe	Deuxième classe	Total de la ligne
Nombre de filles	12	A	26
Nombre de garçons	11	B = ?	C
Total de la colonne	D	27	E

Il existe au moins deux façons différentes d'obtenir la valeur de B, la première passe par le calcul préalable de la valeur de A, la seconde par le calcul préalable de la valeur de C :

Calcul de la valeur de A, puis de celle de B sur laquelle porte la question du problème :

Nombre de filles de la deuxième classe : $A = 26 - 12 = 14$

Nombre de garçons de la deuxième classe : $B = 27 - A = 27 - 14 = 13$

Calcul de la valeur de C, donc de celle de E, donc de celle de D, puis de celle de B :

Nombre d'élèves de la première classe : $D = 11 + 12 = 23$

Nombre d'élèves de l'école : $E = D + 27 = 23 + 27 = 50$

Nombre de garçons de l'école : $C = 50 - 26 = 24$

Nombre de garçons de la deuxième classe : $B = 24 - 11 = 13$

Question 1

Analyse des démarches utilisées par les élèves en précisant les erreurs commises

Elève	Démarche suivie	Erreurs commises
MANON	Elle calcule le nombre de filles de la deuxième classe ($26 - 12$), puis elle calcule le nombre de garçons dans cette même classe	Elle commet une erreur de calcul dans sa première soustraction, elle semble additionner les unités entre elles alors qu'elle

	(27 - 18). Sa démarche est correcte mais sa réponse est fausse.	soustrait les dizaines entre elles. Ce calcul qui ne nécessitait aucune retenue, semble avoir été effectué trop rapidement, contrairement à la deuxième soustraction qui comporte les marques des retenues et qui est correcte.
REMI	Il calcule le nombre d'élèves de l'école en additionnant le nombre de filles et le nombre de garçons de la première classe avec le nombre d'élèves de la deuxième classe ($12 + 11 + 27$), puis il soustrait à ce résultat le nombre de filles de l'école ($50 - 26$). Le résultat qu'il obtient correspond au nombre total de garçons de l'école, sa démarche est erronée car incomplète.	Il n'a commis aucune erreur de calcul mais sa démarche n'est pas menée à son terme, il aurait fallu soustraire le nombre de garçons de la première classe au dernier résultat obtenu pour trouver le nombre de garçons de la deuxième classe, ce que Rémi n'a pas fait. Il a effectué deux calculs, ce qui est en général un maximum pour de nombreux élèves qui en font un contrat implicite.
ANTOINE	Il calcule le nombre d'élèves de l'école en deux étapes : il calcule mentalement le nombre d'élèves de la première classe ($11 + 12 = 23$) puis il additionne le nombre d'élèves des deux classes ($23 + 27$). Il calcule ensuite le nombre de garçons de l'école ($50 - 26$) puis le nombre de garçons de la deuxième classe ($24 - 11$).	Aucune erreur. Démarche correcte. Calculs exacts.
CLARA	Elle calcule le nombre de filles de la deuxième classe ($26 - 12$), puis calcule le nombre de garçons de la deuxième classe ($27 - 14$).	Aucune erreur. Démarche correcte. Calculs exacts.

Question 2

Compétences visées dans cet exercice

Remarque :

On peut se demander si le terme « visées » a un sens différent, dans l'esprit des concepteurs du sujet, du terme « évaluées », pour notre part nous le considérerons avec le même sens, tout en regrettant le choix du terme « visées » qui peut semer le doute dans l'esprit des candidats attentifs.

En analysant la tâche des élèves, les compétences évaluées dans cet exercice sont les suivantes :

- Savoir utiliser ses connaissances pour résoudre un problème additif.
- Savoir élaborer un raisonnement nécessitant des étapes intermédiaires dont l'initiative est laissée à la charge des élèves, ou savoir décomposer un problème additif complexe en sous-problèmes plus simples.
- Savoir traduire par l'opération adéquate, ici addition ou soustraction, la situation étudiée.
- Savoir calculer correctement une somme ou une différence.

En prenant pour référence les programmes de 2002, les compétences évaluées dans cet exercice sont formulées de la façon suivante :

- Mettre en œuvre un raisonnement, articuler les différentes étapes d'une solution.
- Résoudre un problème en utilisant les connaissances sur les nombres naturels et décimaux et sur les opérations étudiées.
- Connaître les tables d'addition (de 1 à 9) et les utiliser pour calculer une somme, une différence ou un complément.
- Calculer des sommes et des différences de nombres entiers ou décimaux, par un calcul écrit en ligne ou en colonnes.

Question 3

Comme l'analyse préalable l'a montré, selon de quelle manière on choisit de résoudre ce problème le nombre de garçons de la première classe n'est pas une donnée indispensable à sa résolution, elle peut donc être supprimée de l'énoncé. Toutefois sa suppression rend impossible la deuxième façon de résoudre le problème, utilisée par Rémi et Antoine.

Il peut donc être intéressant de la conserver pour permettre aux élèves qui ont besoin de passer par le calcul des effectifs totaux (nombre d'élèves de l'école puis nombre de garçons de l'école) de pouvoir résoudre le problème, pour amener aussi les élèves qui conçoivent l'autre solution (calcul du nombre de filles puis du nombre de garçons de la deuxième classe) à accepter l'idée qu'un énoncé de problème peut comporter des données inutiles et permettre lors du bilan une confrontation entre les deux procédures de résolution.

Question 4

Les représentations schématiques

Remarque :

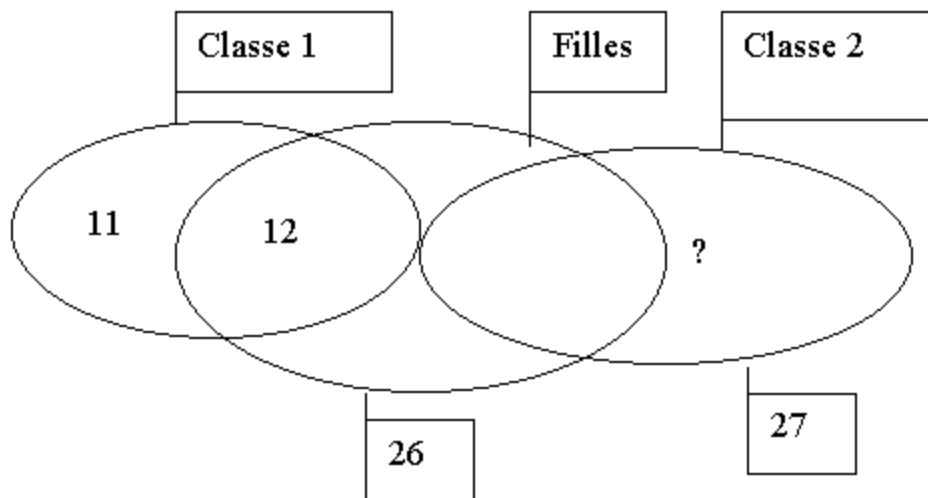
L'utilisation de schémas dans la résolution de problèmes n'est pas une attitude spontanée chez les élèves ; elle nécessite un long et difficile apprentissage dont l'efficacité dans l'élaboration de la solution du problème est très longue à se dessiner. Cette remarque reste valable pour de nombreux adultes.

Pour proposer une représentation schématique on peut hésiter entre plusieurs modes de représentations, mais sur la copie des candidats, une seule suffisait.

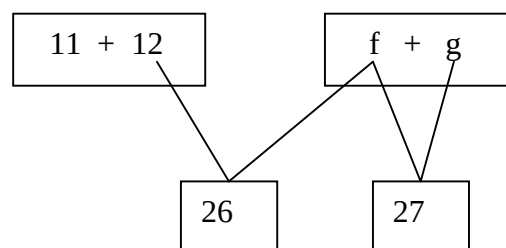
- Si on opte pour un tableau à double entrée, on peut reprendre ici le tableau proposé comme aide à l'analyse du problème dans l'analyse préalable aux réponses aux questions (voir plus haut).
- Si on opte pour une représentation des ensembles, la plus fonctionnelle semble celle qui utilise les principes des diagrammes de Carroll : sur deux lignes on représente un ensemble et son complémentaire (filles et garçons), sur deux colonnes on représente un autre ensemble et son complémentaire (classes 1 et 2), toutefois il est nécessaire ici de représenter la réunion des deux ensembles pour en faire figurer l'effectif ce qui rapproche beaucoup ce type de diagramme du tableau à double entrée précédent :

	Filles	Garçons	Total
Classe 1	12	11	
Classe 2			27
Ecole	26		

- Leur représentation sous forme de « patates » (diagrammes de Venn) bien que moins bien adaptée, est aussi possible : on peut dessiner deux patates disjointes pour représenter les deux classes, et une patate ayant une intersection non vide avec chacune des deux patates précédentes, pour représenter l'ensemble des filles de l'école :



- Si on opte pour une représentation sous forme d'arbre à calcul, on doit alors désigner les nombre inconnus par une lettre ou par une case vide (algébrisation du problème), voici un exemple possible :



SECOND VOLET (8 POINTS)

Question 1

Objectif d'apprentissage commun aux deux documents

Remarque :

Les documents des annexes 2 et 3 traitent tous deux du thème des aires, mais un thème ne constitue pas un objectif d'apprentissage, il faut être plus précis. A l'examen des deux documents on voit qu'ils s'attachent tous deux à proposer aux élèves de fabriquer des formes différentes ayant la même aire, c'est cela qui constitue leur point commun.

L'objectif d'apprentissage commun aux deux documents est donc : « Comprendre que des surfaces de formes différentes peuvent avoir la même aire » ou encore « Dissocier les notions de forme et d'aire d'une surface ».

Question 2

Objectif des exercices de l'annexe 3, page 2/2

Remarque :

Ce type de question expose à une réponse du genre « l'objectif de l'exercice est de faire réaliser aux élèves la tâche proposée dans cet exercice » qui n'apporte aucun élément d'analyse. Il faut évidemment s'attacher aux objectifs d'apprentissage et non à la tâche elle-même qui n'est qu'un des exemples possibles pour atteindre cet objectif, toutefois quand la tâche proposée est très spécifique, il est quelquefois difficile d'énoncer un objectif sous une forme très différente de la formulation de la consigne. Ce type de question serait sans doute plus facile à comprendre si la façon dont le maître utilise ces exercices dans la séquence d'apprentissage était décrite avec précision.

Exercice n°1 :

Faire utiliser de manière implicite la mesure de l'aire d'une figure dessinée sur un quadrillage pour obtenir des surfaces de formes différentes ayant la même aire.

Exercice n°2 :

Faire comparer les aires de figures ayant des formes différentes en les pavant à l'aide d'un gabarit unité.

Exercice n°3 :

Faire prendre conscience qu'une même surface (ici un carré dessiné sur un quadrillage) peut être décomposée de plusieurs manières en surfaces (ici quatre) superposables.

Exercice n°4 :

Découvrir que le découpage et le recollement sans chevauchement des différents morceaux d'une surface permet de former une nouvelle surface de même aire que la surface initiale.

Question 3

Exercices 1 et 2 de l'annexe 2, page 1/2

Les élèves sont invités par une démarche de manipulation, complètement guidée par des consignes et des dessins, à constater que la superposition directe des surfaces des deux rectangles dont ils doivent comparer les aires ne leur permet pas de répondre à la question qui leur est posée. En effet aucun des deux rectangles n'est entièrement contenu dans l'autre, il faut donc procéder à une comparaison indirecte en fabriquant par découpage et recollement sans chevauchement, une nouvelle surface de même aire que la surface initiale qui permette d'aboutir soit à une inclusion de l'une des surfaces dans l'autre soit à une superposition exacte pour pouvoir comparer les aires des deux rectangles initiaux.

Question 4

Exercice 2 de l'annexe 3, page 2/2

La figure qui a une aire différente des aires des autres figures est la figure D car elle est formée de 7 demi-carrés alors que toutes les autres sont formées de 8 demi-carrés.

Remarque :

L'expression « Exprimer une procédure » utilisée dans la question est une formulation assez vague ; on peut se demander si les concepteurs du sujet attendent des candidats qu'ils indiquent simplement un principe général sur lequel peut s'élaborer une procédure ou bien qu'ils décrivent entièrement une procédure avec ses différentes étapes. Nous choisissons d'opter pour la deuxième interprétation.

Procédures utilisables par les élèves :

- Décalker la figure fournie dans l'énoncé comme gabarit d'unité d'aire, puis partager soit par simple tracé, soit par découpage effectif, chacune des figures à étudier en triangles dont on vérifie la superposition au gabarit grâce au calque, dénombrer pour chaque figure le nombre de triangles nécessaires, comparer les nombres obtenus.
- Se convaincre visuellement du fait que le triangle rectangle fourni comme gabarit d'unité est bien superposable aux triangles qui apparaissent en saillie sur les figures à étudier, puis faire apparaître d'autres triangles identiques en traçant une diagonale sur les carrés qu'on devine dans chaque surface en faisant abstraction des triangles en saillie. Après tracé de tous les triangles procéder à leur dénombrement et à la comparaison des nombres obtenus.
- Prendre conscience que l'association de deux triangles fournis comme gabarit d'unité peut donner naissance à un carré, chercher à faire apparaître de tels carrés dans chacune des formes à étudier, puis procéder au dénombrement

des triangles contenus dans chaque forme en comptant deux triangles pour chaque carré, comparer les nombres obtenus.

Question 5

Exercice 3 de l'annexe 2, page 1/2

Dans l'illustration proposée il est fait appel à une règle graduée, à une feuille rectangulaire en papier uni et à la technique du pliage bord sur bord pour obtenir les perpendiculaires aux bords de la feuille pour faire apparaître le rectangle cherché. On suppose que le découpage final sera fait à la main grâce aux plis mais le rectangle obtenu serait certainement plus propre si on utilisait une paire de ciseaux pour le découper.

Si la feuille rectangulaire de papier uni reste le support choisi, on peut remplacer le pliage par l'utilisation d'une équerre afin de tracer les perpendiculaires aux bords de la feuille à partir des points obtenus grâce à la règle graduée, pour obtenir le quatrième sommet du rectangle à construire. Son découpage s'effectuant alors à l'aide d'une paire de ciseaux

En conservant la feuille rectangulaire de papier uni comme support, on peut utiliser la règle graduée pour marquer les bonnes longueurs et le compas pour construire le quatrième sommet du rectangle (on trace deux arcs de cercle ayant chacun pour centre un des points repérés sur les côtés de la feuille, et pour rayon la longueur repérée sur le côté de la feuille qui est perpendiculaire au côté dont le centre est une extrémité). Le découpage du rectangle s'effectuera à l'aide d'une paire de ciseaux.

Si le support choisi est une feuille rectangulaire quadrillée à « carreaux Seyes », la règle graduée reste nécessaire pour marquer les bonnes longueurs sur les bords de la feuille mais l'équerre devient inutile puisqu'il suffit de suivre les traits du quadrillage pour tracer à la règle les côtés du rectangle qui sont perpendiculaires aux bords de la feuille. Le découpage s'effectuant à l'aide d'une paire de ciseaux.

Si le support choisi est une feuille rectangulaire à « petits carreaux », il suffit de savoir que le côté de chaque carreau a une longueur de 0,5 cm (ou que deux côtés de carreaux ont pour longueur 1 cm) pour déterminer les bonnes longueurs sur le bord de la feuille, une simple règle non graduée suffit alors pour tracer les côtés du rectangle qui sont perpendiculaires aux bords de la feuille. Le découpage s'effectuant à l'aide d'une paire de ciseaux.

Si le support choisi est du papier pointé avec des mailles de 1 cm, comme dans le cas précédent, seule la règle non graduée est nécessaire.

On peut aussi tracer et découper un rectangle 8×12 par l'une des deux premières méthodes sur un support blanc assez rigide (papier à dessin ou bristol) puis utiliser cet exemplaire comme gabarit pour tracer par contour du gabarit d'autres rectangles superposables.

Remarque :

Il n'était certainement pas nécessaire de proposer autant de réponses différentes, et la liste proposée ci-dessus ne prétend pas être exhaustive ; elle montre toutefois qu'il est souhaitable d'associer le support de construction avec les instruments qui lui correspondent.

Question 6 a

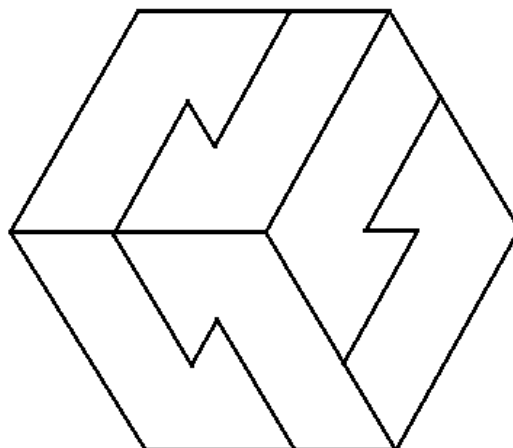
Pertinence des deux sous-questions de la partie 3 des activités « Découvertes » de l'annexe 3, page 1/2

La première sous-question demande aux élèves de voir parmi les cinq surfaces proposées quelles sont celles qui permettent de paver l'hexagone en six surfaces superposables à partir de son centre. Cela nécessite de disposer une même surface dans des positions très différentes à l'intérieur de l'hexagone, ce travail peut se faire avec l'aide d'une feuille de papier calque comme le suggère l'énoncé de la question 1. On pourrait en regretter le caractère répétitif et fastidieux, puisqu'il faut tester six positions de chacune des cinq surfaces proposées, mais on peut aussi considérer que cela va inciter les élèves à tenter de se passer du papier calque pour anticiper par l'imagination la rotation à partir du centre du carré des surfaces à tester, dans ce cas la question devient pertinente.

La deuxième sous-question demande aux élèves quelles sont les surfaces qui ont la même aire. Elle peut être résolue par le dénombrement des petits triangles équilatéraux dessinés en pointillés à l'intérieur de chacune des cinq surfaces et soulignera le fait que bien qu'ayant des formes différentes certaines de ces surfaces ont la même aire, ce qui est l'objectif principal de la leçon. Elle peut donc être considérée comme pertinente.

Question 6 b

Les formes qui permettent de répondre à la consigne de Martin sont A, B et C. Évidemment les formes précédentes ont toutes la même aire, égale à $1/6$ de l'aire de l'hexagone, mais la forme E est, elle aussi, formée de 25 petits triangles équilatéraux comme les trois formes précédentes, par contre elle ne permet pas de paver l'hexagone à partir de son centre. Voir figure ci-dessous :



La forme D ne convient pas car elle est formée de 29 triangles équilatéraux.
Les formes ou surfaces ayant la même aire sont donc A, B, C, et E.

Remarque :

Pour répondre de manière argumentée au a) il était souhaitable d'avoir auparavant répondu au b) !

Question 7

Préparation du travail sur les unités légales de mesure d'aires

Remarque :

L'annexe 3 ne comportant que des figures construites sur quadrillage ou sur des réseaux triangulaires réguliers semble, plus que l'annexe 2, reliée à la démarche de mesurage des aires en utilisant une aire-unité, puisqu'il incite les élèves à dénombrer les triangles ou les carreaux contenus dans les surfaces étudiées pour comparer leurs aires.

Les activités de l'annexe 2 proposent des méthodes permettant de fabriquer de nouvelles surfaces rectangulaires ayant la même « étendue » qu'une surface rectangulaire donnée au départ, elles soulignent donc que l'aire d'une surface rectangulaire peut rester constante bien que les dimensions de cette surface varient. Si nous devons établir un lien entre ces activités et l'utilisation des unités légales de mesure d'aire, nous pouvons le voir au niveau de la définition de l'unité d'aire qui ne dépend que de l'aire et non de la forme choisie pour représenter cette aire. En particulier 1 cm^2 n'est pas forcément l'aire d'un carré de 1 cm de côté, ce peut aussi être l'aire d'un rectangle de 2 cm de longueur et de 0,5 cm de largeur, ou bien d'un triangle de 2 cm de base et 1 cm de hauteur...

Cela permet de lutter contre l'obstacle constitué par l'utilisation du mot « carré » dans la désignation des unités légales de mesure d'aire, en le dissociant de la forme carrée, même si elle sert de forme de référence, et en soulignant l'indépendance entre l'unité d'aire et la forme qui sert à la représenter.

Question 8

Exercices utilisables pour des activités de remédiation

Pour aider les élèves ayant des difficultés à comprendre que des surfaces de formes différentes peuvent avoir la même aire on peut travailler sur deux types de démarches :

- a) Soit partir d'une forme donnée, la découper en plusieurs morceaux et fabriquer une nouvelle forme différente en assemblant tous ces morceaux sans chevauchement ; on peut encore renforcer cette démarche en montrant sa réversibilité, en démontant la deuxième surface pour reformer la première. On joue donc ici sur la décomposition/recomposition de forme.

b) Soit choisir une forme qui sert de gabarit d'unité d'aire, et constater après dénombrement que deux surfaces de formes différentes peuvent contenir le même nombre de formes unitaires. On joue ici sur le mesurage des aires.

Les exercices 4 et 5 de l'annexe 2 peuvent être choisis pour travailler sur la démarche de type a).

Les exercices 2 et 4 de l'annexe 3 peuvent être choisis pour travailler sur une démarche de type b), l'exercice 1 du même document peut aussi être classé dans cette catégorie, mais le conseil d'utiliser une feuille de papier calque laisse plutôt penser à un travail de compensation : si la forme n'est pas la même que le carré de référence, pour qu'elle ait la même aire que lui il faut qu'il manque autant de petits carrés à l'intérieur du carré de référence qu'elle en a en plus à l'extérieur. Cette comparaison étant facilitée par l'utilisation du calque qui permet de transporter le carré de référence.

AMIENS, ORLÉANS-TOURS, ROUEN

Note préliminaire :

Dans le corrigé qui suit, le texte en italique correspond à des compléments de formation. Ces remarques ne sont pas exigibles du candidat, elles visent à enrichir l'étude du sujet.

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS) MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE 1

Question 1

Cas du produit 8×7

$$\begin{array}{c}
 5 - \boxed{\dots 3 \dots} = \textcircled{\dots 2 \dots} \\
 \uparrow -5 \\
 8 \\
 \times \\
 7 \\
 \downarrow -5 \\
 5 - \boxed{\dots 2 \dots} = \textcircled{\dots 3 \dots}
 \end{array}$$

$$(3 + 2) \times 10 + (2 \times 3) = 5 \times 10 + 6 = 56$$

Question 2 a

Cas général : diagramme pour $a \times b$

$$\begin{array}{c}
 5 - \boxed{\dots a \dots 5 \dots} = \textcircled{10 \dots a} \\
 \uparrow -5 \\
 a \\
 \times \\
 b \\
 \downarrow -5 \\
 5 - \boxed{\dots b \dots 5 \dots} = \textcircled{10 \dots b}
 \end{array}$$

Question 2 b

La somme des deux nombres encadrés est : $(a - 5) + (b - 5)$ soit $a + b - 10$
Les deux nombres entourés sont : $5 - (b - 5)$ soit $10 - b$ et $5 - (a - 5)$ soit $10 - a$.
Le calcul issu du diagramme est donc : $(a + b - 10) \times 10 + (10 - a)(10 - b)$.

Question 2 c

Après développement des produits, l'expression devient :

$$10a + 10b - 100 + 100 - 10a - 10b + ab$$

Ce qui, après réduction, donne : ab .

EXERCICE 2

Question 1

Dans la représentation d'une répartition par un diagramme circulaire, les mesures d'angles sont proportionnelles aux effectifs correspondants ; on a ici un effectif de 1000 personnes représenté par un angle plein de 360° , cette correspondance détermine les autres.

On a donc une relation de proportionnalité représentée par le tableau suivant où les nombres inconnus sont désignés par x , y , z et t .

	Société A	Société B	Société C	Total
Effectif	400	y	z	1000
Angle (degré)	x	198°	t	360

Calcul de x : $1000 x = 400 \times 360$

$$\text{D'où } x = \frac{144000}{1000}$$

$$x = 144$$

Calcul de y : $1000 \times 198 = 360 y$

$$\text{d'où } y = \frac{198000}{360}$$

$$y = 550$$

On déduit l'effectif z , par différence avec l'effectif total : $z = 1000 - (400 + 550)$

$$z = 50$$

Le calcul de t peut s'effectuer en utilisant la valeur trouvée pour z et la proportionnalité entre les effectifs et les angles : $1000 t = 360 \times 50$

$$\text{d'où } t = \frac{18000}{1000}$$

$$t = 18$$

Ou alors, par recherche du complément à 360 : $t = 360 - (144 + 198)$

$$t = 360 - 342$$

$$t = 18$$

Remarque :

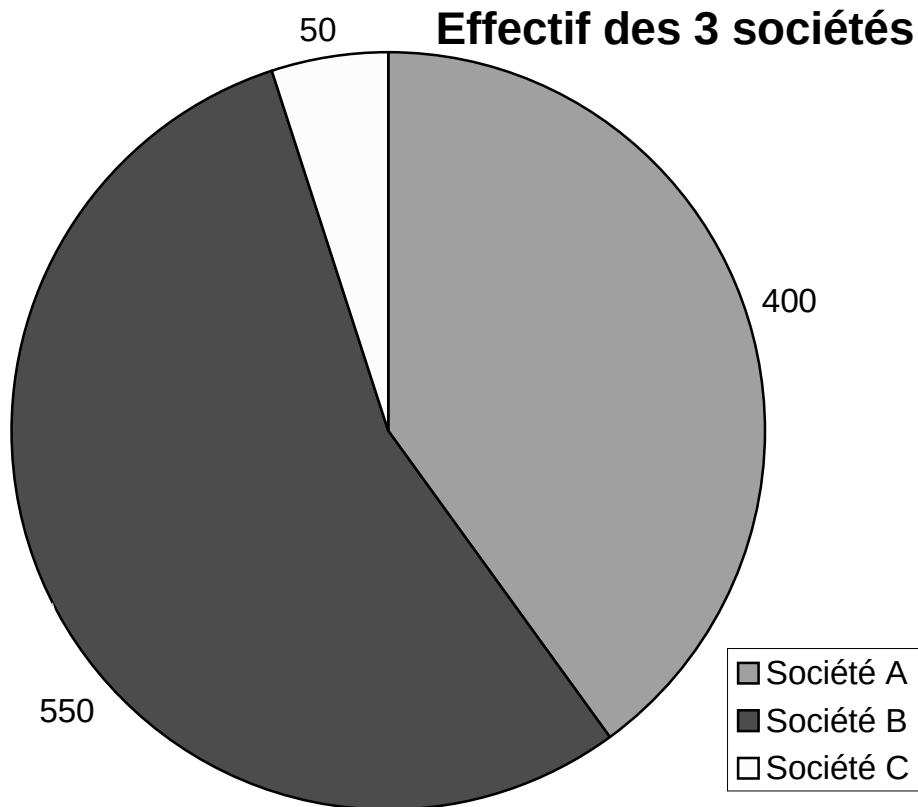
L'essentiel des calculs ci-dessus a été fait en utilisant un théorème qui caractérise l'égalité de deux rapports $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ par l'égalité des « produits en croix » $a.d$ et $b.c$.

Signalons une autre méthode possible, utilisant les propriétés de linéarité additive et multiplicative :

- On calcule d'abord l'angle correspondant à un effectif de 100 :
1000 correspond à 360° ; 100, c'est 10 fois moins, donc 36° .
- L'angle correspondant à l'effectif de 400 (société A) est donc de $4 \times 36^\circ$, soit 144° .
- $198^\circ = 180^\circ + 18^\circ$ (la moitié de 360° + la moitié de 36°) ; l'effectif de la société B est donc :
 $500 + 50$ (la moitié de 1000 + la moitié de 100), soit 550.
- On obtient ensuite les nombres relatifs à la société C par différence :
Effectif : $1000 - 400 - 550 = 50$
Angle : $360^\circ - 144^\circ - 198^\circ = 18^\circ$

Question 2

Diagramme circulaire représentant la situation.



EXERCICE 3

Partie I : construction de l'inverse d'une longueur.

Question 1

Comme (EI) est parallèle à (JA), en appliquant le théorème de Thalès aux triangles (OEI) et (OJA), on obtient :

$$\frac{OE}{OJ} = \frac{OI}{OA}$$

et, en remplaçant par les mesures données, on obtient :

$$\frac{OE}{1} = \frac{1}{8} \quad \text{d'où} \quad OE = \frac{1}{8} \quad \text{soit} \quad OE = 0,125.$$

Question 2

Un raisonnement similaire, cette fois avec $OA = x$ (x différent de 0), avec toujours $OJ = 1$, $OI = 1$ et $OA = 8$ fournit :

$$\frac{OE}{1} = \frac{1}{x} \quad \text{d'où} \quad OE = \frac{1}{x}$$

Question 3

Remarque :

La démonstration qui conduit au résultat $OE = 0,125$ fait appel au Théorème de Thalès qui peut s'appliquer car on sait que les droites (EI) et (JA) sont parallèles. Dans cette démonstration, le fait que (JO) et (OA) sont perpendiculaires n'intervient pas. On peut donc définir un programme de construction qui découle de cette démonstration valide quel que soit l'angle des droites (JO) et (OA). Cependant, dans cet exercice, on donne « (JO) et (OA) sont perpendiculaires », ce qui amène un cas particulier de figure (où l'angle entre (OJ) et (OA) est fixé), ainsi le programme de construction lié à cette figure sera un programme particulier qui s'appuie sur un angle déterminé entre les droites (OJ) et (OA) : nous avons choisi de nous placer dans ce cas.

Il s'agit donc de trouver un programme de construction de la figure qui a servi de support à la démonstration précédente à partir d'un segment dont la longueur est le nombre dont on veut trouver l'inverse.

La droite (OJ) peut être considérée comme la médiatrice de segment $[AA']$, où A' est le symétrique de A par rapport au point O .

Voici un programme de construction :

- 1) Construire, à la règle graduée, un segment $[OA]$ dont la mesure de longueur exprimée en cm est x , le nombre dont on veut déterminer l'inverse.
- 2) Avec la règle graduée ou le compas, construire le symétrique de A par rapport à O , c'est à dire le point A' tel que O soit le milieu de $[AA']$.

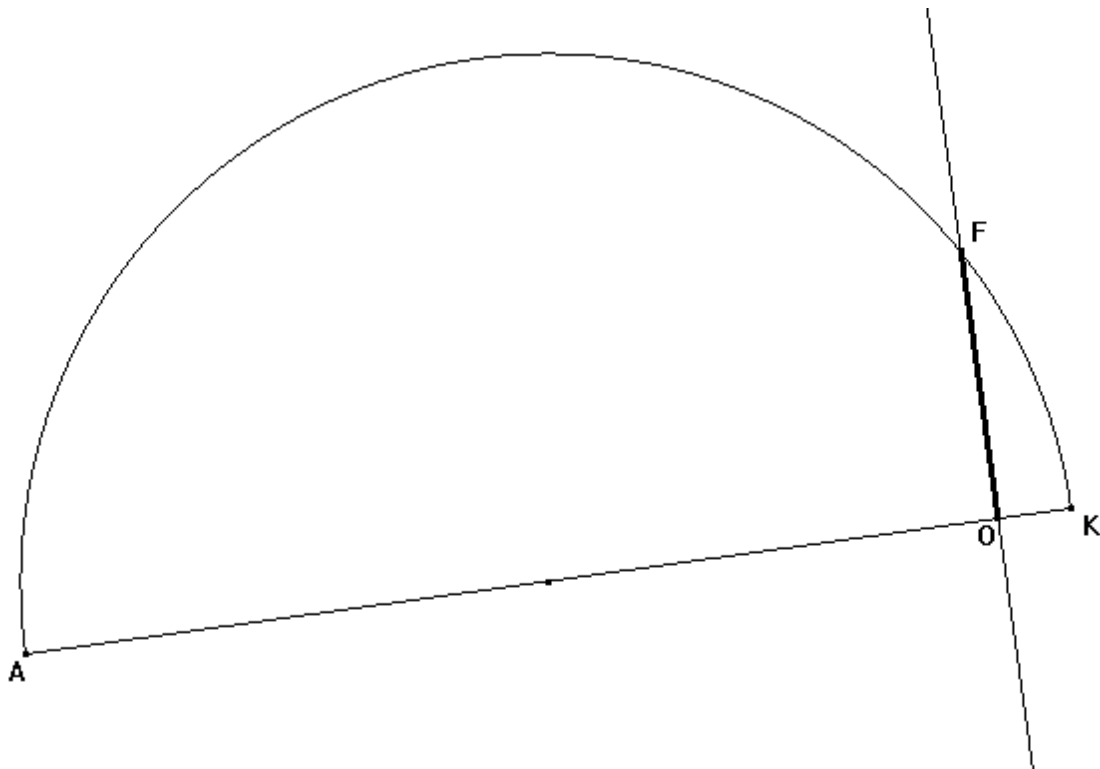
- 3) Avec le compas, construire un point H équidistant de A et de A'. Avec la règle tracer la droite (OH) : cette droite est la médiatrice du segment [AA'] donc (OH) est perpendiculaire à (OA).
- 4) Avec la règle graduée, placer sur la demi droite [OH) le point J à 1 cm de O et sur la demi-droite [OA), le point I à 1 cm de O.
- 5) Avec le compas, par report des longueurs des côtés opposés, construire le point K tel que JAOK soit un parallélogramme.
- 6) La droite (IK) coupe la demi-droite [OJ) au point E tel que (EI) est parallèle à (JA) (côtés opposés du parallélogramme).
Comme cela a été démontré ci-dessus, la longueur OE est l'inverse de x.

Remarque :

Pour avoir un programme général, il suffit de commencer par tracer deux demi-droites d'angle quelconque (inférieur à 180°), [OJ) et [OA), puis de reprendre les instructions 4), 5) et 6).

Partie II : construction de la racine carrée d'une longueur.

Question 1



Question 2

Dans le triangle FOK rectangle en O, en appliquant le théorème de Pythagore, on obtient : $FK^2 = FO^2 + OK^2$

Comme $AO + OK = AK$, du fait que O est un point du segment [AK] et que $AO = 13$, on déduit $OK = AK - AO$ soit $OK = 14 - 13 = 1$.

On a donc : $FK^2 = OF^2 + 1^2$ d'où **$OF^2 = FK^2 - 1$** (1)

Dans le triangle FOA rectangle en O, par le théorème de Pythagore,
on obtient : $FA^2 = FO^2 + AO^2$

D'où $OF^2 = FA^2 - AO^2$ soit $OF^2 = FA^2 - 13^2$

ou encore **$OF^2 = FA^2 - 169$** (2)

Question 3

Par addition des égalités (1) et (2) membre à membre, il vient :

$$2 \times OF^2 = FK^2 - 1 + FA^2 - 169,$$

ce qui donne :

$$2 \times OF^2 = FK^2 + FA^2 - 170$$

Question 4

Le triangle AFK est inscrit dans le demi-cercle de diamètre [AK] ; or tout triangle inscrit dans un demi-cercle et ayant pour côté son diamètre est rectangle avec comme hypoténuse ce diamètre, donc : **le triangle AFK est rectangle en F.**

Question 5

D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle AFK rectangle en F, on a :

$$AK^2 = AF^2 + FK^2$$

et comme $AK = 14$, cela donne $196 = AF^2 + FK^2$.

Or, on a établi à la question 3 que $2 \times OF^2 = FK^2 + FA^2 - 170$

donc $2 \times OF^2 = 196 - 170$ d'où $2 \times OF^2 = 26$

On en déduit $OF^2 = 13$ d'où **$OF = \sqrt{13}$.**

Partie III : construction d'un segment de longueur $\frac{1}{\sqrt{11}}$ cm.

On refait la construction de la partie II en partant d'un segment [AK] de longueur 12 cm et avec O point de [AK] tel que [OA] soit un segment de longueur 11 cm.

On obtient le point F, intersection de la perpendiculaire à (AK) passant par O avec un des demi-cercles de diamètre [AK] qui vérifie :

$$OF = \sqrt{11}$$

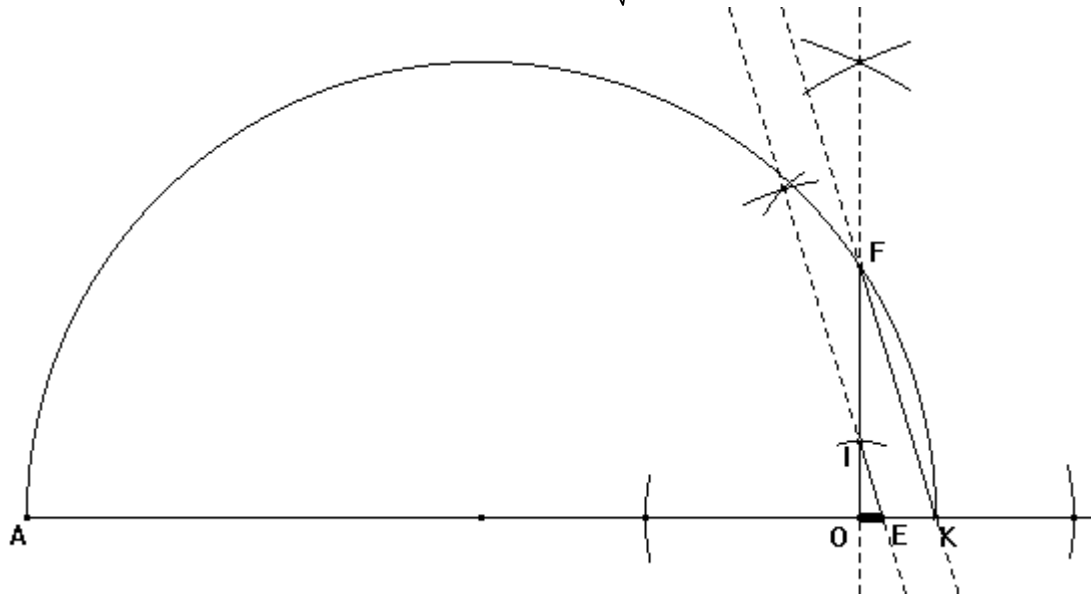
(cela se vérifie aisément en reprenant les calculs de la partie II avec les nouvelles mesures ; on peut aussi établir une généralisation du résultat de la partie II ; si on reprend le raisonnement effectué avec $OA = x$ cm et $AK = x + 1$ cm, on :

$$2 \times OF^2 = FK^2 - 1 + FA^2 - x^2 = FK^2 + FA^2 - 1 - x^2 = (x + 1)^2 - 1 - x^2 = 2x$$

d'où $OF^2 = x$ et $OF = \sqrt{x}$.)

On place alors sur la demi droite [OF) le point I tel que [OI] ait pour longueur 1 cm et la construction de la partie I (tracé de la droite parallèle à (FK) et passant par I) nous fournit le point E de la demi droite [OK) qui vérifie :

$$OE = \frac{1}{\sqrt{11}}$$



DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS) ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES
--

Question 1

Les compétences mises en œuvre.

Pour un début de CE2, elles se rattachent à plusieurs domaines :

- Compétences générales :

S'engager dans une procédure personnelle de résolution et la mener à son terme.

- Calcul réfléchi :

Organiser et traiter des calculs additifs, soustractifs sur les nombres entiers.

- Exploitation de données numériques ; résolution d'un problème en utilisant une procédure personnelle :

Dans une situation où plusieurs quantités (ou valeurs) identiques sont réunies, déterminer le nombre de quantités (ou de valeurs).

D'autre part, la résolution de ce problème nécessite la connaissance de la monnaie et de l'utilisation des échanges.

Question 2

Analyse des 3 procédures.

Elève A :

Il constitue les sommes de 5 euro à partir des sommes correspondant à chaque pièce ou billet, soit en les décomposant soit en les regroupant.

Il tient un compte des sommes de 5 euro qu'il a pu ainsi former, ce qui lui permet d'en faire le total pour répondre correctement.

Elève B :

Il établit la liste des sommes d'argent par catégories de pièces et billets, calcule mentalement (aucune trace de calcul écrit) la valeur totale de la somme d'argent, soit 35 euro, somme à laquelle il ajoute 5 euro. Il semble perdre de vue le but à atteindre : Il additionne le nombre qu'il vient d'obtenir (35) au seul nombre donné non utilisé (5). Il utilise le résultat 40 (qui est une somme d'argent en euro) pour répondre que l'enfant obtient 40 billets (de 5 euro).

Cet élève semble ne pas être capable de distinguer l'aspect « mesure d'une grandeur » d'un nombre, ici la valeur d'une somme d'argent de l'aspect « cardinal » d'un nombre, ici un nombre de billets.

Elève C :

Il produit une écriture additive faisant apparaître les valeurs unitaires de pièces ou billets, puis il calcule la somme totale et fait une erreur de 2 unités (33 au lieu de 35) ; il a peut-être oublié un terme 2 en calculant la somme.

Par des soustractions successives de 5, il détermine le nombre de fois 5 qui est contenu dans la somme totale ; mais il se trompe à deux reprises dans le calcul des différences ($33 - 5 = 28$ et non 29 ; $24 - 5 = 19$ et non 18).

Sa réponse est en cohérence avec sa procédure : le nombre de billets trouvé correspond bien au nombre de soustractions qui ont été faites.

Mais la réponse qu'il donne n'est pas la solution du problème.

Les écritures produites ($33 - 5 = 29 - 5 = \dots$), erronées du point de vue mathématique, sont acceptables dans un écrit de recherche, car elles traduisent un raisonnement correct.

Question 3

Eléments de remédiation.

Pour l'élève B :

Démarche 1 :

Dans une première étape, lui donner des vraies pièces de 1 € et 2 € et de vrais billets de 5 € et de 10 € et lui demander de réaliser les échanges, l'interroger sur le nombre de billets de 5 € ainsi obtenus ; dans une deuxième étape lui donner un problème analogue à résoudre sans matériel.

Démarche 2 :

Lui suggérer de matérialiser les pièces et les billets afin de l'aider à distinguer les objets, leur nombre et la valeur de chacun d'entre eux.

A l'aide de dessins, demander à l'élève de mettre en évidence la correspondance entre par exemple, cinq pièces de 1 euro et un billet de 5 euro, entre deux pièces de 2 euro et 1 pièce de 1 euro et un billet de 5 euro.

Suggérer d'écrire les égalités mathématiques qui expriment cette correspondance :

Par exemple : $2 + 2 + 1 = 5$; $1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$.

Pour l'élève C :

Lui suggérer, une fois le résultat d'une somme obtenu, de calculer cette somme d'une autre manière pour contrôler le résultat.

Lui proposer un travail autour des différentes manières de calculer une somme contenant des termes identiques.

Favoriser le calcul mental ; le faire décompter de 5 en 5 à partir d'un nombre.

Remarque :

Le fait de produire une réponse erronée à ce problème en début de CE2 ne signifie pas qu'il y a nécessité de mettre en place une remédiation pour ces élèves. Les propositions faites sont plutôt des propositions d'aide à la compréhension et à la résolution du problème.

Question 4

Autre procédure experte.

Une procédure experte de début CE2, moment où les élèves connaissent la multiplication serait, une fois calculée la somme totale de 35 euro, de chercher à atteindre ce nombre en multipliant 5 successivement par 2, 3, 4,

Cela conduit à dresser la liste des multiples de 5 : $2 \times 5 = 10$; $3 \times 5 = 15$; $4 \times 5 = 20$; ; $7 \times 5 = 35$.

La réponse est alors fournie par l'interprétation de cette dernière égalité : 7 billets de 5 euro font 35 euro.

SECOND VOLET (8 POINTS)

Question 1

Situation A

Fiche 1 :

Elle ne permet pas d'obtenir la figure car, sur la figure, le point A est sur le cercle de centre O et le segment [OA] a donc comme longueur le rayon de ce cercle annoncé par la fiche, soit 40 mm, ceci contredit la donnée de départ de la fiche qui est de 20 mm comme longueur pour OA.

Fiche 2 :

Elle permet de construire la figure.

Fiche 3 :

Elle ne convient pas, car la fiche situe le point A à l'intérieur du cercle de centre O alors que la figure indique que le point A est un point situé sur le cercle de centre O.

Remarques :

Sur le document présenté, on lit $[OA]=20$ mm, ce qui ne respecte pas le codage en vigueur actuellement qui distingue un segment noté [OA] de sa longueur notée OA. D'autre part il faut comprendre ici « l'intérieur » du cercle comme la surface plane dont le cercle est la frontière... à l'exclusion des points du cercle...

Situation B

Fiche 23 :

Elle ne convient pas car la fiche ne donne pas le point C comme milieu de [AO]. Néanmoins, l'absence de codage du milieu de [AO] peut justifier le choix de la fiche 23 par les candidats.

Fiche 24 :

Elle permet de construire la figure.

Fiche 25 :

Elle ne convient pas car elle fait tracer (DE) comme droite quelconque par rapport à (AB) alors que sur la figure (DE) est perpendiculaire à (AB).

Question 2

Comparaison des deux situations.

Ressemblances	Différences	
1) Les deux situations proposent la confrontation d'une figure et de trois programmes de construction : la tâche consiste à déterminer le programme qui correspond à la figure donnée. Dans les deux cas, il s'agit de tester si chaque programme permet d'obtenir la figure donnée.	1) A : Contrôle du rayon	B : Contrôle du rayon puis vérification qu'un segment donné est un diamètre (vérification de l'alignement des points A,O,B)
2) Les deux situations exigent le contrôle du tracé d'un cercle par vérification du centre et du rayon.	2) A : Contrôles portant seulement sur les caractéristiques du cercle	B : Contrôles portant sur les caractéristiques du cercle mais aussi sur le milieu d'un segment, la perpendicularité, les points d'intersection de lignes du plan.
3) Les fiches de construction se présentent, dans les deux cas, comme une chronologie de constructions élémentaires.		
4) Les fiches de construction nécessitent dans les deux cas la compréhension du vocabulaire géométrique relatif au cercle, ainsi que la connaissance de l'écriture symbolique d'un segment : [AO].	3) A : La réponse peut être trouvée aussi bien par confrontation en allant de la figure vers la fiche ou de la fiche vers la figure.	B : La complexité de la figure donnée rend plus délicat le passage de la figure vers les fiches mais favorise l'examen de la fiche et la vérification de chaque étape dans la figure.

Question 3

La tâche, qui consiste à rapprocher une figure donnée de différents programmes de construction exige autant des connaissances mathématiques (caractéristiques géométriques) que des connaissances d'action qui sont l'application de ces connaissances (construction et vérification de ces caractéristiques).

Nous énumérons ci-dessous les connaissances géométriques : à chacune d'entre elles, il faut associer les savoir-faire correspondants (construire et vérifier).

Situation A :

- Construction (et vérification) d'un segment donné par la mesure de sa longueur.
- Caractérisation d'un cercle par l'identification de son centre et du rayon.
- Appartenance d'un point à une ligne déjà tracée (le cercle).

Ces connaissances relèvent des niveaux : Fin CE1 ou début CE2.

Situation B :

- Caractérisation d'un cercle par la connaissance de son centre et de son rayon.
 - Connaissance du diamètre d'un cercle en tant que segment passant par le centre du cercle et joignant deux points de celui-ci.
 - Caractéristique du milieu d'un segment.
 - Reconnaissance d'une droite perpendiculaire à une autre à partir de la donnée du point d'intersection des droites.
 - Points d'intersection d'une droite et d'un cercle.
 - Détermination d'un quadrilatère à partir de la donnée de la liste des sommets.
- Niveau : CM1-CM2 compte-tenu de l'expertise des connaissances géométriques mises en oeuvre (elles relèvent du cycle 3) et de leur utilisation conjointe dans une même situation, ce qui constitue un facteur de complexité.

Remarque :

Une des difficultés spécifique à la situation B tient au fait qu'il faut repérer la non indication de propriétés (milieu et perpendiculaire) ; cela est plus délicat que le repérage d'indications contraires et suppose une compréhension de la distinction entre le général et le particulier en mathématique.

Les deux situations demandent à l'élève de connaître la désignation symbolique d'un segment, ce qui n'est pas exigible à l'école élémentaire.

Question 4

Eléments d'évaluation observables.

Les éléments communs aux deux situations :

- lire l'enchaînement des consignes d'un programme de construction
- maîtriser le vocabulaire géométrique relatif au cercle (centre, rayon et diamètre).
- mettre en relation des indications de construction avec des propriétés perçues puis vérifiées sur le dessin.
- rédiger une argumentation en géométrie.
- savoir décoder l'écriture symbolique d'un segment :[OA].
- mettre en relation des indications de construction avec des propriétés connues des objets géométriques et formuler ces propriétés comme des conditions nécessaires à l'obtention du dessin fourni.

Les éléments spécifiques à l'une ou l'autre des deux situations :

Situation A	Situation B
Connaître les positions relatives d'un point et d'un cercle selon la distance entre ce point et le centre.	Reconnaître un diamètre d'un cercle donné, à partir de la connaissance de ses extrémités. Repérer et vérifier qu'un point donné est le milieu d'un segment donné. Reconnaître et vérifier qu'une droite est perpendiculaire à une droite donnée, l'intersection étant un point donné. Reconnaître les points d'intersection d'une droite et d'un cercle. Savoir identifier un quadrilatère sur une figure, à partir de la donnée de ses sommets.

BESANÇON

Note préliminaire :

Dans le corrigé qui suit, le texte en italique correspond à des compléments de formation. Ces remarques ne sont pas exigibles du candidat, elles visent à enrichir l'étude du sujet.

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS) MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE 1

Question a

Les multiples de 5 ont une écriture décimale dont le chiffre des unités est soit 0, soit 5. Pour les sélectionner on peut donc commencer par écrire tous les nombres proposés sous forme décimale usuelle :

$$\left. \begin{array}{l} 1025 \\ 3,6 \times 10^2 = 360 \\ 0 \times 10^6 = 0 \\ 19 \times 10^6 = 19\,000\,000 \end{array} \right\} \text{ sont des multiples de 5.}$$

$$\left. \begin{array}{l} 312 \times 10^0 = 312 \\ 40120 \times 10^{-1} = 4012 \end{array} \right\} \text{ ne sont pas multiples de 5.}$$

Question b

Écrivons A et B décomposés en facteurs premiers :

$$A = 2 \times 3^4 \times 3 \times 3 \times 5 \quad \text{donc} \quad A = 2 \times 3^6 \times 5$$

A est divisible par les sept premières puissances de 3 :

$$3^0 ; 3^1 ; 3^2 ; 3^3 ; 3^4 ; 3^5 \text{ et } 3^6.$$

$$B = 30^3 \quad \text{donc} \quad B = (3 \times 2 \times 5)^3 = 2^3 \times 3^3 \times 5^3$$

Donc les quatre premières puissances de 3 ($3^0 ; 3^1 ; 3^2 ; 3^3$) divisent B.

EXERCICE 2

- Si François peut disposer N jetons en carré, alors $N = c^2$, en appelant c le nombre de jetons sur le côté du carré.

Soit J le nombre de jetons de François :

Première tentative : $J = n^2 + 52$

Deuxième tentative : $(n + 4)^2 - 60 = J$

On obtient donc : $n^2 + 52 = (n^2 + 16 + 8n) - 60$

$$52 + 60 - 16 = 8n$$

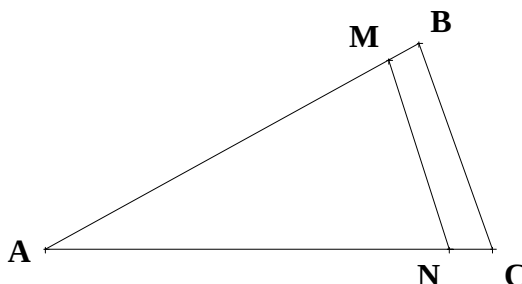
$$n = 12$$

On conclut que : $J = 12^2 + 52 = 144 + 52 = 196$

François possède donc 196 jetons.

- On remarque que $196 = 14^2$ donc son problème a bien une solution : il peut disposer ses 196 jetons “en carré” à condition de mettre **14 jetons par côté** (14 lignes de 14 jetons).

EXERCICE 3



Si les droites (MN) et (BC) sont parallèles, on a une configuration de Thalès avec deux triangles AMN et ABC de sommet commun A ; en particulier on a l'égalité :

$$(E) \quad \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}.$$

Donc si les deux droites sont parallèles, alors l'égalité (E) est vraie ou, par contraposée, on a de façon équivalente : si l'égalité (E) est fausse, alors les deux droites ne sont pas parallèles.

Or $\frac{AM}{AB} = \frac{1,000001}{1,000002}$ et $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{1,000001}$

Il s'agit d'étudier si ces deux rapports sont égaux ou non.

Remarque :

L'utilisation d'une calculatrice est ici trompeuse car les calculs précis dépassent les possibilités d'affichage de tous les chiffres significatifs et la calculatrice procède alors aux arrondis programmés.

On peut raisonner ainsi (par les “produits en croix”) :

$$\frac{1,000001}{1,000002} = \frac{1}{1,000001} \quad \text{si et seulement si} \quad (1,000001)^2 = 1,000002$$

Cette dernière égalité est fausse puisque devra apparaître dans l'écriture décimale du carré de 1,000001 le chiffre 1 (comme produit 1×1) au douzième rang à droite de la virgule, or ce chiffre n'apparaît pas dans la partie décimale de 1,000002.

L'égalité (E) est donc fausse, et les droites ne sont pas parallèles.

Autre démonstration :

Rappelons que lorsqu'on a une proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (b et d différents de 0), on a aussi

les égalités : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$ (La fonction linéaire qui associe a à b et c à d, associe aussi à (a - c) la différence (b - d)).

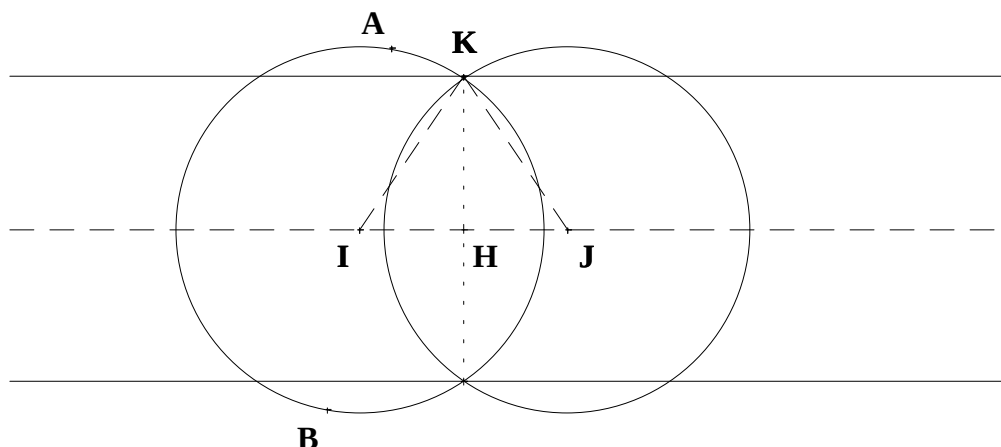
Ici on obtiendrait en supposant l'égalité (E) :

$$\frac{1,000001}{1,000002} = \frac{1}{1,000001} = \frac{0,000001}{0,000001} = 1$$

ce qui est faux !

EXERCICE 4

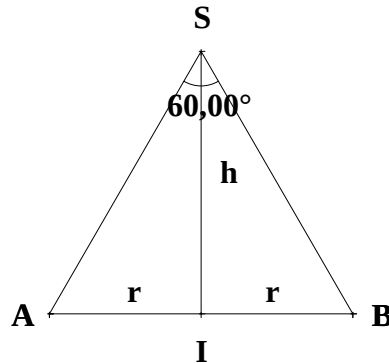
Il faut tout d'abord interpréter la figure proposée comme étant une vue "du dessus" : on a la route et son axe médian en pointillés, l'emplacement de deux projecteurs marqués par deux traits sur cet axe, et assimilés à deux points I et J centres de deux disques sécants représentant les deux cônes de lumière projetée sur la route. En effet l'intersection d'un cône de révolution avec un plan perpendiculaire à la hauteur du cône est un disque dont le centre est un point de la hauteur.



Cette figure représente la position exacte des centres, qui permet de n'avoir aucune zone d'ombre sur la route ; les deux points intersections des deux cercles sont exactement sur les droites définissant les bords de la route ; si on écarte les centres, ces deux points intersections passent à l'intérieur de la "bande" route et il y aura de l'ombre sur la route ; si on rapproche les deux centres, ces deux points intersections passent à l'extérieur de la "bande" route et une plus grande partie des "bas-côtés" sera éclairée.

La distance maximale recherchée est bien d.

Schématisons alors un projecteur et son cône de lumière de sommet S en représentant une section plane (SAB) passant par l'axe (SI) du projecteur et perpendiculaire au plan de la route (plan de la figure proposée). Il faut d'ailleurs comprendre que c'est dans un tel plan vertical que l'angle au sommet vaut 60° .



C'est l'angle du triangle SAB isocèle (puisque le cône est de révolution) : $SA = SB$. La hauteur [SI] de ce triangle est aussi la hauteur du cône, et a donc pour longueur 9 m : $IS = h = 9$.

Et le pied I de la hauteur est le centre du disque de lumière de rayon r :

$AB = 2r$ (dans un triangle isocèle la hauteur "principale" est aussi médiane.)

Le triangle isocèle SAB a un angle de 60° , donc ses deux autres angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont égaux ; de plus leur somme vaut 120° ($180^\circ - 60^\circ$), donc les trois angles de SAB sont égaux à 60° et SAB est un triangle équilatéral.

On peut calculer r avec le théorème de Pythagore dans le triangle SIB rectangle en I :

$$\begin{aligned} SB^2 &= IS^2 + IB^2 \\ (2r)^2 &= 9^2 + r^2 \\ 3r^2 &= 81 \end{aligned}$$

$$r^2 = 27 \quad r > 0 \quad \text{donc} \quad r = 3\sqrt{3} \quad (\text{en m}) \quad \text{et} \quad r \approx 5,2 \text{ m}$$

Calcul de d :

Dans la figure "vue de dessus" considérons le triangle IJK isocèle en K puisque $IK = JK = r$ (les disques de lumière projetée ont même rayon r).

La hauteur principale de ce triangle a pour longueur $KH = 4 \text{ m}$ (moitié de la largeur de la route) et est aussi médiane (IJK triangle isocèle en K) :

$$H \text{ est le milieu du segment } [IJ] \quad IH = JH = \frac{d}{2}$$

Calculons cette longueur IH dans le triangle IKH rectangle en H, en utilisant le théorème de Pythagore :

$$IH^2 = IK^2 - KH^2$$

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = r^2 - 16 = 27 - 16 = 11$$

$$\text{soit } \frac{d^2}{4} = 11 \quad \text{et} \quad d^2 = 44 \quad \text{donc} \quad d = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

$$\text{soit } d \approx 6,6 \text{ m}$$

La distance maximale qui doit séparer deux projecteurs pour qu'il n'y ait aucune zone d'ombre sur la route est donc $2\sqrt{11}$ mètres, soit 6,6 mètres au dixième près.

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS) ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES
--

Remarque :

Le candidat doit prêter attention à l'utilisation du terme "chiffre".

On écrit le nombre 15 en dessinant le chiffre 1 puis le chiffre 5.

Mais dans une consigne du type « Prends 2 jetons ! », 2 est un nombre et non un chiffre, puisqu'il exprime une quantité.

Question 1

Procédures engagées par les élèves

Le nombre de carrés de chocolat mangés par les souris est 18.

Les quatre élèves ont compris la situation et développent chacun une procédure pour dénombrer les carrés de chocolat qui, pour eux, sont manquants.

Ils ont tous tenu compte que les carrés mangés se répartissaient en trois "trous".

Charlotte :

Pour le premier trou elle énumère les carrés qu'elle reconnaît, d'abord sur la 1^{ère} ligne puis en suivant les bords du trou, en inscrivant l'écriture chiffrée des nombres dans l'ordre de la comptine jusqu'à 10 ; puis elle continue sans se tromper pour les deux carrés en ligne du deuxième trou et les trois carrés en colonne du troisième trou, arrivant ainsi à l'écriture 15, elle termine en revenant au premier trou pour écrire 16 sur un carré oublié et bien délimité par la découpe de deux côtés. Elle conclut en écrivant 16 en gros caractères, 16 étant le dernier nombre qu'elle a probablement énoncé (on remarque qu'elle avait bien oublié ce seizième carré puisqu'elle avait d'abord conclu 15).

Léo :

On peut faire l'hypothèse qu'il évalue globalement par lignes (par colonne pour le troisième trou) la partie occupée par un carré de chocolat en dessinant un gros point au centre approximatif de son emplacement présumé ; pour cela il s'aide des lignes de carrés existantes mais ne prend pas en compte l'alignement des colonnes. Puis il dénombre les points dessinés, sans doute par comptage et conclut en écrivant 17.

Manon :

Elle a voulu visualiser tous les carrés de la tablette et a reconstitué à la main le quadrillage en s'appuyant sur les parties de lignes et colonnes existantes. Puis elle effectue le dénombrement des carrés de chacun des trois trous qu'elle additionne en colonnes. Pour le premier trou elle compte par lignes et utilise une écriture additive pour noter le nombre de carrés qu'elle calcule alors correctement (13). Elle conclut justement en écrivant son résultat final calculé 18.

Dylan :

Il visualise non des carrés, mais des barres de chocolat (5 barres en lignes et 1 barre en colonne) et confond donc carré et barre. Il dénombre alors ces barres en

les comptant et en écrivant successivement chaque nombre de la comptine de 1 à 6.
Il conclut en écrivant le cardinal trouvé : 6.

Question 2

Qualités et erreurs des productions

Remarque :

Certaines des qualités énoncées dans ce tableau doivent faire partie des acquis d'un élève en cours de C.P.

	Qualité(s)	Erreur(s)
Charlotte	a compris le problème. connaît la comptine et l'écriture des nombres jusqu'à 16. sait que le dernier nombre énoncé désigne le nombre total (principe cardinal).	oublie 3 carrés centraux dans le 1 ^{er} trou. ajoute un carré inexistant, compté comme le 9 ^{ème} . écrit le chiffre 7 "en miroir".
Léo	a compris le problème. a cherché à visualiser tous les carrés. sait dénombrer une collection de 17 éléments.	oublie un carré central à la 3 ^{ème} ligne du 1 ^{er} trou.
Manon	a compris le problème. sait visualiser les carrés en retrouvant et en traçant le quadrillage disparu. explicite sa démarche par un calcul additif en ligne, puis en colonne. utilise et maîtrise l'écriture additive et les calculs additifs.	aucune erreur.
Dylan	a compris le sens du problème. possède le principe cardinal (pour une collection de 6).	n'a pas compris ce que représentait un carré de chocolat.

Remarque :

Pour Charlotte et Léo, les difficultés ne sont pas d'ordre numérique mais d'ordre spatial.

Question 3

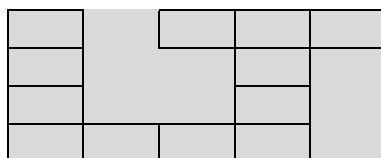
Remédiations envisageables

Après avoir précisé à Dylan la différence entre une barre de chocolat et un carré de chocolat, le maître pourrait alors distribuer à chaque élève le nombre de carrés de chocolat (découpés dans du carton à l'échelle de l'illustration de l'exercice) qui correspond à sa réponse et leur demander s'ils parviennent avec ces carrés à reconstituer la totalité de la tablette de chocolat. Cette étape déboucherait pour chacun sur le constat de son erreur ou de sa réussite, c'est la première étape de

toute démarche de remédiation. Il arrive que cette étape permette aussi aux élèves de découvrir la cause de leur erreur, il suffit alors de leur proposer un exercice semblable au précédent pour leur permettre de réinvestir leur découverte et s'assurer ainsi de la validité de leur procédure que le maître confirmera.

Si après cette première étape de constat les élèves ne parviennent pas à analyser les causes de leur erreur, le maître leur proposera une nouvelle situation en prévoyant des aides adaptées en fonction du type d'erreur commise :

- Pour Dylan si les explications précédentes n'ont pas suffi à lui faire prendre conscience de la différence entre barre et carré, le maître peut par exemple lui proposer un petit quadrillage du type 5x4 sur papier blanc avec 2 trous, l'un de 5 carrés, l'autre de 3 carrés, et lui demander : « Voici un tableau avec des cases ; certaines ont leurs bords effacés. Essaie de colorier toutes les cases avec deux couleurs différentes, jaune et rouge ; deux cases voisines par un bord ne doivent pas être de la même couleur. »



Il peut aussi lui proposer un transparent portant un quadrillage de même taille pour contrôler, par superposition, son coloriage.

Puis il peut lui donner un quadrillage équivalent à la tablette de chocolat avec ses trois trous et lui demander de dessiner les carrés manquants et de les dénombrer.

- Pour Charlotte et Léo le maître peut leur donner une consigne comme « Dessine tous les carrés du premier trou en t'aidant d'une règle ». Cette aide peut être efficace en leur apprenant ainsi à visualiser tous les carrés, s'ils rétablissent le quadrillage. Il peut, là aussi, leur proposer un quadrillage sur transparent comme moyen de contrôle avant de leur proposer de dénombrer les carrés manquants.

Remarque :

Le fait de produire une réponse erronée à ce problème en cours de CP ne signifie pas qu'il y a nécessité de mettre en place une remédiation pour ces élèves. Les propositions faites sont plutôt des propositions d'aide à la compréhension et à la résolution du problème.

SECOND VOLET (8 POINTS)

Remarque :

Ces deux élèves Mathieu et Mathilde sont fictifs et peu vraisemblables. Cependant on peut bien sûr décrire leurs procédures.

Question 1

Niveau de classe

Les exercices de l'annexe 2 concernent des additions à trou, des soustractions à trou, des multiplications à trou et des divisions à trou (avec reste nul) sous la forme du jeu « le nombre pensé ».

Les calculs additifs utilisent des nombres inférieurs à 2500. Les notions de multiple (inférieur à 1000) et de diviseur d'une part, de « n fois plus grand », « n fois plus petit » d'autre part, et de division euclidienne avec reste nul et diviseur à un chiffre doivent être acquises pour faire ces exercices.

On est donc nécessairement au cycle 3, en CM1 ou en CM2 selon les progressions choisies par le maître de la classe.

Remarque :

On pourrait penser aussi à une classe de CE2 en fin d'année, en particulier pour les problèmes additifs, malgré une difficulté certaine dans la gestion des informations. Cependant un problème multiplicatif tel que le "quatrième nombre pensé" est difficile même si les notions de multiples et diviseurs sont travaillées en CE2 : remplacer 762 par un nombre comme 624 permettrait à l'élève de reconnaître plus facilement un multiple de 6.

Question 2 a

Calculs de Mathieu

- Situation 1 : « Je cherche ... + 47 = 141 »

70 + 47 = 117	c'est plus de 70
90 + 47 = 137	c'est plus de 90
100 + 47 = 147	c'est moins de 100
C'est donc entre 90 et 100	
95 + 47 = 142	c'est moins de 95
94 + 47 = 141	Gagné ! C'est 94 !
- Situation 2 : « Je cherche ... - 32 = 127 »

200 - 32 = 168	c'est moins de 200
180 - 32 = 148	c'est moins de 180
150 - 32 = 118	c'est plus de 150
160 - 32 = 128	c'est moins de 160
159 - 32 = 127	Gagné ! C'est 159 !

Question 2 b

Comparaison des procédures utilisées par les deux élèves

Procédure de Mathieu :

Il comprend le problème et le traduit immédiatement par une écriture additive (ou soustractive) à trou. Il procède alors par essais raisonnés ; il commence en choisissant un nombre qui est un nombre entier de dizaines et suffisamment petit dans la situation 1 (en gros la moitié du nombre 141 à obtenir) ou suffisamment grand dans la situation 2 (en gros le double du nombre 127 à obtenir) ; il traduit son raisonnement par une écriture additive ou soustractive et compare la somme ou la différence trouvée au nombre à obtenir ; il ajuste en conséquence son essai suivant en choisissant soit un nombre plus grand, soit un nombre plus petit pour essayer de trouver le nombre pensé.

Procédure de Mathilde :

Elle comprend le problème et tout de suite se représente mentalement la droite numérique avec le nombre pensé comme un point (inconnu) sur cette droite ; toujours mentalement elle schématise et code la transformation additive (ou soustractive) opérée sur ce "nombre point" par un saut en avant puisqu'on ajoute (ou en arrière puisqu'on retire) ; elle visualise le nombre obtenu sur sa droite et constate qu'il est à droite donc plus grand que le nombre pensé (ou à gauche donc plus petit). En comparant alors ces deux nombres (le nombre pensé qu'elle a placé en premier et le nombre obtenu après l'action de la transformation) elle déduit immédiatement l'écriture du nombre pensé sous forme de différence (ou de somme) en appliquant la transformation réciproque (inverse) au nombre obtenu. Il reste à effectuer le calcul.

Comparaison des deux procédures :

La procédure de Mathilde aboutit à une écriture soustractive ou additive du nombre pensé et il faut encore mener à bien un calcul pour avoir son écriture usuelle. Elle est cependant plus rapide que la procédure par essais, même raisonnés. Elle utilise une représentation efficace des nombres et des problèmes additifs de transformation (ici avec état initial inconnu) et amène à lier une transformation et sa transformation réciproque (donc addition et soustraction).

La procédure de Mathieu s'appuie sur la reconnaissance de l'écriture additive ou soustractive à trou traduisant l'énoncé, donc sur l'opération mise en jeu par l'énoncé, puis sur une bonne maîtrise du sens des calculs menés avec les différents essais, et en surmontant la gestion complexe des comparaisons et des ajustements à en déduire, par exemple dans la situation 1 : avec 70 j'obtiens 117, 117 est plus petit que 141, donc j'essaie avec un nombre plus grand que 70.

Ces deux procédures s'appuient sur la comparaison des nombres (plus grand, plus petit) qui, soit guide les essais de Mathieu, soit induit pour Mathilde la transformation réciproque.

Question 3

Analyse de la progression proposée

Un premier élément de progression est la nature des opérations mathématiques travaillées ; le premier exercice concerne le champ additif (addition et soustraction) ;

le deuxième concerne le champ multiplicatif (multiplication et division euclidienne avec reste nul) ; le troisième exercice mêle les deux champs.

Un deuxième élément tient à une succession de 3 phases : d'abord présentation du jeu du nombre pensé et de la méthode de Mathieu, détaillée mais que les élèves doivent mener à son terme, et de la méthode de Mathilde en bande dessinée de 4 vignettes qui la détaillent complètement (il reste à effectuer le calcul), ceci dans le champ additif ; puis phase 2 (exercice 2) dans le champ multiplicatif avec la méthode de Mathilde présentée en une vignette avec le 3^{ème} jeu et seulement amorcée avec le 4^{ème} jeu ; enfin la phase 3 (exercice 3) est une phase d'entraînement proposant 4 jeux dans le champ additif et 4 jeux dans le champ multiplicatif mêlés, suivis d'une demande d'invention de deux autres jeux pour renforcer la compréhension.

On privilégie la méthode de Mathilde qui occupe une place plus importante que celle de Mathieu, cette dernière disparaissant d'ailleurs rapidement ; à chaque nouveau calcul on laisse de plus en plus d'étapes à la charge de l'élève qui est censé devenir capable de s'en sortir tout seul après ce guidage évolutif.

Certes on trouve aussi dans cette phase d'entraînement des nombres plus grands (dans le champ additif : F et G), mais cela ne paraît pas un élément déterminant de progression.

Remarque :

La procédure de Mathilde évoquée dans le champ additif/soustractif (droite numérique) n'est évoquée que partiellement dans le champ multiplicatif. Il n'est pas évident que les élèves transfèrent l'utilisation de la droite numérique dans la recherche du nombre pensé dans le champ multiplicatif : « 3 fois moins » ne se traduit pas aussi facilement que « 3 de moins » sur ce support et la transformation inverse est donc plus difficile à prendre en compte par l'intermédiaire de ce support.

Question 4

Cas des élèves en difficulté qui n'entrent pas dans les procédures décrites

On ne s'intéresse pas dans cette question aux difficultés liées aux apprentissages de l'addition, de la soustraction, de la multiplication ou de la division.

On peut remarquer que les procédures décrites sont des procédures modélisées, c'est-à-dire exécutées savamment par un hypothétique élève expert qui comprend, raisonne, déduit et calcule bien.

Même pour des élèves qui ne sont pas en difficulté, il n'est pas souhaitable de les faire travailler directement sur cette page.

La situation du nombre pensé doit d'abord être comprise par l'élève donc bien mise en scène par le maître ; par exemple le maître peut utiliser une calculette¹ : « Je pense à un nombre et je le tape sur ma calculette » ; il choisit un élève témoin qui note secrètement ce nombre et pourra ainsi valider les propositions des autres ; « Je tape + 47, je tape sur la touche = et j'obtiens 141. » et il montre l'écran de sa calculette : « Quel était le nombre de départ ? ».

Le fait de permettre aux élèves de se servir, eux aussi, de leur calculette, peut alors débloquer certains élèves, mauvais calculateurs, qui vont s'approprier plus facilement la méthode de Mathieu.

¹ Cf. livre du maître CM2 page 100, éditions Retz.

Mais c'est la méthode de Mathilde qui est centrale dans cet apprentissage, et pour l'acquérir, il est nécessaire d'être familier et sûr avec l'utilisation de la droite numérique, en particulier savoir placer les uns par rapport aux autres différents nombres (sans se préoccuper d'échelle à respecter), savoir associer l'addition à un déplacement sur l'axe dans le sens des valeurs croissantes, et associer la soustraction à un déplacement sur l'axe dans le sens des valeurs décroissantes. Il faudrait aussi les inciter à schématiser eux-mêmes sur feuille « comme Mathilde ».

Remarques :

La difficulté du jeu du nombre pensé réside plus dans la traduction de la situation que dans le calcul : les mots utilisés induisent des transformations qui, si elles ne sont pas inversées, aboutissent à un résultat erroné.

Proposer des questions intermédiaires du style « Je pense à un nombre, je lui ajoute 10 ; je trouve 184. Le nombre auquel j'ai pensé est-il plus petit ou plus grand que 184 ? Est-il avant ou après 184 ? » peut contribuer efficacement à la compréhension de la situation.

Pour des élèves en difficulté, leur proposer (avant les exercices avec la calculatrice) des nombres avec lesquels ils n'ont pas de difficultés calculatoires peut aussi les aider à se construire des représentations du jeu.

Question 5 a
Intentions de l'auteur

Comme le dit le titre, les intentions de l'auteur sont de rendre le plus explicite possible pour les élèves le lien entre addition et soustraction d'une part, et entre multiplication et division ("exacte") d'autre part. Plus précisément il veut diffuser la procédure de Mathilde qui s'appuie sur la représentation des nombres à l'aide de la droite numérique, et la perception d'une transformation (additive ou multiplicative) et de sa transformation réciproque ; ainsi l'élève apprendra que le "nombre trou" de $\dots + 47 = 141$ peut être calculé par $141 - 47$, ou que le "nombre trou" de $\dots : 3 = 14$ peut être calculé par 14×3 .

Sont alors associées les notions :

- d'addition et soustraction
- de multiple et diviseur
- de multiplication et division euclidienne "exacte"²

Question 5 b

Remarque préalable :

Cette question est vraiment délicate à interpréter. Qu'entendent les auteurs du sujet par « ce support » ? Serait-ce le jeu du nombre pensé ? Serait-ce la progression en 3 étapes ? Serait-ce la présentation de méthode sous forme de bande dessinée ? Serait-ce la présentation de la méthode précise de Mathilde ?

Et que veulent-ils dire par « dans une situation d'apprentissage » ? Serait-ce que, pour eux, cette séquence 29 n'est pas une situation d'apprentissage ? Ou encore

² L'expression correcte est division euclidienne avec reste nul.

doit-on raisonner pour une situation d'apprentissage d'une quelconque notion mathématique ?

Il est raisonnable de décider que le support désigne l'ensemble de l'annexe 2 ; qui en fait est le montage de deux pages successives du manuel (pages 44 et 45) auxquelles on a enlevé de courtes informations (principalement destinées au maître). Et la question portant sur « une situation d'apprentissage » relève certainement d'une réflexion pédagogique et didactique sur les méthodes d'enseignement.

L'important pour un maître est de proposer un réel apprentissage à tous ses élèves, et pas seulement aux élèves les plus experts.

Il faut donc proposer des situations qui vont prendre du sens pour tous les élèves parce qu'ils doivent agir (et pas seulement manipuler) et donc s'impliquer personnellement. Il est nécessaire aussi que l'élève prenne conscience de son propre raisonnement, donc qu'il soit amené à formuler ce qu'il a essayé de faire, à en débattre avec d'autres, à comparer les procédures découvertes (selon leur rapidité, fiabilité, efficacité).

Les réponses données aux questions 3 et 4 montrent que ce support ne satisfait pas à ces conditions ; bien sûr des élèves déjà experts sauront identifier les procédures de Mathieu et Mathilde, les comparer, se les approprier et choisir celle de Mathilde.

Mais avec cette démarche on ne fait que montrer ce qu'il faut faire, on oblige l'élève à adopter la procédure de Mathilde par un guidage contraint sans étapes évolutives possibles, on passe donc directement à l'apprentissage d'une procédure experte sans expérimenter de procédures personnelles et on demande alors d'appliquer : où sont les essais de procédures personnelles ? L'élève ne pourra ni s'impliquer, ni analyser et dépasser les erreurs commises lors de ses essais : que pourra-t-il alors vraiment apprendre ?

On est de plus en contradiction nette avec les programmes 2002 du cycle 3 :

« ...Pour cela, il est nécessaire de prendre en compte les démarches mises en œuvre par les élèves, les solutions qu'ils élaborent, leurs erreurs, leurs méthodes de travail, et de les exploiter dans des moments de débat. »

**BORDEAUX, CAEN,
CLERMONT-FERRAND, LIMOGES,
NANTES, POITIERS, RENNES**

Note préliminaire :

Dans le corrigé qui suit, le texte en italique correspond à des compléments de formation. Ces remarques ne sont pas exigibles du candidat, elles visent à enrichir l'étude du sujet.

PREMIER VOLET (12 POINTS)

**PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS)
MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.**

EXERCICE 1

Question 1

Tableau complété

Pour arrondir les résultats au dixième, nous avons arrondi au plus proche du dixième.

Nombre d'enfants : n	Nombre d'élèves	Pourcentage d'élèves dont la famille comporte n enfants
1	5	19,2 X
2	10	38,5 X
3	6 X	23,1 X
4	5	19,2 X
5 ou plus	0	0

Question 2

Nombre d'élèves ayant au moins deux frères et sœurs

S'ils ont deux frères et sœurs au moins, c'est que le nombre d'enfants est au moins 3. La réponse est donc $6 + 5 = 11$

Réponse : 11.

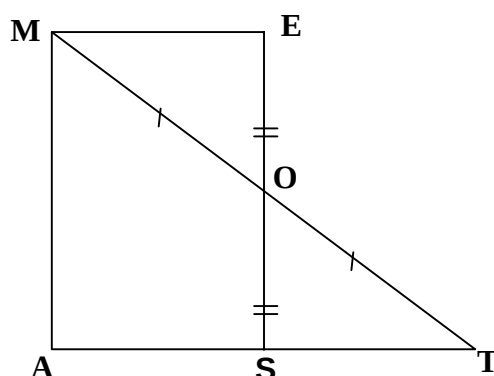
Question 3

Un nouvel élève arrive, il a deux sœurs...

Les cases concernées sont cochées sur le tableau ci-dessus. Si cet élève a deux sœurs, cela signifie qu'ils sont trois dans la famille, ce qui a pour conséquence la modification de l'effectif d'élèves de familles de 3 : 7 à la place de 6 (**croix dans la troisième ligne de la deuxième colonne**).

Tous les pourcentages seront modifiés en conséquence (**croix dans la troisième colonne**).

EXERCICE 2



Question a

Aire du triangle MAT

Le demi-périmètre est : $p = \frac{4,2 + 5,6 + 7}{2} = 8,4$ (en cm)

$$\begin{aligned}\text{aire (MAT)} &= \sqrt{8,4 \times (8,4 - 4,2) \times (8,4 - 5,6) \times (8,4 - 7)} \text{ (en cm}^2\text{)} \\ &= \sqrt{8,4 \times 4,2 \times 2,8 \times 1,4} \\ &= \sqrt{138,2976}\end{aligned}$$

Aire (MAT) = 11,76 (en cm²)

Question b

Calcul de l'aire d'une autre façon

Les mesures des côtés permettent de conclure que le triangle vérifie l'égalité suivante :

$$7^2 = 4,2^2 + 5,6^2.$$

Cette égalité permet, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, de conclure que le triangle MAT est rectangle en A.

L'aire de ce triangle est égale à $\frac{MA \times AT}{2}$, ce qui donne : $\frac{4,2 \times 5,6}{2} = 11,76$.

L'aire du triangle est donc 11,76 cm²

Question c
Aire du triangle TOS

Plusieurs démonstrations sont possibles :

Méthode 1 : A partir de la droite des milieux
(OS) est parallèle à (AM), l'angle TAM est droit, donc l'angle TSO est droit. De plus
 $MA = 2 OS$. Comme on sait que $AT = 2ST$ alors

$$\text{Aire}(\text{MAT}) = \frac{MA \times AT}{2} = \frac{2OS \times 2ST}{2} = 4 \text{ aire}(\text{TOS}).$$

$$\text{Donc aire}(\text{TOS}) = \frac{11,76}{4} = 2,94 \text{ (en cm}^2\text{)}$$

Méthode 2 : En se servant de l'homothétie de centre T et de rapport $\frac{1}{2}$ qui fait passer
du point M au point O et du point A au point S (cf. la droite des milieux).

Les deux triangles MAT et OST sont homothétiques, leurs aires sont dans le rapport
le carré du rapport d'homothétie, donc $\text{aire}(\text{TOS}) = \frac{\text{aire}(\text{MAT})}{4}$

$$\text{Aire}(\text{TOS}) = \frac{11,76}{4} = 2,94 \text{ (en cm}^2\text{)}$$

Question d
Aire du quadrilatère MASE

E est le symétrique de S par rapport à O et on sait que O milieu de [MT].

La droite (ME) est donc la transformée de la droite (ST) par la symétrie de centre O,
donc (ST) et (ME) sont deux droites parallèles, donc [ME] et [AS] sont parallèles.

D'après le théorème de la droite des milieux appliqué au triangle MAT, (SE) et (AM)
sont deux droites parallèles.

Par suite, le quadrilatère MASE a ses côtés opposés parallèles deux à deux ; c'est
donc un parallélogramme.

De plus l'angle $\widehat{ATM}$ est droit. Le quadrilatère MASE est donc un rectangle.

Son aire est obtenue :

Méthode 1 : en effectuant le produit de sa largeur par sa longueur.

$$\text{Aire}(\text{MASE}) = MA \times AS$$

$$MA \times AS = 4,2 \times 2,8$$

$$\text{Aire}(\text{MASE}) = 11,76 \text{ (en cm}^2\text{)}.$$

Méthode 2 :

Une autre solution possible consiste à comparer les aires des triangles TOS et MOE
(égales par symétrie centrale). On a alors :

$$\text{Aire}(\text{MASE}) = \text{Aire}(\text{MASO}) + \text{Aire}(\text{MOE})$$

$$\text{Aire}(\text{MASE}) = \text{Aire}(\text{MASO}) + \text{Aire}(\text{TOS})$$

$$\text{Donc Aire}(\text{MASE}) = \text{Aire}(\text{MAT}).$$

En utilisant le résultat de la question b : **Aire(MASE) = 11,76 (en cm²).**

Question e

Comparaison des périmètre de MAT et de MASE

Méthode 1 :

Le périmètre de MASE est $2(MA + AS)$, soit 14 cm.

Le périmètre du triangle TAM est $MA + AT + MT : 4,2 \text{ cm} + 5,6 \text{ cm} + 7 \text{ cm} = 16,8 \text{ cm}$

Ces deux figures ont même aire et n'ont pas même périmètre.

Méthode 2 :

le périmètre de MASE est : $MA + AS + SO + OE + EM = MA + AS + 2SO + EM$

le périmètre de MAT est : $MA + AS + ST + TO + OM = MA + AS + ST + 2TO$ (1)

Or, $ST = ME$ (symétrie centrale de centre O).

$MA + AS + 2SO + EM = MA + AS + 2SO + ST$ (2)

La comparaison de (1) et (2) se réduit à la comparaison de SO et de TO.

$TO > SO$ (TO longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle et SO longueur d'un côté) Cela implique donc : périmètre de MASE $>$ périmètre de MAT.

Ces deux figures ont même aire et n'ont pas même périmètre.

EXERCICE 3

Question I

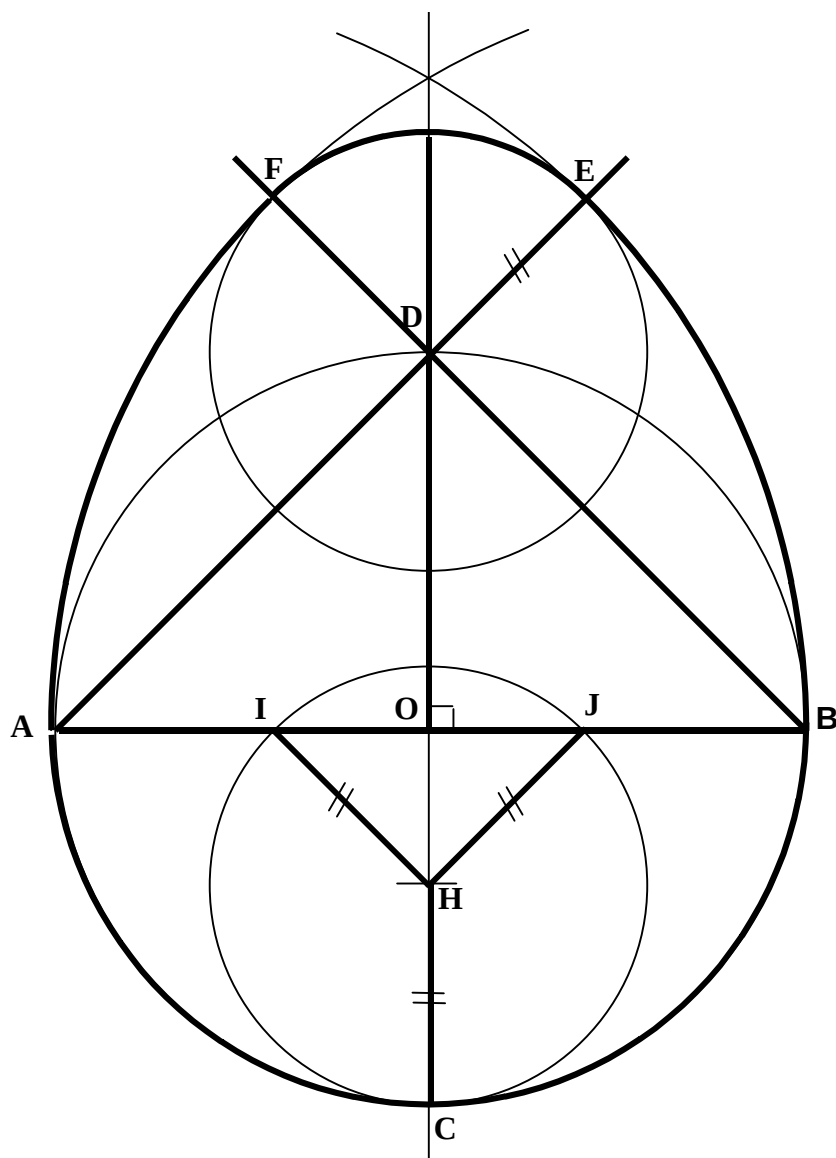
Reproduction du dessin avec $OB = 5\text{cm}$

Remarque :

Dans ce corrigé, nous avons tracé la figure à l'échelle demandée à des questions de reprographie près. Dans ce type de question, le jury est attentif aux traits de construction qui permettent de comprendre comment le candidat est parvenu à reconstruire la figure.

Nous rédigeons brièvement des éléments du programme de construction se basant sur la figure d'origine, bien que cela ne soit pas demandé dans le sujet :

- Tracer le cercle de centre O et de rayon 5 cm,
- Tracer un diamètre [AB] de ce cercle,
- Tracer le diamètre [CD] perpendiculaire à [AB],
- Tracer les demi-droites [AD) et [BD),
- Tracer les arcs de cercle $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de centres respectifs A et B, et de rayon AB ;
 $\mathcal{C}_1$ coupe [AD) en E et $\mathcal{C}_2$ coupe [BD) en F.
- Tracer l'arc de cercle de centre D, passant par E et F, situé au-dessus de D,
- Tracer alors le point H sur le segment [OC] tel que $HC = DE$,
- Tracer le cercle de centre H et de rayon HC ; il coupe [AB] en I et J.
- Tracer [HI] et [HJ].



Question II 1 a

Calcul de DE et de OH

A, D et E sont dans cet ordre sur la droite (AE). Donc $DE = AE - AD$.

Calculons AD :

Le triangle ODA est rectangle isocèle par construction, donc $AD = OA\sqrt{2}$,
c'est à dire $AD = 5\sqrt{2}$.

Le rayon du cercle de centre A passant par B et E est 10 cm donc la longueur de [AE] est 10 cm.

$$DE = AE - AD \quad \text{d'où } DE = 10 - 5\sqrt{2}.$$

$$\text{OH} = \text{OC} - \text{HC}$$

$$OH = 5 - (10 - 5\sqrt{2}) = 5 - 10 + 5\sqrt{2} = 5\sqrt{2} - 5$$

D'où $\text{OH} = 5(\sqrt{2} - 1)$

Question II 1 b

Mesure de l'angle $\widehat{IJH}$

Le triangle JHI est isocèle par construction. Montrons que l'angle en H de ce triangle est un angle droit.

Cinq démonstrations possibles :

Méthode 1 : (trigonométrie)

L'angle $\widehat{IJH}$ est aussi l'angle $\widehat{OJH}$. Le fait de calculer le sinus de cet angle et qu'il soit aigu nous permettra de calculer sa mesure.

Le triangle HOJ est rectangle en O et $HJ = HC$ (rayons du cercle de centre H passant par C).

$$CH = DE = HJ = 5(2 - \sqrt{2})$$

$$OH = OC - CH = 5(\sqrt{2} - 1)$$

$$\sin(\widehat{OJH}) = \frac{OH}{HJ} = \frac{5(\sqrt{2} - 1)}{5(2 - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 2)}{(2 - \sqrt{2})(\sqrt{2} + 2)} = \frac{2 - \sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2}{2\sqrt{2} - 2 + 4 - 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(on utilise la quantité conjuguée $2 + \sqrt{2}$ du dénominateur pour rendre le dénominateur rationnel).

Donc l'angle $\widehat{IJH}$ vaut 45° .

Méthode 2 : (utilisant le théorème de Pythagore)

On connaît $OH : 5(\sqrt{2} - 1)$. On connaît $HJ : 5(2 - \sqrt{2})$, car $HJ = DE$.

Dans le triangle OJH, rectangle en O, utilisons le théorème de Pythagore :

$$HJ^2 = OJ^2 + OH^2,$$

$$OJ^2 = HJ^2 - OH^2$$

$$OJ^2 = 25(3 - 2\sqrt{2})$$

Or $OH^2 = 25(3 - 2\sqrt{2})$ donc OJH est rectangle isocèle en O. Donc $\widehat{OJH} = 45^\circ$

Donc l'angle $\widehat{IJH}$ vaut 45° .

Méthode 3 : (utilisant la réciproque du théorème de Pythagore)

En reprenant la démonstration précédente, après $OJ^2 = 25(3 - 2\sqrt{2})$, on montre l'égalité de IJ^2 et de $IH^2 + HJ^2$. La réciproque de Pythagore permet de dire que IJH est rectangle en H. On sait de plus que $IH = HJ$. Ce triangle est donc isocèle rectangle.

Donc l'angle $\widehat{IJH}$ vaut 45° .

Méthode 4 : (utilisant le théorème de Thalès)

On peut comparer $\frac{OH}{OD}$ et $\frac{HJ}{DA}$:

$$\frac{OH}{OD} = \frac{5(\sqrt{2} - 1)}{5}$$

$$\text{donc } \frac{OH}{OD} = \sqrt{2} - 1$$

$$\frac{HJ}{DA} = \frac{DE}{DA}$$

$$\text{donc } \frac{HJ}{DA} = \frac{5(2-\sqrt{2})}{5\sqrt{2}}$$

$$\text{soit } \frac{HJ}{DA} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{(2-\sqrt{2})\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-2}{2} = \sqrt{2}-1$$

Les rapports sont égaux.

La réciproque du théorème de Thalès permet de justifier le parallélisme de (HJ) et (AD). Le triangle DAO est rectangle isocèle par construction. Donc l'angle $\widehat{DAO}$ vaut 45° . Les angles $\widehat{DAO}$ et $\widehat{IJH}$ sont alternes internes égaux.

Méthode 5 : (utilisant l'homothétie)

On peut comparer $\frac{OH}{OD}$ et $\frac{HJ}{DA}$ qui sont égaux. Les points A et D sont donc les transformés des points J et H dans une homothétie de centre O. L'homothétie conserve les angles, donc les angles $\widehat{DAO}$ et $\widehat{HJO}$ sont égaux.

Question II 1 c

Égalités $CH = JB$ et $DE = JB$

$OB = OJ + JB$; $OC = OH + HC$, donc $JB = OB - OJ$; $HC = OC - OH$.
 $OB = OC$ et OJH est un triangle rectangle isocèle en O (voir question II 1 b, méthode 2), donc $OJ = OH$.

On en déduit :

$$\mathbf{HC = JB.}$$

$HC = DE$ par construction, donc **$DE = JB$**

Question II 2

Aire de la pièce DEB

Aire de la pièce DEB = Aire du secteur de disque EAB – Aire du triangle DAB

Donc, pour calculer l'aire de la pièce DEB, nous calculons l'aire du secteur de disque EAB et l'aire du triangle DAB.

L'aire du disque de centre A et de rayon AB vaut $\pi 10^2$.

L'angle du secteur du disque $\widehat{EAB}$ mesure 45° .

Donc l'aire du secteur vaut $\frac{1}{8}$ de l'aire du disque, car $45 = \frac{1}{8} \times 360$; soit :

$$\frac{1}{8} \pi (10)^2 = 25 \frac{\pi}{2}.$$

L'aire du triangle DAB vaut : $\frac{10 \times 5}{2} = 25$ (en cm^2).

L'aire de la pièce DEB vaut donc : $25 \frac{\pi}{2} - 25$

soit **14,27 (en cm²)**, arrondi au centième de cm² près.

Périmètre de la pièce DEB = DE + DB + Longueur de l'arc $\widehat{BE}$.

Pour calculer le périmètre de cette pièce, il faut donc connaître la mesure de cet arc ;

cela donne : $\frac{1}{8} \times 2\pi \times 10$.

Le périmètre de la pièce est donc :

$$DE + DB + \frac{1}{8} \times 2\pi \times 10 = 10 - 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 2,5\pi,$$

soit **17,85 (en cm)**, arrondi au centième de cm près.

Remarque :

La référence au puzzle de départ, par le mot « pièce », vient tardivement et on peut penser que des étudiants se sont intéressés au triangle DEB plutôt qu'à la « pièce du puzzle ».

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS) ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES
--

Question a

Quatre compétences générales

- Savoir comprendre l'énoncé : dépasser les difficultés langagières : « chaque », « le », « un ».
- Savoir comprendre l'énoncé : dépasser les difficultés liées à la structure de la phrase ; « un stylo à plume pour 25 euro » peut être interprété comme « 25 euro est le prix d'un stylo ».
- Savoir enchaîner des calculs pour résoudre un problème. (il s'agit d'un problème avec question intermédiaire à la charge de l'élève).
- Savoir utiliser l'addition et la soustraction à bon escient.

Question b

Difficultés pour un élève

Les deux difficultés principales sont :

- Il s'agit d'un problème complexe dans lequel les élèves doivent prendre en charge la détermination d'une étape pour répondre à la question.

Cependant, les nombres proposés sont très accessibles et ne doivent plus poser de problèmes majeurs dans les algorithmes opératoires au cycle 3. Le problème est donc bien posé pour travailler avec une question intermédiaire non posée.

- Il s'agit d'un problème de composition d'états (relativement à la classification de G. Vergnaud) dans lequel il faut déterminer une partie après avoir déterminé l'autre et connaissant le tout :

On connaît le prix du tout : 25 € (l'ensemble des achats). On calcule le prix de la première partie : $2 \times 9 \text{ €} = 18 \text{ €}$ (le prix de deux livres). On cherche le prix de l'autre partie : le prix d'un stylo $25 \text{ €} - 18 \text{ €} = 7 \text{ €}$

D'autres difficultés peuvent être évoquées : difficultés langagières (voir plus haut), écriture des nombres en lettres et en chiffres, soustraction avec retenue si l'élève n'utilise pas l'addition à trou.

Question c

Stratégies des élèves

Élève A :

Il réussit après une technique opératoire de la soustraction mal engagée.

Il calcule le prix des deux livres puis il effectue un calcul soustractif en écrivant le nombre le plus petit en premier. Le procédé de calcul de la première soustraction révèle des pertes de sens au niveau de la retenue. Nous pouvons donc penser, en faisant l'hypothèse que l'écrit s'est effectué de gauche à droite, que l'élève a ensuite effectué un calcul soustractif correct en utilisant la technique des différences égales. L'élève donne la bonne réponse et la traduit correctement par une phrase.

Élève B :

Après des essais infructueux au cours desquels il retire le prix d'un livre au prix total, mais ne semble pas continuer (on peut penser qu'il aurait pu réussir en retirant à 16 € le prix du deuxième livre), il finit par utiliser la même stratégie que l'élève A. Le calcul en colonne $16 + 16 = 32$ peut laisser penser qu'il fait comme si Coralie avait acheté 2 livres et 2 stylos.

Élève C :

La première partie de la démarche est correcte (calcul du coût des deux livres) ; l'autre non.

Pour calculer le prix des deux livres, il écrit un calcul en ligne. Ensuite, nous pouvons penser qu'il considère que le stylo coûte 25 € (« ... et un stylo à plume pour 25 € »). Il ajoute les deux résultats comme s'il cherchait le prix total.

Autre hypothèse possible : deux nombres sont là : on les additionne. La conclusion est cohérente avec le calcul, mais erronée.

Élève D :

Un début de démarche correcte qui n'aboutit pas :

Il soustrait une fois le prix d'un livre. Le $25 - 18$ a-t-il écrit avant ou après ? Difficile de savoir.

Nous faisons l'hypothèse que : soit il ne prend qu'un livre en compte, soit il pense que les deux livres coûtent 9 €. Le « 1 » rayé est difficilement interprétable. Il s'agit peut-être d'une retenue. La conclusion est cohérente avec le calcul, mais erronée.

Élève E :

Démarche erronée :

il additionne les deux nombres écrits en chiffres dans l'énoncé. Le calcul additif est juste. La conclusion est cohérente avec le calcul, mais erronée.

Question d

Aides pour l'élève E.

Le professeur pourra :

- Mettre en scène matériellement, avec des objets réels et des étiquettes prix, ce problème pour valider, après que les calculs aient été effectués (en tant que prévision), et vérifier si le résultat trouvé est conforme à celui que le milieu matériel fait apparaître.
- Mimer la situation avec des objets réels et des étiquettes prix, en même temps que la résolution du problème, ce qui n'est pas la même remédiation que précédemment.
- Manipuler uniquement de la monnaie.
- Demander à l'élève E de représenter le problème par un dessin.
- Demander à l'élève E de raconter le problème à un pair qui ne connaîtrait pas l'énoncé, en le reformulant à sa façon.
- Reformuler la première phrase qui est ambiguë.
- Poser la question correspondant à l'étape intermédiaire ou demander à l'élève ce qu'il est possible de calculer sans lui donner la question finale.

SECOND VOLET (8 POINTS)

I - DOCUMENT A

Question 1a

Progression des activités

1. Comparaison directe (visuelle ou par superposition) d'aires de surfaces planes¹.
2. Vers la notion d'étalon et d'unité d'aire : aire de surfaces planes obtenues par assemblage de plusieurs exemplaires d'une même surface ; utilisation implicite de l'addition d'aires ; comparaison d'aires de surfaces planes.
3. Introduction d'une unité d'aire – Introduction de la mesure d'une aire, une unité étant choisie.
4. Aire et périmètre d'une surface donnée : mesure des aires et des périmètres de surfaces données. – Vers l'indépendance entre le périmètre et l'aire d'une figure plane.
5. Encadrement de l'aire d'une surface plane non polygonale par les aires de deux surfaces planes polygonales : vers la notion d'aire d'une surface plane quelconque.
6. Choix d'une nouvelle unité d'aire pour déterminer l'aire d'une surface plane.

Remarque :

Lors du passage des comparaisons directes à la mesure, aucun problème nouveau n'est posé : il s'agit d'appliquer.

Question 1b

Support pédagogique pertinent

Les difficultés des exercices sont progressives :

- La situation de découverte encourage à travailler à l'aide de surfaces, à superposer ces surfaces afin de ranger des figures selon la grandeur « aire ».
- Le quadrillage facilite le passage de la grandeur à la mesure,

Mais :

- Les figures A et C sont presque impossibles à comparer même par superposition directe, puisque, centrées l'une par rapport à l'autre, le rectangle dépasse à ses sommets l'autre figure. Ce choix de ces deux figures semble ne pas être en cohérence avec les autres choix. Cela introduit trop tôt (est-ce voulu ?) une difficulté qui serait intéressante à traiter plus tard dans d'autres conditions (figures trop voisines).

¹ Nous rappelons brièvement que la surface est une forme, l'aire une grandeur mesurable (deux surfaces qui ont la même étendue ont la même aire), la mesure est un nombre. Dans l'exercice 3 de l'annexe 3, l'aire semble, à tort, être un nombre : il manque l'unité de mesure.

- Avant d'introduire la mesure, il aurait été intéressant de proposer des activités de comparaison d'aires par découpage et recollement des surfaces.
- Le passage à l'utilisation de la mesure ne répond à aucune problématique nouvelle. *(Par exemple, on aurait pu mettre en scène le fait que l'impossibilité de comparer directement provoque la nécessité de travailler avec un objet intermédiaire qui sera plus tard l'unité).*
- Les indications données sur ce qu'il faut faire laissent peu de place à l'initiative de l'élève. Tout est dirigé, les élèves n'ont seulement qu'à appliquer les consignes.

Question 2a

Activité « Je découvre 1 »

Cet exercice vise un travail de comparaison directe des étendues, par superposition des figures.

Pour que cette activité soit assez simple et surtout faisable, il est nécessaire de modifier les figures A et C et les figures B et F pour les raisons évoquées ci-dessus. Il faut aussi que les élèves aient les figures effectivement découpées (d'où l'usage du papier calque pour conserver les figures sans découper le manuel !)

A partir de là, on peut demander aux élèves de d'abord faire un pari « à vue d'œil », puis de valider (ou d'invalider) leurs paris en leur demandant de trouver un moyen de prouver : dans ce cas, la superposition apparaît comme solution, comme preuve pragmatique, par rapport au problème posé et non pas comme un geste demandé par le professeur.

Ensuite, il convient de faire évoluer la situation en mettant à disposition des figures non directement comparables par superposition, ce qui posera la question de la preuve et donc pourra déboucher sur des découpages / recompositions plus sophistiqués.

Question 2b

Variables didactiques pour l'activité 2

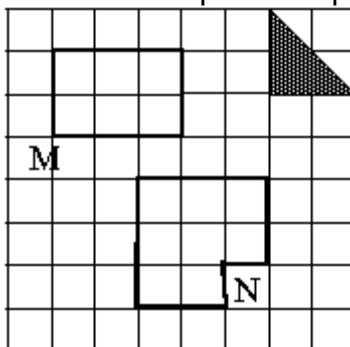
Rappel :

une variable didactique est un élément de la situation qui, modifié par le maître, engendre des procédures de résolution différentes chez les élèves.

- **Le triangle unité objet matériel ou non.**
Soit c'est un objet matériel unique et découpé, soit les élèves disposent d'une grande quantité de triangles unités, soit les élèves n'ont pas le droit de le découper. Selon ces variantes, les procédures vont changer (pavage, découpage-recomposition, ...).
- **Présence/absence des pointillés.**
Les pointillés délimitant les morceaux dessinés, selon qu'il sont présents ou non, changent la nature de la tâche et donc certaines procédures.

- **Forme des figures**

On pourrait citer d'autres variables comme la forme des figures : les figures M et N suivantes ne sont pas construites à partir uniquement de triangles unités.



II – INSERTION DU DOCUMENT B DANS LE DOCUMENT A

Nous faisons l'hypothèse qu'une couche de peinture régulièrement répartie peut donner du sens à la notion d'étendue. En effet la surface est bien représentée par la quantité de papier qui est nécessaire pour former la lettre, et par conséquent la quantité de peinture à poser. Cependant, la comparaison de la quantité de papier seule suffit. Néanmoins cet exercice peut être proposé tôt dans la progression :

Place 1:

Il peut se placer après l'exercice de découverte, puisqu'il s'agit de comparaison par découpage recollement :

Procédure : les élèves peuvent découper les lettres de façon à constituer des alignements (bande) et comparer les longueurs ainsi obtenues.

Place 2 :

Il peut aussi se placer après l'exercice 2 :

Procédure : certains élèves peuvent penser à dessiner un quadrillage et compter le nombre de carreaux obtenus.

III

Question 1

« J'ai appris »

- à comparer des aires :
 - soit en superposant des surfaces
 - soit en dénombrant des surfaces représentant une unité.
- que des surfaces différentes peuvent avoir la même aire.
- à utiliser une unité qui permet, en comparant des nombres, de comparer des aires.
- à encadrer des aires de surfaces qui ne sont pas des polygones.

- *Accessoirement* : j'ai appris que des figures peuvent avoir la même aire mais pas le même périmètre et réciproquement.

Question 2

Obstacles

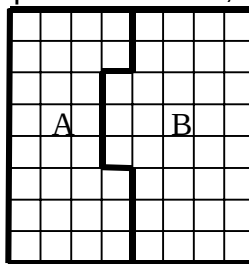
De nature plutôt épistémologique :

Dans les pratiques courantes (usage des photocopies entre autres), la déformation première des figures est l'agrandissement. Dans ce cas, périmètre et aire varient dans le même sens. Cela va constituer un obstacle initial pour la plupart des élèves.

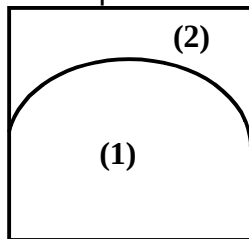
De nature plutôt didactique :

Des figures étudiées sont souvent convexes. L'étude des figures « en creux » permet d'augmenter le périmètre tout en diminuant l'aire.

Ici, la surface A a même périmètre que la surface B, tout en ayant une aire plus petite.



Là une illusion d'optique : l'aire de la partie (1) est visiblement supérieure à celle de la partie (2), les élèves peuvent penser qu'il en est de même du périmètre.



Question 3

Suite à prévoir

- Passer au calcul sur les aires et lier concaténation de surfaces et addition des aires.
- Connaître et utiliser les unités usuelles d'aires : cm^2 , dm^2 , m^2 et km^2 , avec les relations qui permettent de passer de l'une à l'autre : $1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2$, $1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2$, $1 \text{ km}^2 = 1\,000\,000 \text{ m}^2$.
- Calculer l'aire d'un rectangle dont l'un des côtés au moins est de dimension entière.
- Construire une surface qui a même aire (même périmètre) qu'une surface donnée (et qui ne lui est pas superposable).
- Différencier aire et périmètre d'une surface, en particulier savoir que deux surfaces peuvent avoir la même aire sans avoir nécessairement le même périmètre et qu'elles peuvent avoir le même périmètre sans avoir nécessairement la même aire.

CRÉTEIL, PARIS, VERSAILLES

Note préliminaire :

Dans le corrigé qui suit, le texte en italique correspond à des compléments de formation. Ces remarques ne sont pas exigibles du candidat, elles visent à enrichir l'étude du sujet.

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS) MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE 1

Question 1

Le polygone régulier¹ ABCDEFGHIJKL est inscrit dans le cercle de centre O et de rayon R donc dans ce cercle les douze triangles AOB, BOC, COD, DOE, EOF, FOG, GOH, HOI, IOJ, JOK, KOL et LOA sont isocèles car deux de leurs cotés sont de même longueur : la longueur du rayon du cercle.

De plus l'angle au centre de chacun de ces triangles vaut $\frac{360}{12} = 30^\circ$.

Ainsi le triangle AOC est : isocèle (car OA = OC)

avec un angle de 60° ($\widehat{AOC} = \widehat{AOB} + \widehat{BOC}$)

donc il est **équilatéral**.

Chacun de ses côtés a une longueur égale à R.

Question 2

Le polygone ACEGIK est composé de six triangles AOC, COE, EOG, GOI, IOK et KOL tous équilatéraux et dont les côtés ont pour mesure R (on ferait la même démonstration que pour le triangle AOC). Donc le polygone ACEGIK est un **hexagone régulier** : tous ses cotés ont pour mesure R et tous ses angles ont pour mesure $2 \times 60^\circ = 120^\circ$.

¹ Remarque : A cause de la présence du mot « donc », l'énoncé de l'exercice induit l'idée que le fait d'être inscrit dans un cercle implique les égalités d'angles et de côtés.

Un dodécagone régulier est un dodécagone dont les cotés et les angles sont isométriques. Il a alors la propriété d'être inscrit dans un cercle. La confusion est vite faite par les candidats de déduire que, pour qu'un polygone soit régulier, il suffit qu'il soit inscrit dans un cercle, ce qui est faux.

On peut aussi dire que le polygone ACEGIK est un hexagone inscrit dans le cercle de centre O et de rayon R et dont tous les côtés sont de même longueur donc il est régulier.

Question 3

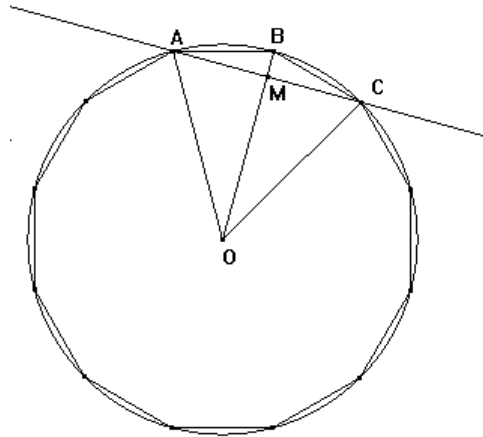
On démontre que la droite (AM) est la hauteur issue du sommet A du triangle ABO.

Méthode 1 :

B est équidistant des points A et C ($BA = BC$) car le polygone est régulier.

O est équidistant de A et C car $OA = OC$ comme rayons du cercle.

Donc la droite (OB) est la médiatrice du segment [AC]. Ainsi les droites (BO) et (AC) sont perpendiculaires en M et on en conclut que la droite (AM) est la hauteur du triangle ABO.



Méthode 2 :

Le dodécagone ABCDEFGHIJKL est régulier donc tous les diamètres du cercle de centre O passant par les sommets du polygone sont des axes de symétrie de la figure. Ainsi la droite (BO) est un axe de symétrie du polygone donc les triangles ABO et BCO sont symétriques par rapport à la droite (BO). On en déduit que (BO) est la médiatrice du segment [AC] donc est perpendiculaire à ce même segment.

Le point M appartenant à la droite (AC), alors la droite (AM) est perpendiculaire à la droite (BO).

Méthode 3 :

(BO) est la bissectrice issue de O du triangle équilatéral AOC (on a prouvé que les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ valent chacun 30°). Dans un triangle équilatéral, les bissectrices et les hauteurs sont confondues donc les droites (BO) et (AC) sont perpendiculaires, et par conséquent les droites (AM) et (BO) sont perpendiculaires.

Recherche de la longueur AM

AOC est un triangle équilatéral donc $AC = OC = OA = R$.

On montre que M est le milieu du segment [AC] :

- soit par le fait que (BO) est la médiatrice du segment [AC] ;

- soit par le fait que bissectrices, médiatrices, médianes sont confondues dans un triangle équilatéral.

Donc $AM = \frac{1}{2} R$.

Question 4

L'aire du triangle AOB est définie par la formule : $(\text{base} \times \text{hauteur}) / 2$.

En appliquant au triangle AOB on obtient : $\frac{R \times \frac{R}{2}}{2} = \frac{R^2}{4}$

L'aire du dodécagone régulier est égale à douze fois l'aire du triangle AOB.

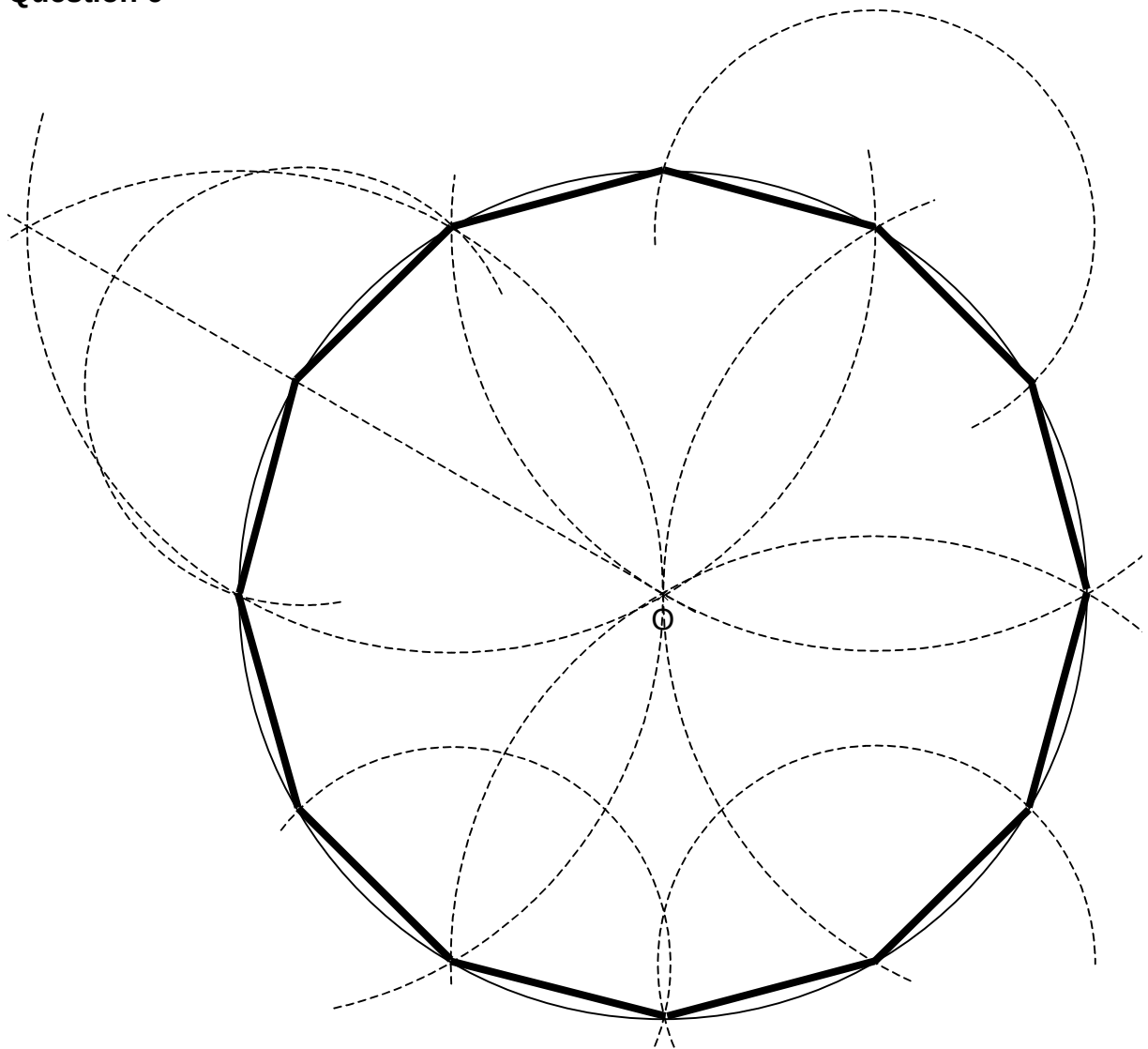
Donc elle vaut : $12 \times \frac{R^2}{4} = 3 R^2$.

Question 5

Pour calculer l'aire du dodécagone inscrit dans un cercle de diamètre 18 cm, on applique le résultat précédent en prenant la valeur de 9 cm pour le rayon R.

L'aire du dodécagone est de : $3 \times 9^2 = 3 \times 81 = 243 \text{ cm}^2$.

Question 6



EXERCICE 2

Soit le nombre $N = 72a83b$

On rappelle une propriété :

Si un nombre p divise un nombre k alors tous les diviseurs de p divisent aussi le nombre k .

Question 1

Méthode 1 :

On déduit de cette propriété que :

- si N est divisible par 6 alors il est divisible par 2 et par 3 ;
- si N est divisible par 45 alors il est divisible aussi par 9 et 5.

Donc sachant que ce nombre N est divisible par 2 et par 5 (deux nombres premiers entre eux), il est divisible par 10 et ainsi il se termine par le chiffre 0. On en déduit que **$b = 0$** .

Méthode 2 :

On déduit de cette propriété que :

- si N est divisible par 6 alors il est divisible par 2 et par 3 ;
- si N est divisible par 45 alors il est divisible aussi par 9 et 5.

Donc si N est divisible par 5, il se termine soit par 0 soit par 5. D'autre part, N est divisible par 2, donc c'est un nombre pair. Seul le chiffre 0 vérifie ces deux conditions. On en déduit que **$b = 0$** .

Question 2

On utilise maintenant le fait que N est divisible par 9 en appliquant le critère de divisibilité par 9 (la somme des chiffres du nombre doit être divisible par 9).

Ainsi la somme $7 + 2 + a + 8 + 3 + 0 = 20 + a$ doit être un nombre divisible par 9, avec $0 \leq a \leq 9$. La valeur de a est donc 7.

Le nombre N cherché est 727830.

EXERCICE 3

Rappel de la définition de la division euclidienne :

$$a = b \times q + r \text{ avec } 0 \leq r < q$$

b : le diviseur ; q : le quotient ; r : le reste.

Si on veut effectuer la division euclidienne de 36 202 par 3748, dans l'expression

$$36\,202 = 9658 \times 3748 + 4560, \text{ on doit obtenir un reste inférieur au diviseur.}$$

Ainsi on écrit $4560 = 3748 + 812$ et on transforme l'expression par :

$$36\,202 = (9658 + 1) \times 3748 + 812 = 9659 \times 3748 + 812$$

Le quotient cherché est donc 9 659.

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS) ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES
--

Remarque :

Il est recommandé aux candidats de résoudre eux-mêmes l'exercice proposé aux élèves pour pouvoir répondre de façon pertinente aux questions posées.

Question 1

L'élève qui n'a pas fait d'erreur est **Justine**.

Cette élève utilise un schéma où elle fait apparaître les durées écoulées entre les heures de départ et d'arrivée du bateau.

Elle calcule ainsi :

- le temps écoulé entre l'heure du départ du bateau (20h) et minuit la fin de la journée (24h). Elle trouve une durée de 4 heures ;
- le temps écoulé entre minuit et l'heure d'arrivée 6h30. Elle trouve une durée de 6h30.

Puis elle additionne ces deux durées et elle trouve une durée totale de 10h30, qui correspond à la durée de la traversée du bateau.

Question 2

La réponse de Rémi

Cet élève additionne les deux données numériques puis effectue une conversion qui est fausse.

Il semble, pour cet élève, y avoir confusion entre la grandeur durée (grandeur mesurable) et la grandeur date (grandeur repérable).

La réponse de Céline

Cette élève a bien calculé un écart entre les horaires de départ et d'arrivée du bateau en effectuant la différence entre l'heure la plus grande (20h) et la plus petite (6h30). Elle ne prend pas en compte le passage au jour suivant d'une part et d'autre part sa soustraction met en évidence une confusion entre les nombres décimaux et les nombres sexagésimaux dans les calculs (1h = 60min et non pas 1h = 100min).

La réponse de Karl

Cet élève fait la même erreur que Céline pour résoudre le problème mais lui ne fait pas d'erreur dans sa soustraction des nombres sexagésimaux.

L'erreur dans la démarche de Céline et de Karl s'explique assez bien car leur procédure de résolution est celle la plus couramment utilisée : on calcule la différence entre l'heure d'arrivée et celle de départ sachant que les situations les plus fréquemment rencontrées mettent en présence des horaires donnés dans la même journée.

Ici il n'y a pas prise en compte de la notion du lendemain.

SECOND VOLET (8 POINTS)

Remarque 1 :

Il est recommandé aux candidats de résoudre eux-mêmes les exercices posés aux élèves pour pouvoir comprendre le déroulement des séances 1 et 2 et ainsi répondre de façon pertinente aux questions.

Remarque 2 :

Il serait raisonnable de supposer que les élèves ont déjà abordé la division euclidienne en classe et donc que ces deux séances ne visent pas à la découverte de la division.

Question 1

Les notions mathématiques mises en jeu dans les séances 1 et 2 :

- Les notions de **quotient** et de **reste** dans la division euclidienne .
- Les notions de diviseurs et de multiples d'un nombre entier.
- Pour la 2^{ème} séance, les notions de critères de divisibilité d'un nombre par 5, par 2 et par 10.

Les connaissances utilisables par les élèves pour ces deux séances :

- pour la 1^{ère} séance :
 - o savoir effectuer la division euclidienne d'un nombre entier par 8 ; c'est à dire savoir calculer son quotient et son reste (éventuellement par une procédure non experte) ;
 - o savoir trouver un nombre, connaissant son quotient et son reste dans la division par 8 ;
 - o connaître les tables de multiplications, en particulier la table de 8.
- pour la 2^{ème} séance :
 - o même chose que pour la première séance mais en utilisant la division euclidienne par 5 et les multiples de 5.

Question 2

Les objectifs de M. LECOLE pour chacune de ses deux séances.

Pour la 1^{ère} séance les objectifs sont par ordre d'importance :

- faire utiliser la division euclidienne par les élèves dans un contexte différent de celui des partages équitables qui est presque toujours celui des problèmes de division. Les élèves vont mettre un certain temps à reconnaître que c'est la division qu'il connaissent qui donne la solution ;
- faire prendre conscience du fait qu'une division euclidienne donne deux résultats (le quotient et le reste) et non un seul comme les autres opérations et que le reste est un résultat qui peut être aussi important que le quotient ;
- faire travailler les élèves sur les valeurs possibles des restes dans une division euclidienne ;

- faire découvrir que par une organisation de la suite numérique des nombres, on obtient de façon immédiate la valeur du quotient et du reste d'une division euclidienne à condition de numéroter les lignes et les colonnes en commençant par le numéro 0 (la 1^{ère} colonne sera nommée la « colonne 0 » et on fera de même pour les lignes).

La deuxième séance :

- faire réinvestir l'organisation de la suite numérique élaborée dans la séance précédente pour la division par 5, par 2 et par 10 ;
- faire ressortir les critères de divisibilité d'un nombre entier par 5, 2 et 10.

Question 3

Pour la pertinence des nombres².

Remarque :

Ici la pertinence cherchée n'est pas une pertinence mathématique puisque tous les nombres proposés sont pertinents ; aucun nombre n'est à éviter. On suppose que la question parle de la pertinence didactique. C'est dans ce sens que la réponse suivante est rédigée.

Pour les nombres 19 et 23, ceux-ci sont dans le tableau mais en posant la question le maître s'assure de la compréhension de l'organisation des nombres ainsi que des termes « ligne » et « colonne ». Ensuite la proposition des nombres 62 et 70 fait appel à un travail d'anticipation de la part des élèves. Ces nombres n'étant pas présents dans le tableau, les élèves doivent élaborer une procédure pour trouver leur place. Ces nombres sont pertinents car ils permettent une mise en situation-

² On pourrait imaginer une variante de la consigne dans la phase 2 . Au lieu d'annoncer qu'on va continuer le tableau en imposant de ne pas le faire immédiatement pour trouver la place de 62 et 70, le maître pourrait laisser les élèves plus libres de leur stratégie en demandant de trouver le plus vite possible la place des nombres. Ainsi pour les élèves qui n'ont pas d'autre idée, il y aurait toujours la stratégie de base qui consiste à écrire effectivement les nombres. D'autres stratégies non écrites dans la préparation de l'enseignant et non demandées par le sujet sont possibles. En voici par exemple deux :

- o compter oralement en assignant une place à chaque nombre sur la première ligne de 0 à 7 et en revenant au 0 chaque fois qu'on a épuisé les huit places c'est à dire à chaque multiple de 8. C'est ce que l'on fait en effeuillant une marguerite où on associe chaque pétale à un mot d'une comptine en boucle. Cette stratégie donne très vite la colonne. Pour la ligne il faut noter combien de fois on passe sur cette première ligne ;
- o remarquer que les multiples de 8 sont toujours dans la première colonne, donc en déduire que 64 multiple de 8 très connu se trouve dans la première colonne et donc que 62 est deux places en arrière. Pour trouver la ligne on écrit seulement la colonne des multiples de 8 jusqu'à 64.

Les stratégies peuvent être assez nombreuses. Il est probable que peu d'élèves penseront à la division euclidienne à ce stade, même s'ils l'ont déjà étudiée. Dans sa préparation l'enseignant prévoit de recommencer plusieurs fois. Les mises en commun successives où on débat à chaque fois de la stratégie la plus rapide parmi celles qui ont été trouvées permettront de s'acheminer vers la division euclidienne.

recherche des élèves, et la réponse pourra être validée par eux-mêmes puisque ces nombres sont assez petits pour être ensuite écrits dans le tableau sans prendre trop de temps.

Le choix ensuite des nombres 784 et 852 prend tout son sens pour aller vers l'institutionnalisation cherchée de l'enseignant. Ces nombres sont situés dans un champ numérique important et il n'est pas raisonnablement possible de les mettre à la suite du tableau déjà construit.

Les nombres à éviter

Du point de vue didactique, ce sont ceux qui sont déjà écrits dans le tableau, donc tous ceux allant de 1 à 25, puis ceux au moins des deux lignes suivantes car facilement mémorisables mentalement et peut-être aussi des multiples de 8 très connus mentalement comme 48 ou 64. Il est assez facile de voir que les multiples de 8 sont dans la première colonne.

Question 4

Remarque :

La question est ici mal posée car qu'attend-on des réponses des candidats ? Est-ce une analyse de la tâche de chaque phase avec les interventions du maître inhérentes à cette tâche ou bien attend-on des candidats une réponse globale sur l'ensemble de la séance ?

Tâche de l'élève selon les différentes phases

Phase 1 collective

Les élèves doivent observer la construction du tableau de nombres par le maître, certains élèves vont compléter cette organisation de la suite numérique devant toute la classe. Puis ils répondent à deux questions en lisant sur le tableau.

Phase 2 en situation individuelle puis collective

Les élèves doivent rechercher la place de deux autres nombres et faire des propositions de stratégie, puis recommencer avec plusieurs autres nombres.

Chaque fois les propositions sont discutées entre élèves et validées par la poursuite de la construction du tableau de nombres. Progressivement ils sont amenés à calculer le quotient et le reste du nombre donné dans la division euclidienne par 8.

Les élèves doivent formuler leurs résultats.

Phase 3 en situation d'application

Les élèves doivent faire les exercices demandés donc réinvestir ce qu'ils semblent avoir élaboré en phase 2.

Phase 4 collective

Les élèves participent à l'élaboration de l'institutionnalisation, à la synthèse de la séquence.

Globalement, les élèves ont la charge et la responsabilité de leur recherche ainsi que la validation de leurs réponses.

Les interventions du maître

Après la présentation du problème par le maître, celui-ci s'assure d'une bonne dévolution de la situation et laisse les élèves chercher seuls à partir de questions didactiquement bien construites. Pour répondre à ses questions les élèves devront faire appel à des connaissances mobilisant le savoir en jeu. Ce savoir n'est à aucun moment mentionné.

Le maître observe puis aide les élèves à formuler leur résultat.

Il institutionnalisera ce savoir en fin de séance mais rien n'est explicité dans le sujet du concours. Il est vrai que la division euclidienne n'est peut-être pas un savoir nouveau pour ces élèves. Néanmoins il est indispensable de faire un bilan à la fin de la séance pour fixer ce qui a été fait avant la séance suivante³.

Question 5

Notions mathématiques en jeu

Dans la séance de M. CALCULUS, les notions mathématiques en jeu sont :

- Les notions de diviseurs et de multiples d'un nombre entier.
- Les critères de divisibilité d'un nombre entier par 2, par 3 ou par 5, puis par 10.
- La propriété sur les diviseurs d'un nombre : « Si un nombre n est divisible par un autre nombre p , alors il est aussi divisible par les diviseurs de p . »

Question 6

Tâche de l'élève et interventions du maître

Remarque :

Le sujet du concours ne mentionne pas si les élèves de M. CALCULUS disposent du support ou pas, ce qui change un peu les réponses proposées dans le corrigé.

La tâche des élèves est ici de répondre aux questions du scénario proposé par le manuel.

Ainsi après avoir lu la consigne de chaque exercice, l'élève répond et attend la correction faite par le maître. L'institutionnalisation est même déjà proposée dans le manuel de l'élève.

Si les élèves ne disposent pas du manuel, on peut penser que le maître aura reproduit les questions sans proposer les institutionnalisations.

³ Ce bilan non demandé par le texte du sujet pourrait être ici :

- o il y a 8 nombres qui donnent le même quotient quand on les divise par 8 avec des restes différents qui vont de 0 à 7.
- o il y a autant de nombres qu'on veut qui donnent le même reste quand on les divise par 8. Par exemple si ce reste est 3, ils sont tous de la forme $8 \times q + 3$ avec $q = 0$, ou $q = 1$, ou $q = 2$, etc....

Donc les élèves se trouvent en situation d'exécutant, peu de recherche, pas d'échanges avec les pairs et surtout des énoncés d'exercice assez pauvres.

Les interventions du maître consistent essentiellement à effectuer une correction de chaque exercice au fur et à mesure de la séance. Il fait ressortir les connaissances à retenir (les notions de multiples et diviseurs, les critères de divisibilités) en s'appuyant sur les écrits du manuel.

Si le maître suit pas à pas la démarche du manuel alors il donne toutes les précisions aux élèves pour que ceux-ci réussissent tous les exercices proposés.

DIJON, NANCY-METZ, REIMS, STRASBOURG

Note préliminaire :

Dans le corrigé qui suit, le texte en italique correspond à des compléments de formation. Ces remarques ne sont pas exigibles du candidat, elles visent à enrichir l'étude du sujet.

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS) MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE 1

Question 1

Obtenir un zéro à l'issue de l'étape 4

Méthode 1 (algébrique) :

Soit x le nombre en entrée. La suite des actions se code :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(4(x + 2) - 20) &= 2(x + 2) - 10 \\ &= 2(x + 2 - 5) \\ &= 2(x - 3)\end{aligned}$$

L'obtention de « 0 » à l'étape 4 se traduit par l'équation suivante : $2(x - 3) = 0$, dont la solution est 3.

Méthode 2 (arithmétique) :

Remontons le cours de la « machine à nombres » :

Sortie	3	
Etape 4	5	Soustraire 2
Etape 3	20	Diviser par 4
Etape 2	0	Ajouter 20
Etape 1	0	Multiplier par 2

On obtient donc le **nombre 3**.

Question 2

Expression en fonction de x des nombres obtenus à chaque étape

Entrée	x	
Etape 1	$x + 2$	Ajouter 2
Etape 2	$(x + 2) \times 4$	Multiplier par 4
Etape 3	$[(x + 2) \times 4] - 20$	Soustraire 20
Etape 4	$\frac{[(x + 2) \times 4] - 20}{2}$	Diviser par 2
Sortie	$2(x - 3)$	

Question 3

Nombre inchangé à l'issue de l'étape 4

Cela se traduit par l'équation $2x - 6 = x$ qui se résout aisément et donne **6** comme solution.

Question 4

Nouvelle machine... Détermination de a et b pour que tout nombre passant dans la machine reste inchangé.

Tout nombre x entant dans la machine se transforme en $(2x - 6)a + b$.

Il est inchangé si et seulement si $(2x - 6)a + b = x$;

ce qui donne $(2a - 1)x + (b - 6a) = 0$.

Cette équation doit être de nature $0x = 0$ (indéterminée) afin qu'elle soit vérifiée quelque soit x, ce qui équivaut au système :

$$\begin{cases} 2a - 1 = 0 \\ b - 6a = 0 \end{cases}$$

ou encore

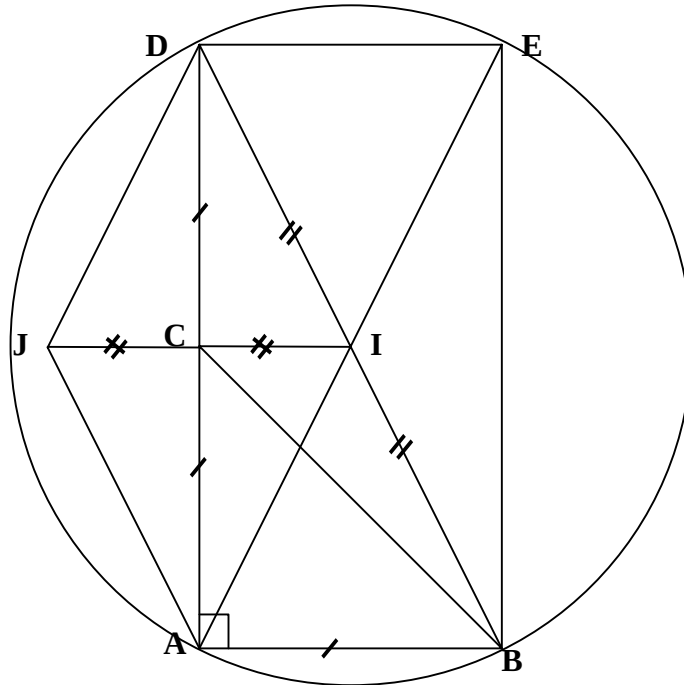
$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 3 \end{cases}$$

La nouvelle machine laisse inchangé tout nombre

si et seulement si $a = \frac{1}{2}$ **et** $b = 3$.

EXERCICE 3

Question 1 Tracé de la figure



La figure contient les codages des résultats liés aux questions qui suivent. Elle est donc réalisée complètement.

Question 2 Droites (CI) et (AB) parallèles

Dans le triangle DAB, C est le milieu de [AD] et I est le milieu de [DB]. D'après le théorème de la droite des milieux appliqué au triangle DAB, **la droite (CI) est parallèle à la droite (AB)** et $CI = \frac{1}{2} AB$.

(On pourrait aussi citer la réciproque du théorème de Thalès).

Question 3 Les points A, B et D et le cercle circonscrit

Trois points non alignés déterminent un cercle.

Précisons le centre et le rayon. Les points A, B et D forment un triangle rectangle en A qui a pour hypoténuse [DB]. Or tout triangle rectangle est inscrit dans un demi-cercle de centre I le milieu de l'hypoténuse et de diamètre cette hypoténuse.

A, B et D sont donc sur un cercle (C) de centre I et de rayon IB. Déterminons ce rayon.

$$AD^2 + AB^2 = DB^2 \quad \text{donc} \quad DB^2 = 8^2 + 4^2$$

$$DB^2 = 80 \quad \text{donc } DB = 4\sqrt{5}.$$

Le rayon du cercle (C) vaut donc **$AI = 2\sqrt{5}$ (en cm)**

Question 4

E appartient au cercle (C)

Soit E le symétrique de A par rapport à I. I est centre de symétrie du cercle, A est sur le cercle (C) donc son symétrique I est sur le cercle.

E appartient donc au cercle (C) de centre I et de rayon IA.

Nature du quadrilatère ABED

Le quadrilatère ABED qui a ses diagonales isométriques (diamètres d'un même cercle) qui se coupent en leur milieu est **un rectangle**.

Remarque :

Ce n'est pas un carré car $AD = 2 AB$.

Question 5

Nature du quadrilatère AIDJ

J est le symétrique de I par rapport à C, donc C est le milieu de [IJ].

(CI) est parallèle à (AB) or (AB) est perpendiculaire à (AD) ; la droite (IC) est donc perpendiculaire à (AD).

De plus C est le milieu de [AD] et aussi le milieu de [IJ].

Un quadrilatère qui a ses diagonales perpendiculaires qui se coupent en leur milieu est un losange.

AIDJ est un losange.

Remarque :

Ce n'est pas un carré car les demi diagonales n'ont pas la même longueur :

$$CI = \frac{1}{2} AC.$$

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS) ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES

Question 1

Analyse en terme de respect de la consigne

La consigne demande de rédiger un énoncé de problème et la résolution de ce problème doit nécessiter le calcul « $(12 \times 35) + 8$ »

Élèves	Traduction par une écriture en ligne de la proposition de l'élève	Commentaires
Céline	$(11 \times 35) + 8$ ou $(12 \times 35) - (35 - 8)$	C'est un énoncé de problème. Mais le calcul du nombre de litres se traduit par : $(12 \times 35) - (35 - 8)$ ou $(11 \times 35) + 8$, si on considère que la bouteille cassée fait partie des 12. Céline ne respecte donc pas la consigne.
Linda	$12 + 35 + 8$.	C'est un énoncé de problème, mais il n'est pas adapté. Le calcul du nombre de livres se traduit par : $12 + 35 + 8$. De plus, Linda ne demande pas le résultat du calcul, mais le calcul à effectuer. Elle ne respecte donc pas la consigne.
Simon	$(12 \times 35) + 8$.	C'est un énoncé de problème. Le calcul du nombre de véhicules se traduit par : $(12 \times 35) + 8$. Simon respecte donc bien la consigne. On peut en outre remarquer qu'il traduit, par une multiplication une disposition rectangulaire d'objets.
Amandine	$12 + (35 \times 12) + 8$.	C'est un énoncé de problème. Mais le calcul du nombre de baguettes se traduit par : $12 + (35 \times 12) + 8$. Elle a voulu introduire le calcul de 35×12 à partir d'une donnée préalable. Elle reprend cette donnée dans l'écriture, mais il aurait fallu demander : « combien de baguettes pour mardi et mercredi ? ». Amandine ne respecte donc pas la consigne.

Rébecca	428 - (12 × 35).	C'est un énoncé de problème. Mais le calcul du nombre de bonbons restants se traduit par : 428 - (12 × 35). Rébecca ne respecte donc pas la consigne.
Loïc	(35 × 12) + 8.	C'est un énoncé de problème. Le calcul du nombre de places se traduit par : (35 × 12) + 8. Loïc respecte donc bien la consigne.
Rachid		Ce n'est pas un énoncé de problème. Il effectue correctement le calcul (35 × 12) + 8 en expliquant ce qu'il fait. Ce n'est pas ce qui lui est demandé. Rachid ne respecte donc pas la consigne.
Marie	428 - 100.	C'est un énoncé de problème. Mais le calcul du nombre de bonbons se traduit par : 428 - 100. La réponse est inadaptée. Marie ne respecte donc pas la consigne.

Question 2

Pour chaque production, situation de l'erreur

Production de Céline :

Elle a bien compris la consigne, le problème met en évidence les trois nombres 12, 35 et 8, mais le résultat n'est pas celui attendu. Elle n'a pas pris en compte que si une bouteille se cassait, il n'y en avait plus que 11 entières. De plus, le problème n'est pas réaliste : les bouteilles de Cola ne contiennent pas en général 35 litres, et lorsque l'on casse une bouteille, on ne récupère pas une partie du contenu.

L'erreur se situe au niveau de la prise en compte de la bouteille cassée : l'énoncé devient difficile à concevoir.

Production de Linda :

Cet énoncé de problème ne traduit pas une situation multiplicative mais une situation additive, la première difficulté se situe donc au niveau **du sens des opérations**. Pour elle, la décision d'effectuer une opération plutôt qu'une autre n'est pas dictée par la situation présentée mais par une injonction : elle indique entre parenthèses les opérations à effectuer (« utilise multiplication et addition »), mais son énoncé n'utilise que l'addition.

Une autre hypothèse d'erreur **serait de la mauvaise compréhension de la consigne** ou une habitude à rédiger des exercices pour lesquels il faut trouver la question sans chercher à y répondre.

Production de Amandine :

Son problème aurait répondu à la consigne si elle avait demandé « combien Tom a acheté de baguettes mardi et mercredi ? ». La formulation de la question est compréhensible mais pas très correcte en français.

La difficulté réside dans la rédaction de l'énoncé. Amandine ne s'est pas rendue compte que l'introduction du « lundi » rajoutait un terme à la somme demandée.

Production de Rébecca :

La difficulté **se situe au niveau de la compréhension de la consigne où l'enseignant** souhaite voir utiliser « $(12 \times 35) + 8$ » et non pas le résultat 428 que Rébecca a calculé préalablement. Cela la conduit à demander le reste de la division euclidienne de 428 par 35.

Production de Rachid :

Rachid se situe dans le cadre d'une explication d'un calcul à effectuer. Il ne semble pas savoir exactement ce qu'est un énoncé de problème.

L'erreur se situe du côté de la compréhension de la consigne.

Production de Marie :

Cette production ressemble à celle de Rebecca. Elle propose un énoncé utilisant le résultat du calcul. Le calcul lui même n'intervient pas dans la résolution.

C'est au niveau de la compréhension de la consigne que se situe la difficulté.

SECOND VOLET (8 POINTS)

PREMIÈRE PARTIE : OUVRAGE DE CE1

Question 1a

Intérêt du tracé à main levée par rapport à un tracé à la règle

Il favorise une perception globale des figures qui permet de mettre en évidence les relations entre points, traits droits ou curvilignes, en se dégageant des problèmes d'exactitude de tracés. Le dessin à main levée permet une reproduction avec une plus grande rapidité.

Il s'agit de faire percevoir des propriétés géométriques avant de les vérifier à l'aide d'instruments de géométrie ou d'utiliser ces derniers pour traduire des propriétés dans des constructions géométriques.

prélever des propriétés de façon perceptive avant d'être amené à utiliser des instruments de géométrie.

Question 1b

Objectif réécrit

Nous proposons :

« Prendre en compte de manière perceptive des rapports de longueur, des alignements et des positions de points représentés par des signes (les respecter visuellement) pour tracer des traits droits ou curvilignes. »

Question 2

Variables didactiques repérées

Les tracés demandés ne sont pas de même nature : dans l'exercice découverte, il s'agit de reproduire plusieurs dessins, dans le premier exercice, une seule figure, dans le second exercice, de repasser sur une figure déjà construite, puis de dessiner une figure identique.

- **Les supports :**

Les deux types de quadrillages du papier de l'annexe 1.2 peuvent induire des procédures de tracés différentes chez les enfants. Pour s'en assurer, il faudrait proposer les deux quadrillages dans un même exercice.

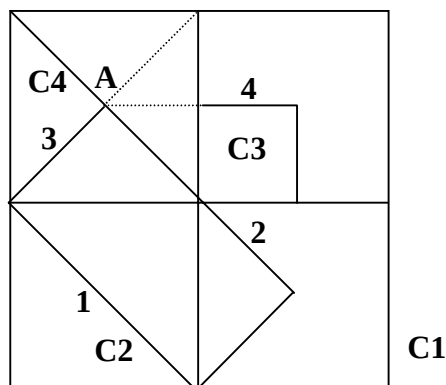
- **Les figures à reproduire sont connexes ou non.** (en un seul tenant ou non)

Lorsque la figure est connexe, le tracé peut être contrôlé localement au fur et à mesure. Il n'y a pas de ruptures, de levé de crayon.

- **La présence ou non de figures repères**
(carré noir pour la situation de découverte et disque, demi disque et rectangles noirs dans l'exercice 1).
Ces figures facilitent le positionnement des segments.
- Le fait que les figures **représentent des dessins connus ou non** des élèves : reproduire un trèfle, un cœur ou une maison est plus simple que reproduire un dessin qui n'évoque rien.
- **La longueur des segments** à reproduire qui complique plus ou moins le positionnement des extrémités. Cela peut aussi se retrouver dans le nombre de carrés traversés
- L'inclinaison des segments à 45° **ou selon un angle différent**. Les inclinaisons à 45° permettent beaucoup plus d'alignements de nœuds que les autres inclinaisons.
- **Possibilité de tracer à main levée ou avec une règle graduée ou non**. Sachant que l'utilisation de la règle graduée nécessite un apprentissage car les élèves qui mesureraient les segments peuvent débiter au bord de la règle ou sur le « 1 »...

Question 3a

Tracé.



Une solution d'ordre possible est indiquée sur le schéma. Il faut l'étape 2 avant l'étape 3. L'étape 4 arrive après l'étape 3. L'étape 1 peut être placée indifféremment

Explication des différentes étapes

Le point de départ étant le carré du centre de la page du manuel : sont déjà tracés le « grand » carré C1 et ses deux médianes ainsi qu'une demi diagonale du « moyen » carré C2 et un segment « vertical » dans le « petit » carré C3.

- étape 1 : tracer la diagonale du carré C2
- étape 2 : tracer une partie de la diagonale du grand carré C1 qui part du sommet « en haut à gauche » ; elle s'arrête à l'extrémité du segment déjà dessiné.

- étape 3 : tracer la demi diagonale (celle non déjà tracée) du carré C4 en « haut à gauche ».
- étape 4 : tracer le côté manquant du carré C3 en remarquant que la droite qui le supporte passe par le point A.

Question 3b

Trois compétences que l'élève doit¹ exercer dans ses tracés à la règle

La tâche consiste à reproduire ou compléter une figure à partir d'un modèle. Les compétences sont :

- Percevoir un alignement d'objets ou de points,
- Percevoir un angle droit,
- Être capable d'organiser les étapes de la construction (compétence méthodologique),
- Être capable d'utiliser :
 - une règle, pour tracer des segments, pour prolonger un segment, pour contrôler des alignements ;
 - une équerre pour contrôler la présence d'angles droits et pour en construire.
- Faire preuve de soin dans les tracés : précision dans les tracés à la règle, dans le positionnement par rapport aux points et dans l'arrêt d'un segment au bon endroit,

Remarque :

Être capable de tracer des perpendiculaires, des parallèles est une compétence de fin de cycle 3.

DEUXIÈME PARTIE : OUVRAGE DE CP

Question 4

En quoi chacun des exercices de la fiche 13 prépare l'enfant à la réalisation de la fiche 7

- L'exercice 1 :

A partir d'un dessin plus simple que l'activité de découverte de la fiche 7, l'enfant devra tout d'abord percevoir le positionnement des lignes et des points avant de les placer dans le cadre. Il devra ensuite placer les quatre points et les relier par des traits sans déborder. Puis il devra placer l'élément décoratif demi disque noir et demi disque vide qui semble être la tête du bonhomme. Cette même compétence se retrouve dans la fiche 7 (exercice de découverte) où il faut placer les points, les

¹ Nous proposons des compétences que l'élève **peut** exercer : en effet, l'étape 4 peut être réussie en contrôlant l'alignement d'un segment et d'un point sur le modèle à l'aide d'une règle et en l'effectuant le tracé demandé, ou bien en contrôlant et en réalisant le tracé de l'angle droit avec l'équerre.

points entourés de cercles et les étoiles convenablement dans l'espace feuille avant de tracer les traits.

- L'exercice 2 :

Il apprend aussi à relier les points par un trait et sera utilisé dans l'exercice de la fiche 7. Cet exercice propose, en plus une contrainte (idée de la spirale de la toile d'araignée) : l'élève apprend donc à anticiper le tracé.

- L'exercice 3 :

C'est un exercice d'entraînement qui permet à l'élève de continuer à développer des tracés soignés en suivant le trait gras rectiligne ou non. Les traits devront être « parallèles » et de même courbure. L'élève en CE1 pourra alors mieux tracer les traits droits et courbes du bateau.

Question 5

La progressivité des apprentissages entre les quatre fiches

- Fiche 20 CP :

Elle vise à faire percevoir, à repérer des cases alignées. Ces cases pouvant être en ligne, en colonne, ou en diagonale sur un quadrillage.

- Fiche 21 CP :

L'étape suivante consiste à passer des cases aux nœuds.

Les points sont placés soit « horizontalement », soit « verticalement » soit sur des obliques à 45°. La consigne demande de ne placer que des points, mais ne demande pas de tracer les segments. Cependant, un effort de vérification à la règle est demandé. Cela permet déjà d'imaginer le trait qui reliera les points.

- Fiche 17 CE1 :

L'étape suivante consiste à passer des nœuds aux segments.

Il s'agit de tracer des obliques qui ne sont pas nécessairement orientées à 45° par rapport aux lignes du quadrillage. Les exercices proposent des tracés plus complexes. Ils proposent non seulement des segments, mais aussi des dessins représentatifs ou non. Il est à noter qu'on travaille encore sur le perceptif en demandant de comparer les dessins dans le dernier exercice afin de déterminer ceux qui sont ou non semblables au modèle.

- Fiche 88 CE1 :

L'étape suivante consiste à passer du quadrillage au papier uni.

L'élève doit percevoir les alignements, les points remarquables de la figure comme le point A cité en question 3a. il doit aussi rechercher l'ordre dans lequel devra être tracée la figure à dessiner. En outre, certains traits devront être effacés ou non prolongés. L'élève ne devra laisser apparents que ceux du modèle.

Le pas en avant peut se concevoir dans l'analyse de la figure dont les propriétés ne sont pas apparentes car le quadrillage manque. Il faut également noter l'utilisation du support papier blanc qui complexifie les tracés.

GRENOBLE

Note préliminaire :

Dans le corrigé qui suit, le texte en italique correspond à des compléments de formation. Ces remarques ne sont pas exigibles du candidat, elles visent à enrichir l'étude du sujet.

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS) MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE 1

Question 1

Si B dit : « $7 + 1 = 8$ », A pourra dire : « $8 + 2 = 10$ » et gagnera.

Et si B dit : « $7 + 2 = 9$ », alors A pourra dire : « $9 + 1 = 10$ » gagnant ainsi la partie.

Donc, quelque soit le coup joué par B, A pourra jouer un coup qui lui permettra de dire 10. Cela justifie l'affirmation « J'ai gagné » de A.

Remarque préalable à la suite de l'exercice :

L'énoncé ne dit rien des points de départ possibles pour le premier joueur ; toute la suite de l'exercice fonctionne sur un implicite : les points de départs possibles sont identiques aux nombres que les joueurs peuvent ajouter chacun à leur tour, c'est à dire 1 ou 2 dans les questions 1 et 2, 1, 2 ou 3 dans les questions 3 à 5. Mais pour partager cet implicite avec le rédacteur du sujet, ne faut-il pas avoir déjà une certaine connaissance de ce jeu ou d'autres jeux de la même catégorie, les jeux de Nim ? Certes, ces jeux sont relativement connus des professeurs de mathématiques et tout particulièrement « la course à 20 » utilisée par G. Brousseau dans une série de leçons visant à introduire l'algorithme de la division euclidienne¹, mais ils ne font pas partie de la culture exigible d'un candidat au CRPE.

C'est pourquoi, nous faisons le choix dans ce corrigé de traiter les questions suivantes de deux manières : avec cet implicite et sans (c'est à dire avec tout entier autorisé comme point de départ entier) tout en limitant nos réponses aux nombres positifs, car il y a évidemment une infinité de solutions envisageables aux différentes questions si le nombre de départ peut être négatif..

¹ Guy BROUSSEAU, « Division euclidienne au cours élémentaire et cours moyen » dans « La mathématique à l'école élémentaire » ; APMEP, 1972.

Question 2

Si les seuls nombres de départ possibles sont 1 et 2 :

On a vu à la question précédente que le joueur qui totalise 7 a gagné.

De la même manière, on peut expliquer que le joueur qui totalise 4 est sûr de gagner, car quel que soit le coup joué par son adversaire, il pourra dire 7 au coup suivant et donc 10 ensuite.

Plus généralement, si N est une position gagnante, $N - 3$ est aussi une position gagnante car le joueur arrivé à $N - 3$ est assuré d'arriver à N au coup suivant :

Si son adversaire ajoute 1, il ajoutera 2. $(N - 3) + 1 + 2 = N$

Si son adversaire ajoute 2, il ajoutera 1. $(N - 3) + 2 + 1 = N$

Dans tous le cas, il arrivera à N .

Ainsi on peut trouver toutes les positions gagnantes en comptant à rebours de 3 en 3 à partir de 10 : 10 ; 7 ; 4 ; 1.

Le nombre annoncé par le joueur B est donc 1.

S'il n'y a aucune contrainte sur le nombre de départ :

On se restreint évidemment aux nombres entiers inférieurs ou égaux à 10, car les autres nombres, s'ils sont choisis comme point de départ, ne permettent à aucun des joueurs de gagner la partie.

Si le joueur B commence en annonçant X choisi parmi les nombres 1, 4, 7 ou 10, il est certain de pouvoir dire $X + 3$ au coup suivant, c'est à dire qu'il est sûr de gagner :

Tout de suite s'il commence en disant 10.

Au coup suivant, s'il commence par 7.

Au troisième coup, s'il démarre par 4.

Au quatrième coup en annonçant 1 au début.

Si le joueur B commence par un nombre inférieur à 10 différent de 1, 4, 7 ou 10, le joueur A pourra en additionnant 1 ou 2 atteindre au coup suivant la position gagnante la plus proche et ainsi être certain de gagner.

Donc, le joueur B a annoncé l'un des nombres : 1, 4, 7 ou 10.

Question 3

Méthode 1 :

Avec un pas de 3, l'écart entre deux positions gagnantes sera 4 ; un joueur peut toujours avancer de 4 d'un coup au suivant : si son adversaire ajoute 1, il ajoutera 3 ; si son adversaire ajoute 2, il ajoutera 2 ; et si son adversaire ajoute 3, il ajoutera 1.

Donc, dans la course à 10 avec un pas de 3, les positions gagnantes seront :

10, 6 et 2.

Méthode 2 :

Pour être sûr d'annoncer 10, il faut être celui qui annonce 6 (dire $6 + 1$, $6 + 2$ ou $6 + 3$ permettra toujours en additionnant respectivement 3, 2 ou 1 d'être celui qui dit 10). Et pour être sûr d'annoncer 6, il faut au coup précédent annoncer 2.

Donc, pour être sûr de gagner, le joueur qui commence doit annoncer :

2 si les seuls nombres de départ autorisés sont 1, 2 et 3

2, 6 ou 10 s'il n'y a pas de contraintes sur les nombres de départ.

Question 4

Si on fait maintenant la course à 12 avec des pas de 3, des raisonnements analogues à ceux ci-dessus permettent d'affirmer que les positions gagnantes sont maintenant : 0, 4, 8 et 12.

Si les seuls nombres de départ possibles sont 1, 2 et 3 :

Le joueur qui commence ne peut pas gagner ; qu'il dise 1, 2 ou 3, son adversaire pourra dire 4 au coup suivant et s'installer dans une position gagnante.

Donc, dans ce cas, en laissant son adversaire commencer, A est sûr de gagner.

S'il n'y a aucune contrainte sur le nombre de départ :

Alors rien n'empêche le joueur qui commence de gagner en commençant par 0, 4, 8 ou même 12.

Question 5

Dans la course à n par pas de 3, les positions gagnantes seront les entiers de la forme $n - 4k$ (k entier).

Sans contrainte sur le nombre de départ, comme ci-dessus, rien n'empêche le joueur qui commence d'avoir la certitude de gagner.

Si seuls 1, 2 et 3 sont autorisés comme point de départ, pour que le joueur qui commence ait la certitude de gagner, il faut qu'un des nombres 1, 2 ou 3 soit parmi les positions gagnantes, c'est à dire que l'on ait :

$$1 = n - 4k \text{ ou } 2 = n - 4k \text{ ou encore } 3 = n - 4k \text{ avec } k \text{ entier}$$

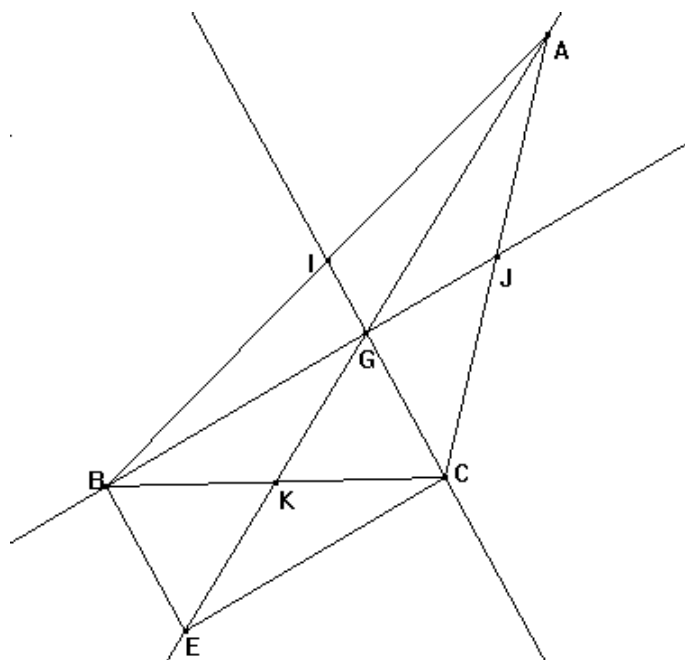
c'est à dire que n ne soit pas un multiple de 4.

EXERCICE 2

Remarque préalable :

On comprend à la question 3 que le but de l'exercice est de démontrer que les trois médianes d'un triangle sont concourantes. Il aurait été opportun dans la formulation de l'exercice de l'annoncer dès le début de l'énoncé, car ce fait a une conséquence implicite importante pour les raisonnements en jeu dans cet exercice : la propriété de concourance des médianes ne peut pas faire partie des outils utilisables pour faire les démonstrations demandées ; ainsi, on ne pourra pas l'utiliser à la question 2 pour affirmer que K est le milieu de $[BC]$ et ...

Un candidat qui ne lit pas l'énoncé jusqu'au bout avant de commencer ou qui n'accède pas à cet implicite sur les propriétés autorisées dans les démonstrations demandées dans l'exercice risque de se fourvoyer et d'utiliser une propriété dans un raisonnement qui est (implicitement) conçu comme la démonstration de cette même propriété !



Question 1

E est le symétrique de A par rapport au point G, donc G est le milieu de [AE]
D'autre part, on sait que I est le milieu de [AB].
Donc, en utilisant le théorème de la « droite des milieux » ou encore la réciproque du théorème de Thalès dans le triangle ABE, on peut affirmer que **les droites (IG) et (BE) sont parallèles.**

Question 2

Le même raisonnement conduit à affirmer que, dans le triangle AEC, la droite (GJ) qui passe par les milieux des côtés [AE] et [AC] est parallèle au troisième côté, c'est à dire à la droite (CE).

Dans le quadrilatère BGCE, on a donc :

(GC) // (BE) d'après la question 1

(GB) // (CE) d'après ci-dessus (la droite (GB) est la droite (GJ))

On a ainsi un quadrilatère BGCE dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux, donc:

BGCE est un parallélogramme.

Question 3

Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu ; comme BGCE est un parallélogramme, il en résulte que K est le milieu des segments [BC] et [GE].

Or K est par hypothèse l'intersection de la droite (AG) avec le côté [BC].

Donc **(AG) est la troisième médiane du triangle ABC.**

Donc la droite issue de A et passant par le point d'intersection G des médianes issues de B et de C est la troisième médiane du triangle ABC.

On vient donc de démontrer la propriété :

« Dans un triangle, les trois médianes sont concourantes. »

Remarque :

Les raisonnements effectués dans cet exercice permettent de pousser plus loin les conclusions :

E est le symétrique de A par rapport à G , donc $AG = GE$

K est le milieu de $[GE]$, donc $GK = \frac{GE}{2}$

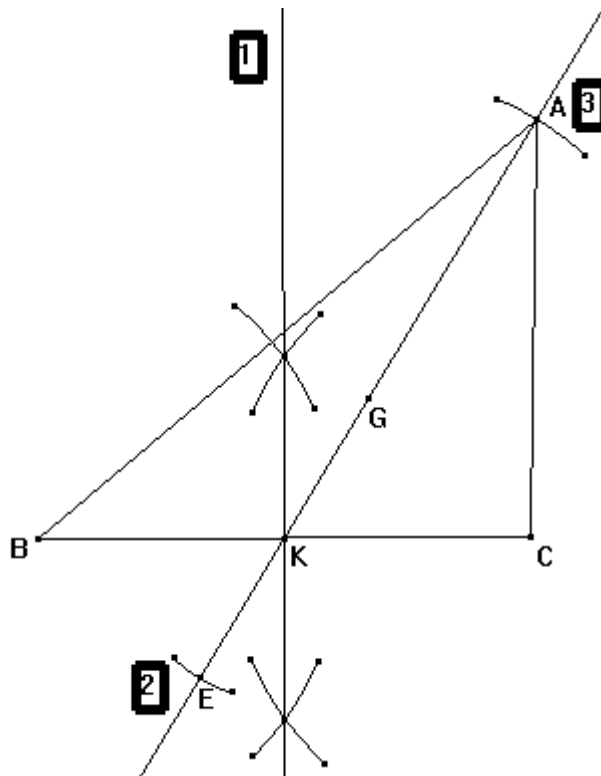
Donc $GK = \frac{AG}{2}$, ou encore $AG = \frac{2}{3}AK$

On a démontré : « Le point d'intersection G des médianes (aussi appelé centre de gravité) est situé aux deux tiers de la médiane $[AG]$ en partant du sommet A . »

Le même raisonnement peut être appliqué aux deux autres médianes.

Question 4

Construction du triangle ABC avec une règle non graduée et un compas, à partir de la donnée des points B , C et G non alignés.



La figure ci-dessus fait apparaître les traces et la chronologie de cette construction :

- On trace le segment $[BC]$, puis sa médiatrice (construction **1**) pour obtenir son milieu K .
- On trace ensuite le point E symétrique de G par rapport au point K (construction **2**).

- Enfin on obtient A symétrique de E par rapport au point G (construction **3**) et on trace le triangle ABC.

Remarque :

En utilisant le résultat établi dans la remarque de la question 3, on peut construire A sans passer par la construction du point E : on reporte à l'aide du compas deux fois la distance KG à partir de G sur la portion de la droite (KG) ne contenant pas K.

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS) ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES
--

Remarque préalable :

Compte tenu des programmes actuels de l'école primaire, on peut affirmer que les exercices que l'énoncé attribue au cycle des apprentissages fondamentaux ont été en fait proposés à des élèves de fin de cycle des approfondissements : il n'y a aucune référence aux aires et périmètres dans le programme du cycle 2 ; de même, les décimaux ne figurent que dans le programme du cycle 3 et il est donc impossible qu'ils soient utilisés (réponse 8,2) dans des productions d'élèves de fin de cycle 2.

Nous choisissons de répondre aux questions posées en faisant l'hypothèse que les productions à analyser sont des productions d'élèves de fin de cycle 3, l'attribution de celles-ci à des élèves de fin de cycle 2 nous paraissant totalement irréaliste.

Conseil :

Avant de répondre aux questions sur les travaux d'élèves, il est judicieux de faire soit-même les exercices proposés aux élèves, même si le sujet ne le demande pas.

Question 1

Difficultés de ces exercices pour les élèves.

- L'unité imposée ne correspond ni à la longueur du côté d'un carreau pour l'unité de longueur, ni à l'aire d'un carreau pour l'unité d'aire.
- La longueur de certains côtés mesurée en cm ne s'exprime pas à l'aide d'un nombre entier.
- La mesure en cm^2 de l'aire de la surface coloriée en gris ne s'exprime pas par un nombre entier.
- Les formes géométriques en présence sont complexes et ne permettent pas une réponse (pour l'aire comme pour le périmètre) par une procédure de calcul d'aires de surfaces connues.
- L'aire de la surface grisée ne peut pas être mesurée par simple pavage de la surface à l'aide d'un certain nombre d'exemplaires de la surface unité utilisée ; il est nécessaire de fractionner le carré unité de différentes façons.
- A ce stade des apprentissages, périmètre et aire sont deux grandeurs indépendantes associées aux mêmes figures qui sont souvent confondues par les élèves.

Question 2a

Productions de Marina et Raoul.

Marina et Raoul amalgament « segment de 2 carreaux » et « surface de deux carreaux » ; on peut remarquer que l'espace occupé sur la figure par la légende « 1 cm » est une surface de deux carreaux, ce qui a pu provoquer cette erreur.

Ces deux élèves reportent cette surface de deux carreaux à l'intérieur de la figure proposée pour la paver, puis il comptent le nombre d'exemplaires de la surface unité qu'ils ont utilisée.

Pour ces élèves, il y a donc confusion entre mesure d'un périmètre et mesure d'une aire, mais aussi contresens sur la signification de « 1 cm » qui est pris ici comme une unité d'aire.

Remarque :

Le terme « périmètre » ne semble rien évoquer pour ces deux élèves qui conduisent leur action uniquement sous l'effet de la perception des carreaux.

Question 2b

Production de Mathilde.

La présence du produit 7×9 incite à penser que Mathilde calcule l'aire d'un rectangle.

Il est probable qu'il s'agit du rectangle dans lequel s'inscrit la figure et dont les dimensions sont 6 carreaux pour la largeur et 8 carreaux pour la longueur.

Mais au lieu de compter les carreaux, Mathilde compte les nœuds, d'où le nombre 7 pour la largeur et le nombre 9 pour la longueur.

Remarque :

On peut remarquer qu'elle écrit 7×9 mais signale par des flèches qu'il faut intervertir le 7 et le 9 : sans doute veut-elle se « conformer » à la formule de l'aire d'un rectangle qu'elle a du apprendre : Aire rectangle = Longueur $\times$ Largeur et respecter l'ordre d'écriture des grandeurs.

Question 2c

Erreur commune aux productions des trois élèves de l'annexe B1.

Dans les productions des trois élèves, il y a confusion entre les notions d'aire et de périmètre d'une figure.

Remarque :

Le fait de travailler sur papier quadrillé privilégie la perception des carreaux en rendant plus difficile la perception des longueurs.

Question 3a

Production d'Anaïs et Julie.

Anaïs a compté les carreaux grisés ; elle utilise une unité d'aire erronée 4 fois plus petite que l'unité donnée par l'énoncé : l'aire d'un carré du quadrillage.

De plus, elle compte de la même façon (pour une unité) les carreaux entiers (totalement grisés) et les carreaux à moitié grisés.

Julie compte, comme Anaïs, tous les carreaux grisés sans faire de différence entre ceux qui sont entiers et les moitiés de carreaux en les marquant d'un point noir, puis

elle les regroupe par 4 (« J'ai compté 4 carreaux à chaque fois ») pour tenir compte de l'unité d'aire imposée (aire d'une surface de 4 carreaux du quadrillage). Elle répond 9, sans se préoccuper du dernier carreau isolé qui doit lui rester une fois comptés les 9 paquets de 4 carreaux. (on peut aussi penser qu'elle a oublié un carreau lors du recomptage par paquets de 4.)

Question 3b

Production d'Alexandre.

Pour Alexandre, il y a **confusion entre l'unité d'aire et la surface utilisée pour présenter cette unité** ; pour lui, le cm^2 est indissociable du carré de 1 cm de côté. Il reporte à l'intérieur de la surface grisée autant d'exemplaires entiers de ce carré qu'il peut (ici 4) ; il n'imagine pas d'autres surfaces de forme différente ayant la même aire (rectangle de 1 carreau sur 4 par exemple obtenu en découpant la surface unité donnée en quatre petits carrés, puis en regroupant ceux-ci dans une autre configuration) ou un fractionnement de cette surface unité.

Question 4

On peut faire l'hypothèse suivante pour expliquer le « 8,2 » proposé par certains élèves comme mesure de l'aire de la surface grisée :

Ils ont dénombré 8 unités entières à l'intérieur de la surface grisée et il leur restait alors 2 carreaux du quadrillage (ou l'équivalent de 2 carreaux) grisés qui ne constituaient pas une unité entière ; cela peut expliquer le 2 après la virgule.

L'écriture à virgule est mal maîtrisée et la partie décimale est comprise comme un entier indiquant le nombre de morceaux (de fractions) de l'unité sans prise en compte de la nature du fractionnement : ici il y a deux quarts d'unité alors que le 2 dans l'écriture 8,2 signifie deux dixièmes d'unité.

SECOND VOLET (8 POINTS)

Question 1a

Différences de conception de l'entrée dans la numération.

Les documents proposés font apparaître deux organisations des apprentissages relatifs à la numération assez opposées :

- Le sommaire de l'ouvrage « Math - Pédagogie de l'essai » publié chez Hachette fait apparaître une approche des nombres organisée par la succession de ceux-ci dans la file numérique : on étudie successivement les nombres de 1 à 16 dans des leçons séparées, puis une leçon est consacrée aux nombres 17, 18 et 19 ; après la leçon du nombre 20, la progression continue, mais avec une leçon par dizaine (les nombres de 20 à 29 ; les nombres de 30 à 39 ; ...).
- L'index du fichier des éditions Retz « J'apprend les maths avec Picbille » laisse imaginer une approche plus globale des nombres : l'organisation en chapitres est pilotée non par l'étude des objets mathématiques que sont les nombres, mais par les types d'actions que ces nombres permettent de mener (représenter les quantités, ordonner, repérer, calculer)

Si on entre dans le détail des titres de chapitres, on peut relever d'autres marques de cette différence de conception sur l'apprentissage de la numération :

- L'ouvrage de Retz semble accorder une place particulière aux nombres 5 et 10 : on y étudie les nombres inférieurs à 5, puis ceux inférieurs à 10 et enfin ceux supérieurs à 10.
Le sommaire de l'ouvrage des éditions Hachette fait apparaître une place importante pour le nombre 10 (leçons 25, 27, 34 et 37), mais aucune place particulière ne semble accordée au nombre 5 à la seule lecture du sommaire.
- L'ouvrage Hachette manifeste par son sommaire une attention particulière à la distinction entre le nombre zéro (leçon 31) et le chiffre 0 (leçon 30) ; cela n'apparaît pas dans l'index de l'autre manuel (seul « le nombre zéro » apparaît comme titre pour la page 24).
- Enfin l'index de l'ouvrage de Retz semble accorder une place importante aux supports qui permettent des apprentissages numériques : boîtes de Picbille, boulier, constellations, configurations de doigts, monnaie, file numérique.
Dans l'autre ouvrage, seule la file numérique apparaît dans le sommaire.

Remarques :

1. Les titres figurant dans ce sommaire et cet index ne permettent pas de préjuger du contenu des différentes leçons proposées : par exemple l'utilisation de constellations et des doigts qui n'apparaissent pas dans le sommaire de l'ouvrage des éditions Hachette est peut-être proposée à l'intérieur des différentes leçons sur les nombres. Les documents à notre disposition ne permettent pas d'en juger. En consultant le manuel, on constate

qu'il propose l'utilisation de dominos (jusqu'à 10) puis les carrés-unités et les barres de dix carrés, mais cela n'apparaît pas dans le sommaire.

2. *La réponse ci-dessus utilise « numération » au sens usuel de « connaissance des nombres » et non au sens de la « connaissance de leurs systèmes de désignation ». Si on s'intéresse plus spécifiquement au début de l'apprentissage des systèmes de désignation des nombres, on peut remarquer que chez Retz l'expression numération décimale apparaît dans le sommaire à partir de la page 74, soit à une époque où les élèves utilisent les nombres jusque 50 sans que la dizaine et le rôle des différents chiffres dans l'écriture d'un nombre semblent avoir été évoqués auparavant. L'ouvrage d'Hachette introduit la dizaine comme groupement de 10 et un semblant de tableau de numération (c'est la leçon 28 qui l'atteste) avant l'étude du nombre 11 : une première approche globale des désignations écrites des nombres n'est semble-t-il pas envisagée. D'éventuelles connaissances de celles-ci issues de la maternelle ne le sont pas non plus.*

Question 1b

La place du calcul dans ces deux ouvrages.

Il semble difficile de juger de la place accordée au calcul dans chacun des deux ouvrages par seule référence au nombre de pages explicitement consacrées au calcul tel qu'il peut apparaître dans les documents des annexes C1 et C2.

On peut simplement relever que le manuel Hachette semble concentrer le travail sur le calcul plutôt en fin d'année, après la leçon sur le nombre 16 (leçons 48, 54, 64, 70,...) alors que la partie « Organisation en 4 périodes » de l'index de l'ouvrage de Retz fait apparaître une présence du calcul dans les apprentissages des quatre périodes.

D'autre part, les titres consacrés au calcul dans le sommaire de l'ouvrage Hachette semblent indiquer une priorité donnée au calcul posé ; rien dans ce sommaire n'indique la part accordée au calcul réfléchi et au calcul mental. A l'inverse, l'index de l'ouvrage Retz présente dans la partie calcul, des titres consacrés aux « stratégies de calcul » avant d'aborder la technique opératoire de l'addition dans les dernières leçons ; l'organisation en 4 périodes articule travail sur le comptage et travail sur le calcul. Mais rien ne nous permet d'affirmer que ce qui n'est pas explicité dans un sommaire ou un index n'apparaît pas dans le déroulé des leçons proposées par ces ouvrages.

Un autre différence qui apparaît dans le sommaire concerne la mémorisation de faits numériques : chez RETZ le thème stratégies de calcul laisse transparaître l'organisation de la mémorisation de certains résultats par les élèves ; chez Hachette, on n'a quasiment pas d'information si ce n'est la leçon 54 intitulée « table d'addition » faut-il en déduire que la mémorisation est prévue en une fois à ce moment là ? Ce serait trop s'engager !

Question 2a

Aspect cardinal et aspect ordinal des nombres.

L'aspect cardinal des nombres intervient dans leur utilisation pour dénombrer les éléments d'une collection ; c'est le nombre comme mémoire de la quantité.

L'aspect ordinal des nombres intervient dans la mise en ordre des éléments d'une collection et l'attribution à chacun d'eux, par le comptage, d'un nombre qui indique le rang; c'est le nombre comme mémoire de la position.

Question 2b

Compétences du cycle 2 (§ Exploitation de données numériques) se rapportant à l'aspect ordinal des nombres.

1.1 b Utiliser les nombres pour exprimer la position d'un objet dans une liste ou pour comparer des positions.

1.1 d Déterminer, par addition ou soustraction, la position atteinte sur une ligne graduée à la suite d'un déplacement en avant ou en arrière.

1.2 b Déterminer une position initiale sur une ligne graduée, avant la réalisation d'un déplacement (en avant ou en arrière) pour atteindre une position donnée ou déterminer la valeur du déplacement.

Question 3

Procédures pour effectuer la somme $12 + 7$.

- Comptage de 1 en 1 en partant de 1 jusqu'à 19 de la réunion de deux collections de 12 et 7 objets respectivement (doigts, jetons ou objets dessinés).
- Surcomptage : on compte de 1 en 1 à partir de 13 qui est le suivant de 12 ; les doigts ou un autre support peuvent être utilisés pour repérer le point d'arrêt du comptage (19) qui est atteint lorsqu'on a énoncé 7 mots-nombres.
- Décomposition de 12 en $10 + 2$ puis recomposition avec appui sur la numération orale : dix et deux et sept, c'est dix et neuf, c'est dix-neuf.
- Décomposition de 12 en $10 + 2$, puis, avec appui de la numération écrite, recomposition sous la forme $2 + 7 = 9$ (résultat mémorisé ou obtenu par surcomptage de 2 au-dessus de 7) et $10 + 9 = 19$.
- Utilisation d'un résultat mémorisé : $12 + 7$, c'est 19.
- Utilisation de résultats mémorisés et d'une stratégie de calcul accordant une place privilégiée au nombre 5, comme « pivot » :
 $12 + 3 = 15$ et $15 + 4 = 19$

Remarques :

Si le calcul était proposé sous la forme $7 + 12$, on pourrait envisager le surcomptage à partir de 8 jusqu'à 19 comme procédure utilisée par certains élèves ; mais donné sous la forme $12 + 7$, cette procédure a peu de chance de se présenter.

Le comptage de 1 en 1 de 1 à 19, parfois aussi appelé recomptage du tout, est ici une procédure lourde avec de gros risques d'erreurs.

La technique opératoire de l'addition n'apporte pas grand chose à l'élève qui doit effectuer un tel calcul.

Question 4a

Inconvénient de ne travailler que l'écriture $a + b$.

Si on travaille exclusivement l'écriture $a + b$ au début des apprentissages, celle-ci risque d'être utilisée de façon automatique en situation de résolution de problème, car les élèves n'auront fréquenté longtemps que des problèmes où cette écriture fournit la solution, du coup, ils seront enclins à produire cette écriture devant n'importe quel problème à résoudre sans qu'ils réfléchissent au lien entre le sens du problème et l'opération choisie.

Un tel choix conduit également à ne mémoriser le répertoire additif que d'une manière : ex $6 + 5 = 11$ alors que l'on utilisera à terme ce triplet (5 ; 6 ; 11) pour des recherches de compléments et des calculs de différence.

Question 4b

Autres raisons pour un travail simultané des écritures $a + b$ et $a - b$.

Un travail simultané des écritures $a + b$ et $a - b$ permet de rattacher celles-ci à deux familles de situations et par là-même d'aider les élèves à apprendre à distinguer ces deux opérations en référence au sens que les situations leur confère.

- La nature de l'opération n'est pas un élément essentiel pour établir une hiérarchie de difficulté des problèmes arithmétiques : certains problèmes relevant de l'addition sont plus difficiles que d'autres problèmes relevant de la soustraction ; la recherche du résultat d'une diminution n'est pas plus difficile, toute chose égale par ailleurs, que la recherche du résultat d'une augmentation.
- On peut travailler tout de suite sur la réciprocité des deux opérations : si a et b sont les nombres d'éléments respectifs de deux collections que l'on réunit en une collection unique de c éléments, la situation peut être décrite par l'une ou l'autre des trois égalités :

$$c = a + b \quad a = c - b \quad b = c - a$$

Cette réciprocité des opérations est notamment mise en avant dans l'étude et la mémorisation des triplets additifs :

de « 5 pour aller à 11, il y a 6 » et « $11 - 5 = 6$ » découlent de « $6 + 5 = 11$ » et se mémorisent en même temps.

D'autre part, dans le domaine du calcul, il est intéressant que les élèves disposent simultanément des écritures $a + b$ et $a - b$ pour pouvoir mettre en œuvre certaines procédures de calcul réfléchi de sommes qui s'appuient sur des décompositions soustractives. Par exemple, pour calculer $9 + 4$, on peut utiliser :

9 c'est $10 - 1$; je complète pour avoir 10 avec 1 pris à 4 ; il me reste $4 - 1$, c'est à dire 3 à ajouter à la dizaine, donc 13.

Question 4c

Difficultés des élèves dans l'apprentissage de la soustraction.

Il faut distinguer :

- Les difficultés relatives à la résolution de problèmes soustractifs :

Celles-ci ne sont pas propres à la soustraction mais communes à tous les problèmes arithmétiques relevant de l'addition ou de la soustraction qui sont communément regroupés sous l'appellation de problèmes additifs : une même opération va modéliser des situations très différentes du point de vue du sens. G. Vergnaud² a étudié les difficultés relatives à ces problèmes et a établi une classification qui s'appuie principalement sur le type de relation liant les trois nombres en jeu dans le problème ; les principaux types de situations pour l'école primaire sont :

- o La relation partie-partie-tout ;
- o La transformation d'états ;
- o La comparaison d'états ;
- o La composition de transformation.

- les difficultés relatives au calcul d'une différence :

Elles proviennent de la non-commutativité de la soustraction ; de ce fait, les techniques de calcul de sommes ne sont pas transférables au calcul de différences :

- o Dans le calcul d'une différence, l'ordre des deux termes n'est pas indifférent : étant donnés deux nombres entiers a et b avec $a > b$, seule la différence $a - b$ est calculable à l'école primaire, la différence $b - a$ qui est un nombre négatif n'entrant pas dans le champ des nombres étudiés dans ces classes.
- o On peut additionner plus de deux nombres, mais la soustraction concernera toujours deux nombres seulement.
- o On retrouve cette dissymétrie dans le calcul réfléchi d'une différence : partir de l'un ou l'autre des deux termes débouche sur deux types de stratégie de calcul différents :
 - Reculer du plus grand nombre vers le plus petit (par décomptage ou par sauts arrière sur la droite numérique).
 - Avancer du plus petit nombre vers le plus grand (par surcomptage, par sauts avant sur la droite numérique ou par addition à trou).
- o Cette non-commutativité entraîne aussi des difficultés dans le calcul posé : le calcul de « l'écart entre deux chiffres » de même rang ne permet le calcul de différence qu'en l'absence de retenue, c'est à dire si le « plus grand chiffre » est dans le premier nombre.

$$\begin{array}{r} 5 \quad 6 \\ - \quad 1 \quad 4 \\ \hline 4 \quad 2 \end{array}$$

↙ ↘

5 - 1 6 - 4

Le calcul des écarts entre chiffres donne le résultat

² Voir Le Moniteur de Mathématiques, Fichier pédagogique Résolution de problèmes, Nathan 1997.

$$\begin{array}{r} 5 \quad 6 \\ - \quad 1 \quad 8 \\ \hline 4 \quad \underline{2} \end{array}$$

Le calcul des écarts entre chiffres donne un résultat erroné ($6 < 8$).

- o La gestion de la retenue dans la technique opératoire de la soustraction est source de difficulté pour les élèves pour deux raisons :
 - Elle est très différente de la gestion des retenues dans la technique opératoire de l'addition.
 - Elle dépend de la technique utilisée : technique classique par compensation, technique par emprunt, technique par addition à trou.³

Question 5a

Position du chapitre 27 dans la progression du manuel Hachette.

On peut s'interroger sur la cohérence des écritures utilisées dans les titres de chapitres. En effet, pour le chapitre 25, le nombre dix est nommé en lettres ; puis , pour le chapitre 27, ce même nombre est écrit en chiffres, utilisant donc le chiffre 0 qui ne sera étudié comme chiffre que 3 chapitres plus tard. Cette incohérence semble confirmée par le titre du chapitre 37 « Dix = 10 » qui semble faire le lien entre le nombre dix et son écriture en chiffres.

Remarque :

Mais, n'ayant en main que le sommaire du manuel, on peut aussi faire l'hypothèse selon laquelle les chapitres 30 et 31 sont des chapitres de synthèse dans lesquels, après un temps de fréquentation, on revient sur le chiffre 0 utilisé pour écrire les nombres, et le nombre 0 utilisé pour dénombrer une collection vide afin d'explicitier et de formuler ces savoirs.

Question 5b

La différence chiffre-nombre.

Les chiffres sont des signes utilisés pour écrire les nombres ; dans notre système de numération, on utilise dix chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. Un chiffre est un « *signifiant* ».

Les nombres sont des objets mathématiques. Les nombres entiers sont utilisés pour mesurer les quantités (le cardinal d'une collection) ou pour repérer des positions (le rang d'un élément dans une collection). Ce sont des « *signifiés* » qui existent indépendamment des signes utilisés pour les exprimer.

Remarque :

Hors de tout contexte, il n'est pas possible de dire si « 8 » est un chiffre ou l'écriture en chiffres du nombre huit.

³ Voir M. Pauvert, Faire comprendre la soustraction, Collection Les pratiques de l'éducation, Nathan/CNDP 1990.

Question 6a

Compétences visées dans les exercices de l'annexe E.

Il s'agit des compétences 2.1.a et 2.1.b du document annexe D :

- Dénombrer et réaliser des quantités en utilisant le comptage un à un ou des groupements par dizaines et centaines.
- Comprendre et déterminer la valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture décimale d'un nombre.

Remarque :

Ces deux compétences sont reliées aux exercices de l'annexe E, mais on ne peut pas prétendre que ceux-ci permettent d'atteindre ces compétences pour les raisons suivantes :

- 1. seul un exemple donné utilise le groupement par dix : dans l'exercice 1, l'élève peut choisir la taille du groupement à moins qu'il n'effectue le groupement par dix par imitation de l'exemple; par ailleurs, les exercices 2 et 3 utilisent les groupements par huit, par quatre et par six.
La compétence réelle faisant l'objet du travail proposé est davantage l'acquisition du mécanisme de groupement.*
- 2. dans ces exercices, on réalise des groupements que l'on code dans un tableau. On entretient l'illusion selon laquelle il est évident pour les élèves qu'une fois le tableau rempli, sa lecture fournit un dénombrement de la collection. Or l'expérience montre qu'à l'issue d'un tel travail, un grand nombre d'élèves n'utilisent pas spontanément le codage enregistré dans le tableau pour répondre à la question « combien y a-t-il de ... ? », mais se lancent plutôt dans un recomptage un à un de la collection ou dans un calcul mental, facilité par l'organisation en sous collections de certains exemples.
L'interprétation du codage écrit dans le tableau est d'autant plus délicate qu'il ne correspond pas, dans le cas d'un groupement autre que dix, au nombre que l'on obtient par le comptage un à un des éléments de la collection.*
- 3. Dans le cas de groupement par dix, l'écriture décimale des nombres n'est jamais exprimée en dehors du tableau, ce qui ne permet pas la compréhension explicite de la valeur des chiffres selon leur position par le passage de :*

○ _{dix}	✕
2	4

à 24 où seul subsiste le codage positionnel.

*Redondance
de
l'information :
position + titre
de la colonne*

Question 6b

Types de réponses envisageables pour l'exercice 1.

- Utilisation du groupement par dix induit par l'exemple : 1 groupe et 8 éléments isolés.
- Utilisation de groupements de même quantité (autre que dix) avec des éléments restant isolés : par exemple, 2 groupes de 8 et 2 éléments isolés.

- Utilisation de groupements de même quantité sans éléments isolés : par exemple, 2 groupes de 9 ou 3 groupes de 6.
- Utilisation de groupements de tailles différentes, avec ou sans éléments isolés : par exemple, 3 groupes (2 de 5, 1 de 6) et 2 éléments isolés.

Question 6c

Analyse des exercices 2 et 3.

Comme indiqué dans la remarque de la question 6a, ces exercices fonctionnent sur un implicite erroné selon lequel le fait d'avoir rempli les tableaux après réalisation de groupements d'objets est compris comme un moyen pour dénombrer la collection.

Mais, même en admettant une identification entre le codage effectué dans le tableau et une écriture du nombre d'éléments de la collection, on peut faire les remarques suivantes :

- Dans l'exercice 2, on code deux collections n'ayant pas le même nombre d'éléments, l'une en base huit, l'autre en base quatre. A aucun moment, le problème de la comparaison des collections n'est posé. Cet exercice apparaît comme un exercice de codage un peu gratuit et la remarque qui suit l'exercice a peu de chance d'être comprise des élèves.
- Dans l'exercice 3, on code deux collections ayant le même nombre d'éléments : l'une est codée en base six et l'autre en base quatre. On veut montrer que des groupements différents de la même quantité aboutissent à des codages différents.

Cependant :

- o Les objets des deux collections n'ayant pas la même forme, la perception de « la même quantité des deux côtés » n'est pas favorisée ;
- o Le nombre d'éléments isolés après groupements est le même dans les deux cas ; cela peut masquer en partie l'aspect « différence des deux codages ».

Un tel exercice apporte-t-il vraiment quelque chose aux élèves dans l'apprentissage de la numération décimale, d'autant que l'élève est confiné dans l'exécution d'une tâche et n'est soumis à aucun questionnement ? Il est permis d'en douter.

GUADELOUPE

Note préliminaire :

Dans le corrigé qui suit, le texte en italique correspond à des compléments de formation. Ces remarques ne sont pas exigibles du candidat, elles visent à enrichir l'étude du sujet.

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS) MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE 1

Question 1

Le nombre $\Delta 5 \Delta 5 \Delta 5 \Delta 5 \Delta 5 \Delta$ est un nombre écrit en base 10. On en déduit que Δ est un nombre entier tel que $0 < \Delta \leq 9$.

La somme des chiffres de ce nombre vaut $6 \times \Delta + 25$ et doit être un multiple de 7.

Comme $0 < \Delta \leq 9$, on en déduit que $31 < 6 \times \Delta + 25 \leq 79$.

On peut organiser la recherche à l'aide d'un tableau dans lequel on donnera pour valeurs à l'expression $6 \times \Delta + 25$ les multiples de 7 compris entre 31 et 79 ; puis on essaiera de trouver des valeurs de Δ qui conviennent si c'est possible.

$6 \times \Delta + 25$	$6 \times \Delta$	Δ
35	10	impossible
42	17	impossible
49	24	4
56	31	impossible
63	38	impossible
70	45	impossible
77	52	impossible

La seule valeur possible est $\Delta = 4$.

Question 2a

Le nombre E97F est écrit en base 10.

On en déduit que $1 \leq E \leq 9$ et que $0 \leq F \leq 9$.

Si la somme des chiffres de ce nombre est 29 on a l'égalité suivante :

$E + F + 16 = 29$ d'où $E + F = 13$ donc les couples (E ; F) possibles sont :
(4 ; 9), (5 ; 8), (6 ; 7), (7 ; 6), (8 ; 5), (9 ; 4).

Question 2b

Si le produit des chiffres de ce nombre est 2268, on a $E \times F \times 9 \times 7 = 2268$

d'où $E \times F = 2268 \div 63 = 36$.

D'autre part, on sait que le nombre EF est divisible par 7.

Parmi les couples (E ; F) trouvés en question a), voici les possibilités :

$E \times F = 36$	EF	
4×9	49	valeur possible
9×4	94	valeur impossible car non multiple de 7

On obtient donc **E = 4 et F = 9** ainsi le nombre cherché est donc **4 979**.

EXERCICE 2

Sur la carte donnée, la distance mesurée entre les deux pointes est de 41 mm ou 4,1 cm.

En réalité, la distance est de 1 km ou 1 000 000 mm.

L'échelle de cette carte est donc de $41 / 1\,000\,000^{\text{ème}}$, soit environ $1 / 25\,000^{\text{ème}}$.

Remarque :

L'échelle d'une carte est le rapport de la mesure sur la carte par la mesure de la longueur correspondante dans la réalité (les deux mesures étant exprimées dans la même unité). L'échelle de la carte est le coefficient de réduction de la réalité.

On peut la trouver exprimée sous différentes formes.

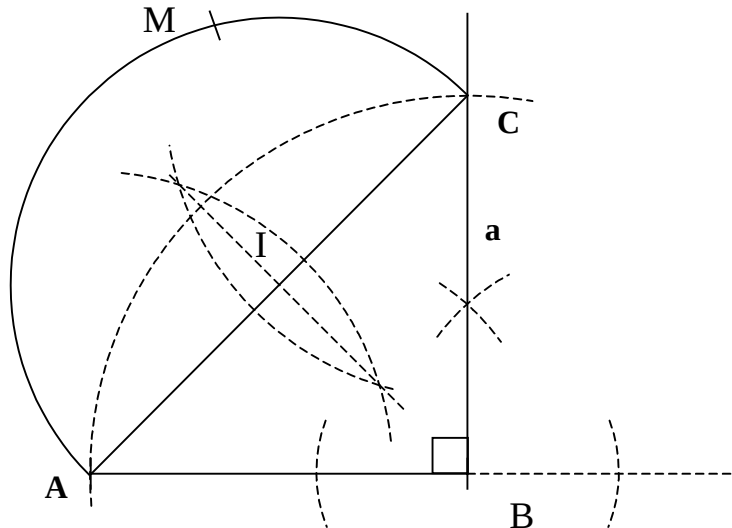
Par exemple :

$41 / 1\,000\,000^{\text{ème}}$ ou 4,1 cm pour 1 km.

EXERCICE 3

Question 1

Le sujet ne précise pas les instruments utilisables, on suppose que seuls la règle et le compas sont autorisés.



Question 2

Calcul de la longueur AC

Méthode 1 :

Le triangle ABC rectangle isocèle en B est un demi-carré de côté a , coupé par sa diagonale [AC]. On sait que la diagonale d'un carré de côté a vaut $a\sqrt{2}$. On en déduit que $AC = a\sqrt{2}$.

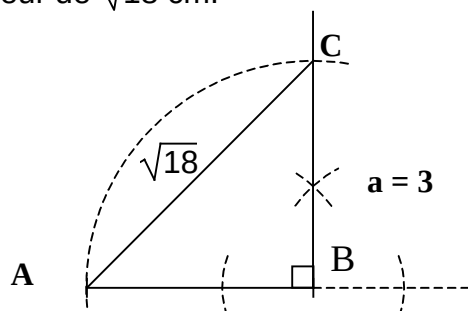
Méthode 2 :

On utilise la propriété de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B.

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

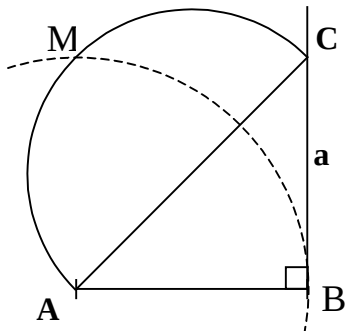
$$a^2 + a^2 = 2a^2 \quad \text{d'où} \quad AC = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

Pour construire un segment de longueur $\sqrt{18}$ cm il suffit de construire un triangle rectangle isocèle de 3 cm de côté puisque si $a = 3$ alors $2a^2 = 18$ et l'hypoténuse de ce triangle aura une longueur de $\sqrt{18}$ cm.



On peut aussi construire un carré de côté 3 cm et la longueur de sa diagonale sera de $\sqrt{18}$ cm.

Question 3



Méthode 1 :

Le triangle AMC est rectangle en M car il est inscrit dans le demi-cercle de diamètre [AC].

Dans ce triangle rectangle, on calcule MC par le théorème de Pythagore.

$$MC^2 = AC^2 - AM^2 = 2a^2 - a^2 = a^2$$

D'où $MC = a$.

Ainsi le quadrilatère ABCM a quatre côtés de même longueur a , c'est un losange. De plus l'angle $\widehat{ABC}$ est droit, **donc ABCM est un carré**.

Méthode 2 :

Le triangle AMC est rectangle en M car il est inscrit dans le demi-cercle de diamètre [AC] et donc inscrit dans le cercle de diamètre [AC].

Le triangle ABC rectangle en B est aussi inscrit dans le cercle de diamètre [AC].

On en déduit que les points A, B, C et M sont cocycliques.

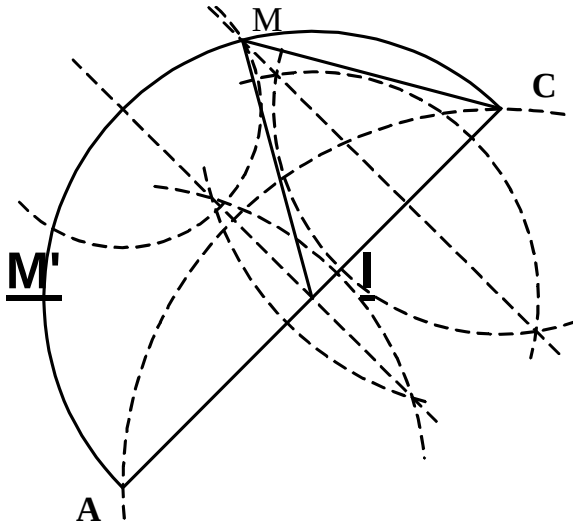
Le diamètre [AC] est un axe de symétrie de ce cercle. Comme les points M et B sont sur le cercle et que $AM = AB$ alors les points M et B sont symétriques par rapport à l'axe (AC). On en déduit que $CM = CB = a$ car la symétrie conserve les distances.

Ainsi le quadrilatère ABCM a quatre côtés de même longueur a , c'est un losange. De plus l'angle $\widehat{ABC}$ est droit, **donc ABCM est un carré**.

Question 4 a

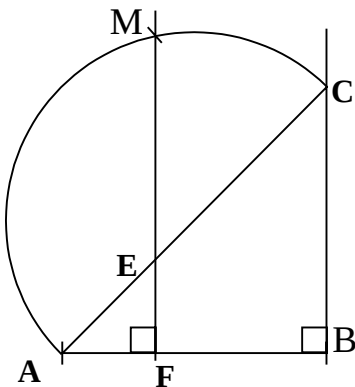
Si $IM = MC$ le triangle IMC est équilatéral. En effet tout d'abord IMC est isocèle puisque $IM = MC$ puis $IM = IC$ car tous deux sont des rayons du cercle.

Question 4b



Attention ! Pour améliorer sa lisibilité, la figure a été agrandie !

Question 5



Par construction, la droite (EF) est perpendiculaire à la droite (AB).
D'autre part, le triangle ABC est rectangle en B, donc la droite (BC) est aussi perpendiculaire à la droite (AB).

Ainsi, les deux droites (EF) et (BC) sont perpendiculaires à une même droite (AB), elles sont donc parallèles entre elles.

Elles sont toutes les deux coupées par la droite (AC) donc les angles $\widehat{AEF}$ et $\widehat{ACB}$ sont égaux car ils sont correspondants.

Or dans le triangle isocèle ABC, les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{BAC}$ sont égaux

On peut en déduire que les angles $\widehat{AEF}$ et $\widehat{FAE}$ sont égaux ;
donc **le triangle AEF est isocèle.**

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS) ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES.

Question 1

Problème soustractif au CE1

Dans l'annexe 2 donnant des extraits de programmes, ce problème est associé à la compétence suivante :

« Dans des situations où une quantité (ou une valeur) subit une augmentation ou une diminution, déterminer la quantité (ou la valeur) initiale, ou trouver la valeur de l'augmentation ou de la diminution ».

Explication de la réponse 44 cubes

Première difficulté :

En début de CE1 les élèves ont bien révisé l'addition, mais très peu abordé la soustraction, voire pas du tout. Ils vont avoir tendance à utiliser l'opération qu'ils font d'habitude d'autant plus que dans l'énoncé du problème l'expression « j'ajoute » induit une addition. Les élèves vont se précipiter sur cet indice pour utiliser l'opération qu'il connaissent en oubliant tout le reste : manipulation des cubes et autres mots clés (« maintenant », y « avait-il » à l'imparfait) dans le discours de l'enseignant, d'autant plus qu'il semble bien que les élèves ne disposent pas d'un texte écrit (l'enseignant « s'adresse » aux élèves).

Deuxième difficulté :

D'après la classification élaborée par Gérard Vergnaud des types de problèmes additifs, il s'agit d'une transformation d'état pour laquelle on donne la transformation (« j'en ajoute 10 ») et l'état final (« maintenant, il y a 34 cubes »). Il faut trouver l'état initial (« combien y avait-il de cubes dans la boîte »). Parmi les types de problèmes résolus par addition ou soustraction, il est classé comme assez difficile¹.

Validation de la réponse

Remarque :

La place de la question dans ce paragraphe pose problème. S'agit-il de la validation de la seule réponse « 44 cubes » ou s'agit-il de la validation globale de la résolution du problème ? Dans ce corrigé, nous avons traité les deux possibilités en même

¹ D'après G. Vergnaud, ce n'est pas le type de problèmes le plus difficile. En effet parmi les problèmes résolus par addition ou soustraction, un autre type difficile est celui d'une succession de deux transformations dans lequel on demande :

- soit la transformation finale en donnant les deux transformations ;
- soit une des deux transformations en donnant l'autre et la transformation finale.

Mais ce type de problème n'est pas donné à résoudre au cycle des apprentissages fondamentaux.

temps. Le mot validation est au singulier, le candidat pourra donner une des deux validations suivantes ou les deux.

Validation avec manipulation des cubes

Un élève compte effectivement les cubes de la boîte du maître. Il y en a bien 34. D'où proviennent-ils ? Il y a ceux qui étaient déjà dans la boîte et ceux que le maître a rajoutés². L'élève met 10 cubes de côté, et dénombre les autres, il obtient ainsi la réponse exacte au problème.

L'invalidation de la réponse « 44 cubes » peut se faire à différents moments :

- soit totalement à la fin de la manipulation, en comparant 44 au résultat trouvé ;
- soit en déduisant que la quantité des cubes restant, après en avoir mis 10 de côté, devra être plus petite que 34 donc que 44 n'est pas une réponse possible ;
- soit dès le dénombrement initial des 34 cubes, puisque 44 est plus grand que 34.

Validation sans manipulation des cubes

Pour savoir si la réponse calculée est exacte, on imagine une boîte fictive contenant le nombre de cubes trouvés, on lui ajoute 10. Si on trouve 34 le nombre anticipé est exact³.

Ainsi pour la réponse « 44 cubes », l'élève peut vérifier que $44 + 10$ n'est pas égal à 34.

Question 2

Problème de proportionnalité et nombres sexagésimaux en fin de cycle 3

Conseil :

Avant d'analyser les réponses fournies par les élèves, il est judicieux de résoudre soit-même le problème, même si le sujet ne le demande pas.

L'élève qui fournit ces réponses suit la chronologie suivante :

- il écrit les nombres sexagésimaux sous forme de nombres décimaux ;
- il fait un calcul avec ces nombres décimaux ;
- il écrit une phrase de conclusion en transformant le nombre décimal trouvé sous forme d'un nombre sexagésimal.

Dans ces écritures, en terme d'erreurs ou de réussites, on peut dire que :

- L'élève considère les nombres sexagésimaux comme des nombres décimaux obtenus par simple juxtaposition des nombres d'heures et de minutes.
- L'élève considère le nombre décimal comme la juxtaposition de deux nombres entiers. En effet, il divise séparément la partie entière et la partie décimale de 3,15 par 3 et ainsi donne un résultat faux 1,5. On peut noter ici que cette règle appliquée au deuxième calcul donne un résultat exact.

² Ce serait plus simple si l'enseignant avait rajouté 10 cubes rouges par exemple en ayant mis au préalable des cubes d'une autre couleur dans la boîte. Ce n'est pas du tout indispensable.

³ Pour 10 cela peut se faire mentalement car il s'agit plus d'un problème de numération que d'un problème d'addition. Si le nombre est différent de 10 cela peut se faire par surcomptage ou en posant l'addition par écrit.

- Les deux situations de proportionnalité sont reconnues, le choix du type de coefficient est correct (multiplier par..., diviser par...).
- Le premier coefficient de proportionnalité « multiplier par 3 » n'est pas correct. L'élève interprète une proportionnalité inverse en proportionnalité directe. La bonne réponse est 3 fois 3h15min donc 9h45min.
- De même, le deuxième coefficient est faux. L'élève utilise le coefficient « multiplier par 3 » qui s'applique à l'agrandissement des côtés du rectangle alors que le coefficient d'agrandissement de l'aire du rectangle est « multiplier par 3×3 ». La bonne réponse est 9 fois 3h15min, soit 29h15min.
- Les notations utilisées dans la phrase de conclusion sont incomplètes, il manque « min ». Une des origines possibles est que le mot « minutes » est rarement prononcé oralement.

SECOND VOLET (8 POINTS)

Question 1a

Objectifs de l'activité 1

- Renforcer le lien entre l'addition itérée et la multiplication.
- Amener les élèves à se convaincre de l'intérêt de l'utilisation de la multiplication quand le nombre de termes égaux dans l'addition augmente.

Objectifs de l'activité 2

- Faire trouver une stratégie pour résoudre un problème sur la recherche d'un quotient dont la valeur appartient à un champ numérique fréquenté par les élèves, sans recourir à la division pas encore connue et qui ne sera introduite qu'en CE2.
- Faire abandonner l'addition itérée au profit de calculs de produits quand le quotient augmente, dans un même type de problèmes.

Question 1b

Compétences développées

- les cinq compétences générales énumérées dans l'annexe 2. Cependant la compétence de rédaction de la réponse s'exerce peu puisque la rédaction est en partie déjà faite dans le bon de commande fourni aux élèves.
- dans des situations où plusieurs valeurs identiques sont réunies, déterminer la valeur totale ou le nombre de valeurs.

Question 2a

Titre pour chaque étape

Activité 1 phase 1

Etape 1 : Appropriation de la tâche par les élèves⁴.

Etape 2 : Recherche du problème.

Etape 3 : Mise en commun des résultats et des procédures de calcul.
Validation du résultat.

⁴ On dit aussi en didactique que l'enseignant fait la « dévolution du problème » aux élèves. Le fait de demander les prix est une façon de permettre aux élèves de s'approprier le problème.

Activité 1 phase 2

Etape 1 : Appropriation de la tâche et résolution du problème.

Etape 2 : Mise en commun des messages, des résultats et des procédures de calcul. Validation des résultats.

Etape 3 : Réinvestissement.

Activité 2 phase 1

Etape 1 : Appropriation de la tâche et résolution du problème.

Etape 2 : Mise en commun des résultats et des procédures de calcul.
Validations des résultats.

Question 2b

Procédures de calcul

Activité 1 Phase 1

Procédure 1 : Les élèves effectuent trois additions itérées.

Exemple : $22 + 22 + 22 + \dots$

Ces additions peuvent se faire à la main ou avec la calculatrice de différentes façons.

Procédure 2 : Les élèves effectuent des additions par groupement de termes à la main ou avec la calculatrice.

Par exemple en regroupant :

- deux termes

$(22 + 22 = 44, 44 + 44 = 88, 88 + 88 = 176, 176 + 44 = 220)$.

- plusieurs termes

$(22 + 22 + 22 + 22 + 22 = 110 \text{ puis } 110 + 110 = 220)$.

Procédure 3 : Les élèves effectuent trois multiplications en utilisant tous les moyens disponibles pour y arriver (c'est à dire ce qui a été appris sur la multiplication dans les leçons antérieures ou avec la calculatrice).

Activité 1 Phase 2

Dans cette phase, on peut distinguer les différents types de messages envoyés par les émetteurs :

- soit sans indication de calcul. Par exemple un dessin de 11 objets avec le prix unitaire marqué sur chaque objet ;
- soit avec l'indication d'un calcul à effectuer qui peut être de deux sortes, une longue écriture additive de prix unitaires ou une écriture multiplicative.

En ce qui concerne les récepteurs, ils peuvent utiliser les trois procédures de calcul décrites pour la phase 1. Partant d'une longue écriture additive, ils peuvent ou non la fractionner avec des sommes intermédiaires ou la transformer en écriture multiplicative.

Activité 2 Phase 1

Procédure 1 : Les élèves effectuent une addition itérée des prix unitaires à la main ou avec la calculatrice tant que le résultat est inférieur à 200. Puis ils décomptent le nombre de valeurs identiques mises en jeu et ils déterminent le reste.

Procédure 2 : Les élèves effectuent des soustractions successives de même prix unitaire à la main ou avec la calculatrice, tant que c'est possible. Puis ils décomptent le nombre de valeurs identiques mises en jeu et ils déterminent le reste (le dernier résultat trouvé).

Procédure 3 : Les élèves essaient d'approcher 200 avec des produits, les multiplications se faisant avec les moyens disponibles (répertoire multiplicatif, calculatrice). Puis ils déduisent le quotient et le reste.

Question 3

Variables didactiques de la situation

On peut considérer deux types de variables : les outils mis à disposition et le choix des nombres.

Les outils mis à disposition

- la disponibilité ou non de la calculatrice.
Cette disponibilité permettra des calculs multiplicatifs qui ne seraient pas envisageables par des élèves ayant peu de connaissances dans la technique de multiplication⁵.
- la disponibilité ou non de répertoires multiplicatifs ou de tables de multiplication.

Le choix des nombres

- le nombre d'objets dont il faut calculer le prix.
Plus ce nombre est grand, plus les calculs basés sur l'addition itérée seront coûteux en temps et en risque d'erreurs. Un nombre d'objets plus grand que 10 doit favoriser l'apparition de calculs multiplicatifs⁶.
- les prix unitaires des objets.
Certains nombres facilitent les calculs additifs (par exemple les nombres terminés par 0 ou 5, ou bien les nombres dont les chiffres des unités et des dizaines sont petits (1 ou 2) retardant ainsi l'apparition des retenues). Les

⁵ Le sujet semble bien indiquer que ces élèves sont au début de l'apprentissage de la multiplication du fait du mot « présenté » dans la phrase « le signe $\times$ a été présenté ».

⁶ La valeur particulière 10 pour un nombre d'objets peut amener à introduire la règle du zéro : chaque dizaine devient une centaine et chaque unité devient une dizaine. Ceci peut ensuite inciter les élèves à utiliser la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Par exemple pour calculer le prix de 12 objets, on calcule le prix de 10 puis on ajoute le prix de 2. C'est la base de la technique opératoire de la multiplication.

nombres 25 et 50 sont encore plus particuliers car ce sont des diviseurs de 100, facilitant aussi bien les calculs additifs que multiplicatifs.

Question 4 Organisation de la classe

Dans les phases successives, le problème est résolu avec l'organisation suivante :

- **individuellement ou par équipe de 2** (phase 1 de l'activité 1)

Cette organisation est importante pour démarrer.

En effet un premier temps de réflexion individuelle permet à chaque élève de se mesurer seul au problème, de se rendre compte des difficultés qu'il rencontre personnellement.

Collaborer ensuite avec un voisin permet de corriger ses premières erreurs, aller plus loin dans la procédure choisie, voire de trouver la réponse.

On peut espérer que chaque élève aura ainsi adopté une procédure et l'aura menée le plus près de son terme.

La mise en commun permettra à chacun de se rendre compte de l'existence d'autres procédures et peut-être d'en changer par la suite.

- **par la collaboration de deux équipes de 2 , une qui demande un calcul et l'autre qui effectue ce calcul** (activité 1 phase 2)

Remarquons d'abord que l'organisation permet dans un premier temps à tous les élèves d'être émetteurs, et dans un second temps à tous d'être récepteurs.

Les émetteurs, qui choisissent de poser un calcul⁷, sont obligés de le faire en respectant une certaine forme pour être compris.

D'autre part, si dans la première phase, certains avaient adopté une procédure par additions intermédiaires (risque d'écrire par exemple: $27 + 27 = 54 + 27 = 81$,. etc.) ceci n'est plus possible car tout calcul est interdit. Ils doivent opter soit pour la longue écriture additive, soit pour l'écriture multiplicative.

Les récepteurs peuvent éventuellement transformer l'écriture additive en écriture multiplicative s'ils sont bien persuadés que cela ne change pas le résultat.

Cette organisation devrait ainsi favoriser l'adoption du signe $\times$ qui a dû être déjà rencontré par tous lors de la mise en commun précédente.

- **par la collaboration de deux équipes de 2, une qui résout le problème et une qui vérifie si le problème est bien résolu**

(les deux phases de l'activité 2)

Si une équipe a opté pour des calculs additifs, rien n'empêche l'équipe qui vérifie son travail d'effectuer une multiplication (surtout s'ils ont la calculette) et de manifester son éventuel désaccord si les résultats sont différents. Ils peuvent ensuite rechercher ou non où se trouve l'erreur éventuelle dans le calcul additif.

Cette organisation permet à nouveau d'inciter les élèves à adopter la multiplication plus rapide que l'addition itérée et donc à apprendre la technique opératoire la plus rapide pour le cas où la calculette n'est pas disponible.

⁷ Les dessins d'objets accompagnés du prix pourraient être interdits dans la consigne.

GUYANE

Note préliminaire :

Dans le corrigé qui suit, le texte en italique correspond à des compléments de formation. Ces remarques ne sont pas exigibles du candidat, elles visent à enrichir l'étude du sujet.

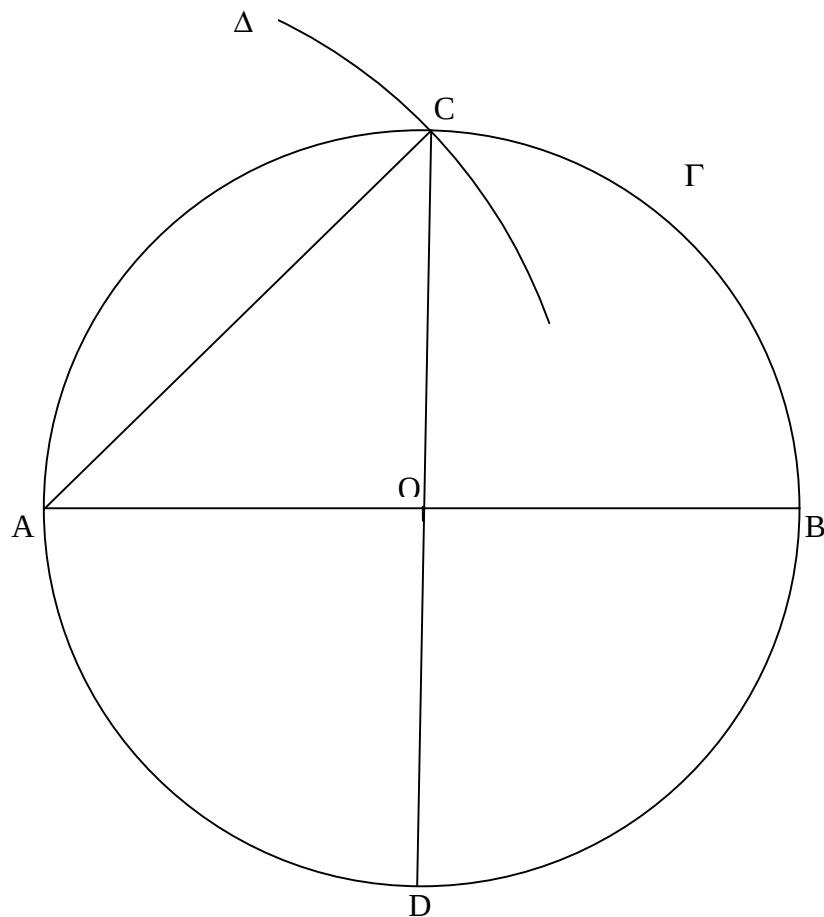
PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS) MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE 1

Question 1

Figure en vraie grandeur



Nous traçons le cercle de centre O et de rayon 5 cm : c'est aussi le cercle Γ de diamètre [AB].

C est l'un des points d'intersection du cercle Γ avec le cercle Δ de centre A et de rayon 7,1 cm. Traçons le segment [AC].

La droite (CO) recoupe le cercle Γ au point D qui est diamétralement opposé à C.

Question 2

Nature du quadrilatère ACBD

ACBD est un parallélogramme car ses 2 diagonales [AB] et [CD] se coupent en leur milieu commun O ([AB] et [CD] sont deux diamètres du cercle Γ de centre O).

ACBD est-il un losange ?

Le parallélogramme ACBD aurait alors ses deux côtés consécutifs [AC] et [CB] isométriques, montrons de deux façons différentes que cela n'est pas le cas.

Méthode 1 :

$$AC = 7,1 \quad AC^2 = 50,41$$

C point du cercle Γ et [AB] diamètre. Le triangle ACB inscrit dans le demi cercle est donc rectangle en C.

Avec le théorème de Pythagore $AB^2 = AC^2 + CB^2$

$$CB^2 = AB^2 - AC^2 \quad CB^2 = 100 - 7,1^2 \quad CB^2 = 100 - 50,41 \quad CB^2 = 49,59$$

Ainsi $AC^2 \neq CB^2$ donc $AC \neq CB$

ACBD n'est donc pas un losange.

Méthode 2 : par l'absurde.

Si $AC = CB$ alors $CB = 7,1$

$$\text{d'où } AC^2 + CB^2 = 2 \times 7,1^2 \quad \text{soit } AC^2 + CB^2 = 2 \times 50,41 ;$$

c'est à dire $AC^2 + CB^2 \neq 100$ et le triangle ACB ne serait donc pas rectangle en C ;
d'où la contradiction.

ACBD est un rectangle car il s'agit d' un parallélogramme ayant un angle droit en C (ACB triangle rectangle en C).

ACBD n'est pas un carré car dans ce cas ce serait un losange ce qui n'est pas le cas.

Question 3

Aire de ACBD

C'est un rectangle : son aire vaut donc $AC \times CB$, soit en cm^2 :

$$AC \times CB = 7,1 \times \sqrt{49,59}$$

d'où une aire peu différente de $49,99831 \text{ cm}^2$,

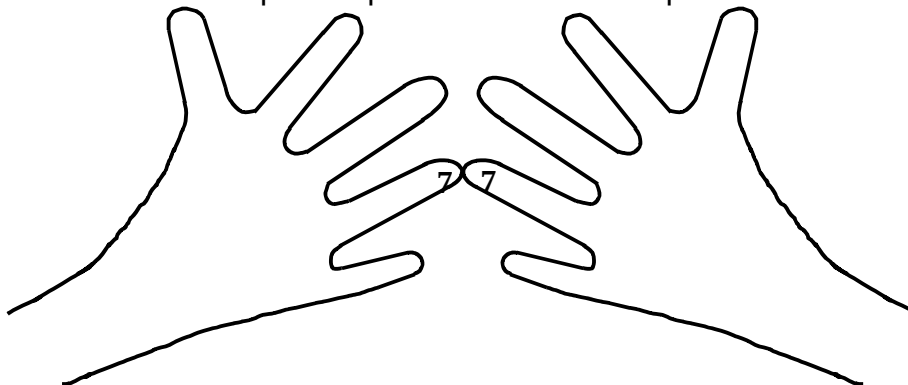
soit une **valeur approchée de $4998,3 \text{ mm}^2$** à $0,1 \text{ mm}^2$ par défaut.

EXERCICE 2

Question 1

Vérification de la méthode sur le calcul de 7×7

Nous utiliserons un indice 1 pour le premier nombre et 2 pour le second.



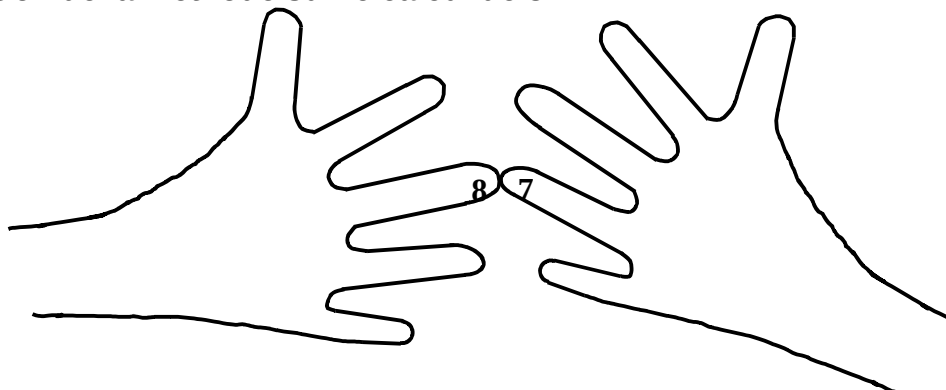
- Il y a 3 doigts « libres en haut » dans chaque main $U_1 = 3$ et $U_2 = 3$
Ce qui fait que le chiffre des unités est : $U = 3 \times 3$ soit $U = 9$.

Remarque :

La méthode n'indique pas qu'il s'agit du « chiffre des unités » du résultat.

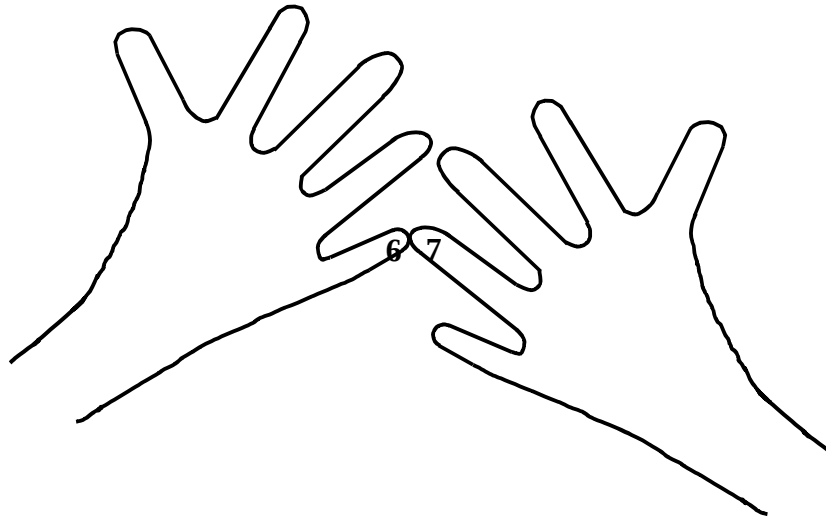
- Le nombre de doigts « en bas, y compris ceux qui se touchent » est de $D_1 + D_2 = 2 + 2$, soit $D = 4$. C'est le chiffre des dizaines.
- Le résultat est donc bien : $\overline{DU} = 49$.

Vérification de la méthode sur le calcul de 8×7



- Il y a 2 doigts « libres en haut » dans la main gauche et 3 doigts « libres en haut » dans la main droite $U_1 = 2$ et $U_2 = 3$.
- Ce qui fait que le chiffre des unités est $U = 2 \times 3$ soit $U = 6$.
- Le nombre de doigts « en bas, y compris ceux qui se touchent » est de $D_1 + D_2 = 3 + 2 = 5$. C'est le chiffre des dizaines.
- Le résultat est donc bien : $\overline{DU} = 56$.

Question 2
Le cas de 6×7



Il y a 4 doigts « libres en haut » dans la main gauche et 3 doigts « libres en haut » dans la main droite : $U_1 = 4$ et $U_2 = 3$.

Les unités devraient être : $U = 4 \times 3$ soit $U = 12$.

Ce nombre est constitué de deux chiffres, car $U > 10$.

Le nombre de doigts « en bas, y compris ceux qui se touchent » est de $D_1 + D_2 = 2 + 1$ soit $D = 3$.

Nous n'obtenons plus l'écriture canonique en base dix : $\overline{DU}$ du résultat, mais :

$$R = (D \times 10) + U.$$

Il faut échanger 10 unités contre une dizaine supplémentaire pour obtenir l'écriture canonique.

$$R = (3 \times 10) + 12 ; \quad \text{d'où } R = (4 \times 10) + 2 \quad \text{soit } R = 42$$

Le résultat est donc bien 42. La méthode reste valable

Trois cas sont dans cette catégorie :

Pour que le produit $U_1 \times U_2$ soit supérieur à 10, il faut : ($U_1 > 2$ et $U_2 > 3$) ou ($U_1 > 3$ et $U_2 > 2$) car le premier produit supérieur à dix est le produit 3×4 .

L'énumération des cas est alors le suivant (car $U_1 < 5$ et $U_2 < 5$) :

U_1	U_2	$U_1 \times U_2$	Premier nombre x	Second nombre y	Produit
3	4	12	7	6	42
4	3	12	6	7	42
4	4	16	6	6	36

Question 3
Justification de la méthode

Il s'agit de prouver que $10(D_1 + D_2) + U_1 U_2 = x y$

$$\begin{aligned} \text{Nous avons } x &= 5 + D_1 \\ \text{et } D_1 + U_1 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{soit } D_1 &= x - 5 \\ \text{soit } U_1 &= 5 - D_1 \end{aligned}$$

$$\text{d'où } U_1 = 10 - x$$

De même :

$$D_2 = 5 - y \quad \text{et} \quad U_2 = 10 - y$$

Calculons $10 (D_1 + D_2) + U_1 U_2$ en fonction de x et de y .

$$10 (D_1 + D_2) + U_1 U_2 = 10(x + y - 10) + (10 - x) (10 - y)$$

d'où

$$10 (D_1 + D_2) + U_1 U_2 = 10 x + 10 y - 100 + 100 - 10 x - 10 y + xy$$

soit

$$\mathbf{10 (D_1 + D_2) + U_1 U_2 = xy}$$

Remarque :

Pour plus de compléments et une autre façon de calculer sur ses doigts, voir "histoire universelle des chiffres" Georges Ifrah. Collection "bouquin" R. Laffont. Tome 1 pages 149 à 152.

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS) ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES
--

Nous proposons deux résolutions de ce problème

Méthode 1 : sous forme algébrique

On nomme respectivement m et v le nombre de motos et le nombre de voitures ; on peut écrire :

$$\begin{cases} m + v = 9 \\ 2m + 4v = 30 \end{cases} \quad \begin{cases} 2m + 2v = 18 \\ 2m + 4v = 30 \end{cases}$$

donc $2v = 12$ soit $v = 6$ et $m = 3$.

Le père dispose de 6 voitures et de 3 motos.

Méthode 2 : sous forme arithmétique

Supposons que le nombre de voitures soit 4 et le nombre de motos soit de 5.

Nous aurions : $4 \times 4 = 16$ et $5 \times 2 = 10$; soit 26 roues.

L'échange d'une moto contre une voiture permet l'ajout de deux roues supplémentaires. Il est donc suffisant d'échanger deux motos contre deux voitures.

Nous obtenons donc 6 voitures et 3 motos.

(Méthode arithmétique dite de la « fausse position »).

Question 1

Deux compétences que ce problème permet de travailler

Ce problème relève de la catégorie « problèmes de recherche ».

Nous pouvons citer les compétences générales suivantes :

- Chercher et produire une solution originale dans un problème de recherche (les élèves ne disposent pas de la solution experte pour ce problème)
- Mettre en oeuvre un raisonnement, articuler les différentes étapes de la solution.
- Argumenter à propos de la validité d'une solution produite par soi même.

Question 2

Procédures employées par les élèves A, B et C

Elève	Procédure
Elève A	Résultat juste. Il représente une voiture par quatre roues et une moto par deux roues. Il sépare les véhicules. Il semble avoir commencé par deux groupements voiture/moto, ce qui donne $4 + 2 + 4 + 2$, soit 12. Il place ensuite trois voitures, une autre moto et enfin une voiture ce qui fait bien 30 roues. Il semble avoir agi par ajustement et à l'aide de schémas, mais nous ne

	savons pas s'il a pris en compte le nombre total de véhicules qui est 9.
Elève B	Résultat erroné. Il schématise également les quatre roues pour une voiture et deux roues pour une moto. Selon la façon dont il a réalisé ses schémas (que nous ne connaissons pas), nous pouvons avancer deux hypothèses : H1 : Si l'élève a écrit en ligne, il a privilégié le couple auto/moto. Une fois dessinés 5 couples, il effectue un dénombrement des roues de voitures et des roues de motos. Il trouve 20 et 10 donc 30 roues au total. Il n'a respecté qu'une contrainte du texte. Il n'a pas un total de 9 véhicules. Sa procédure de type couple « auto/moto » l'empêche d'échanger deux motos contre une voiture. H2 : Si l'élève a écrit en colonne, il a privilégié la décomposition de 30 en $20 + 10$. Il trouve 5 voitures et 5 motos. Si le nombre de roues est correct, il ne se soucie pas du nombre total de véhicules car nous pouvons en compter 10 dans sa solution qui ne répond donc pas à la consigne. Sa procédure se base donc sur un schéma, mais aussi sur une décomposition numérique de 30.
Elève C	Résultat erroné. Pour 9 véhicules qu'il considère comme des motos, il compte 18 roues. Il sait que $30 - 18 = 12$ et que $3 \times 4 = 12$. Cela l'amène à trouver 3 voitures. Il trouve 9 motos (nous considérons que « 18 motos » est une maladresse. Il voulait dire 18 roues, sinon, le 12 n'aurait pas de raison d'apparaître) et 3 voitures, ce qui donne bien 30 roues. Sa procédure est uniquement calculatoire. Il n'a respecté qu'une contrainte du texte. Il n'a pas un total de 9 véhicules.

Question 3

Erreurs et réussites

	Réussite	Erreur
Elève A	Le schéma est juste. Il trouve 6 voitures et 3 motos ce qui fait bien 30 roues et 9 véhicules.	Pas d'erreur. On ne peut pas savoir s'il a effectivement contrôlé la contrainte « 9 véhicules ».

Elève B	Les schémas et travaux numériques sont cohérents entre eux. Ils aboutissent à 30. (Respect de la deuxième contrainte).	Il n'a pas pris en compte la première contrainte : « 9 véhicules »
Elève C	Il trouve le bon nombre de roues au travers des 18 roues pour 9 motos et du complément à 30 de 18, soit 12 qui l'amène à trouver 3 voitures.	Il n'a pas pris en compte la première contrainte : « 9 véhicules »
Elève D	La réussite est obtenue grâce à des calculs très méthodiques par essais exhaustifs, en prévoyant d'augmenter le nombre de voitures de un à chaque essai et de diminuer simultanément le nombre de motos de un, sur la base d'un total de 9 véhicules. Il contrôle à chaque étape le nombre de roues et arrête donc son programme au 7 ^e pas car il obtient les 30 roues.	Pas d'erreur.
Elève E	Il part de 30 et soustrait des « 4 » et des « 2 » pour atteindre 0. Il a bien trouvé 9 véhicules au total, mais on ne peut rejeter l'hypothèse d'une réussite fortuite. Les calculs soustractifs écrits en ligne sont exacts, sauf un.	Une erreur est repérable au niveau du calcul de « 22 - 4 ». Il n'a pas vérifié si son travail donnait effectivement 30 roues.

SECOND VOLET (8 POINTS)

I - FICHE 8

Question 1

Deux compétences mathématiques (autres que celles liées à l'algorithme de l'addition)

Compétences liées à la connaissance des nombres

- Savoir comparer deux entiers naturels (concerne l'exercice 1)

Compétences liées au calcul

- Savoir calculer des sommes et des différences de nombres entiers,
- Savoir évaluer un ordre de grandeur (pour la question c) de l'exercice 1)

Compétences liées à la résolution de problèmes :

- Dans des situations où une quantité subit une augmentation, déterminer la quantité initiale, la quantité finale, la valeur de l'augmentation.
- Résoudre des problèmes nécessitant la détermination d'étapes intermédiaires (concerne la question b) de l'exercice 1 et l'exercice 4).
- Savoir lire et interpréter quelques schémas simples. (Concerne les exercices 2 et 3).

Question 2 (exercice 1)

Les nombres 40 et 100 de l'exercice 1...

Les nombres 40 et 100 de la question b) permettent aux élèves une activité de calcul réfléchi, sans obligatoirement passer par une addition posée. De 312, il est aisé de passer à 352 ; de 256, il est aisé de passer à 356 et alors de comparer 352, 328 et 356.

Remarque :

Ils sont, en même temps, choisis pour donner des nombres qui demandent toute attention pour être comparés.

Question 3 (exercice 1)

Justification de la comparaison à 1000 du nombre total

En ayant les nombres 352, 328 et 356, le professeur peut attendre :

- que les élèves travaillent sur l'ordre de grandeur en minorant chacune des quantités : 352 par 350 ; 328 par 300 ; 356 par 350 donc $352 + 328 + 356$ par 1000.

- que les élèves voient que la somme est supérieure à 9 centaines et 12 dizaines ($5 + 5 + 2$), donc à 1000.

Remarque :

Dans cette question, les auteurs supposent que les élèves travaillent sur la collection modifiée par la question b). Certains élèves pourront partir de la collection (donnée du problème) et conclure qu'il y a moins de 1000 timbres.

Question 4 (exercice 2)

Illustration du problème par un schéma

Arguments pour :

- Le schéma permet de faire passer l'élève du cadre d'un énoncé écrit en français à une représentation se servant de la droite graduée. Ce changement de cadre permet de faire varier les représentations et aide à la résolution du problème.
- La présence du mot inducteur « reste » peut engendrer une soustraction. Le schéma permet de lever la confusion.

Arguments contre :

- Le travail sur un tel schéma ne s'improvise pas. Si les élèves ont déjà travaillé sur ce type de support, l'apport est utile, sinon cela constitue une difficulté supplémentaire.
- Le schéma est amené par le fichier et n'est pas produit par l'élève. On n'a aucune garantie sur le sens que l'élève attribue à ce support.
- Le schéma donné induit la procédure à utiliser ; les élèves auraient pu, en l'absence du schéma, proposer d'autres procédures.

Question 5 (exercice 3)

Les variables didactiques et leurs effets

Remarque :

Nous rappelons en bas de page la définition d'une variable didactique¹. L'emploi de ce terme pour cet exercice suppose qu'on l'assimile à une situation de construction de nouvelles connaissances.

Variables	Effets
Le choix des nombres :	Selon le choix des nombres, « peu compliqués » ou non, l'élève pourra avoir recours au calcul réfléchi ou mental ou bien devra poser des calculs.

¹ Variables didactiques Une variable didactique est un élément de la situation dont la modification des valeurs influe significativement sur les procédures des élèves. Ce concept s'utilise dans le cas de situations de construction de nouvelles connaissances.

La place du nombre cherché	Les calculs sont soit additifs, soit soustractifs : Recherche d'un état final : calcul additif ; Recherche d'un état initial ou de la valeur de la transformation positive : calcul soustractif.
----------------------------	--

Nous proposons d'autres variables qui supposent une mise en scène de cet exercice dans la classe ;

Variables	Effets
Usage d'instruments	L'usage de la calculatrice facilite les calculs mais oblige à des décisions concernant le choix de l'opération. Par exemple, trouver l'état initial lorsque l'on ajoute 50 suppose, dans ce cas de soustraire 50 à 750 ou de faire des essais.
Usage de matériel de numération	Le matériel peut aider à trouver la solution, sans passer par des calculs

II - FICHE 9

Question 1

Différencier somme et addition

L'addition une loi de composition interne qui, à deux entiers naturels (exemple 3 et 5) en associe un autre : le résultat.

Le résultat de cette opération est aussi appelé somme, qui peut avoir une écriture additive ($3 + 5$) ou une écriture canonique (8)

Question 2 (exercice 2)

Analyse des problèmes

Nous traitons cette question à l'aide d'un tableau.

Les tâches communes à ces problèmes sont :

- comprendre les énoncés et écrire une phrase solution ;
- traduire un problème de réunion de collections d'objets par une écriture additive.

Problème	Tâche spécifique de l'élève	Difficultés internes au problème
A	Additionner trois nombres (250, 300 et 150)	Il faut avoir une connaissance de la structure d'un parking souterrain, ce qui a pour conséquence la compréhension de « rez de chaussée », « premier sous-sol », « deuxième sous-sol ».
B	Addition itérée de 42 trois fois. Remarque : la tâche peut être réalisée en additionnant 42 trois fois de suite, ou bien le cas échéant en effectuant 42×3 .	Le terme « chacun » est souvent source de difficulté de compréhension.
C	Deux nombres nouveaux sont à trouver (84 et 21) avant de répondre à la question finale. La tâche consiste donc à : - résoudre deux questions intermédiaires puis à répondre à la question. traduire l'expression « deux fois plus » par une écriture multiplicative et l'expression « deux fois moins » par « la moitié de ».	Ce problème demande de résoudre deux questions intermédiaires, ce qui est toujours une source de difficultés. D'autre part, ces deux questions sont lisibles à travers deux expressions langagières (deux fois plus, deux fois moins) qui mêlent le vocabulaire additif et multiplicatif.
D	Un nombre nouveau est à trouver (125) avant de répondre à la question finale. La tâche consiste donc à résoudre une question intermédiaire puis à répondre à la question.	Le groupe de mots « aussi lourde que les deux autres réunies » est sans doute source de difficulté.

Question 3 (exercice 2)

Maîtrise de la langue : piste de travail

Il s'agit de s'assurer de la bonne compréhension des expressions (deux fois plus, deux fois moins) :

Dans une activité collective, le professeur peut demander aux enfants de répondre à des questions orales comme :

« Paul a 6 billes, j'en ai deux fois plus, combien en ai-je ? ».

« Pierre a 4 billes, Jacques en a deux fois moins, combien Jacques en a-t-il ? ».

Dans le cadre de la maîtrise de la langue le professeur et les élèves peuvent proposer des reformulations à l'aide de synonymes :

« deux fois plus » signifie « le double » qui, du point de vue mathématique, se traduit par une multiplication par 2.

« deux fois moins » signifie « la moitié » qui, du point de vue mathématique, se traduit par une division par 2.

Le professeur peut s'appuyer sur un tableau comme ci - dessous pour permettre des reformulations.

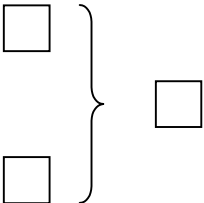
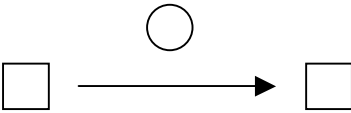
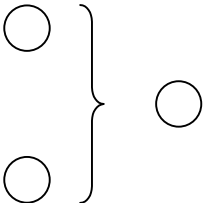
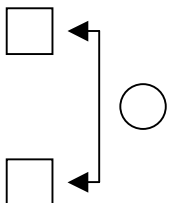
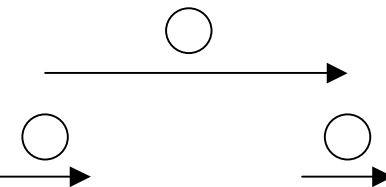
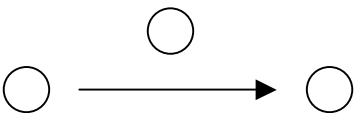
Deux fois moins La moitié Divisé par 2	4	?	12	6	?
	2	10	?	?	5

III - QUESTIONS D'ORDRE GENERAL

Question 1

Autre utilisation de l'addition

Pour répondre à cette question, on pourra se servir utilement du travail de G.Vergnaud sur la typologie des structures additives (cf : le moniteur de mathématiques, résolution de problèmes, fichier pédagogique p.16 Nathan 1997 et extrait p.17)

1  Relation partie-partie-tout	2  Transformation d'états Relation état-transformation-état Les états sont des mesures	5  Comparaison de relations
3  Comparaison d'états Relation référé-comparaison-référé Le référé et le référent sont des mesures	4  Composition des transformations	6  Transformation d'une relation Les états sont des relations

L'encadré de la fiche 8 se retrouve dans la structure (2) : on connaît l'état de départ, la transformation et on cherche l'état d'arrivée.

Remarque :

Dans certains items de l'exercice 3 c'est l'ajout ou l'état initial qui sont recherchés alors que l'on connaît le résultat.

L'encadré de la fiche 9 se retrouve dans la structure (1).

Une autre illustration de l'addition peut se construire à partir de la classification de Vergnaud :

- Voici un énoncé possible à partir de la structure (4) où l'addition sert à construire la composée de deux transformations :
Ce matin, Jean avait des billes. Il en a gagné 15 à la première récréation, puis 4 à la seconde récréation. Combien en a-t-il gagné en tout ?
- Et un autre à partir de la structure (3) (comparaison d'états) :
Jean a 127 billes. Pierre en a 50 de plus que Jean. Combien Pierre a-t-il de billes ?

Question 2

Justification du contenu par rapport aux compétences en fin de cycle 2

Remarque :

Aucun document relatif aux textes officiels n'avait été remis aux candidats.

Nous avons listé un ensemble de compétences mathématiques (I.O. 2002) de fin de cycle 2 qui sont sollicitées dans ces deux fiches. Toutefois, ces fiches portent sur la compréhension des énoncés de problèmes additifs (exemple fiche 8 problème 4 et surtout les problèmes 2 de la fiche 9) dans un cadre plus général.

L'accent n'est pas mis sur les techniques opératoires.

Compétences mathématiques repérées dans le document d'accompagnement du cycle 2 :

- Comparer deux entiers naturels (Fiche 8).
- Déterminer par addition ou soustraction la quantité à obtenir à la suite d'une augmentation ou d'une diminution. (Procédures expertes). (Fiche 8).
- Déterminer par addition la quantité obtenue par réunion de deux quantités connues. (Procédures expertes). (Fiche 9).
- Dans les situations où une quantité subit une augmentation ou une diminution, déterminer la quantité initiale ou trouver la valeur de l'augmentation et de la diminution. (procédures personnelles) (Fiche 8).

Les difficultés de lecture d'énoncés de problèmes sont signalées dans l'introduction des documents d'accompagnement des programmes : « *une attention particulière doit être portée aux difficultés de lecture des énoncés que rencontrent de nombreux élèves...* », mais pas dans les compétences mathématiques. « *La résolution de problèmes occupe une place importante dans l'apprentissage par les élèves des connaissances mathématiques* » est dans le même cas.

LILLE

Note préliminaire :

Dans le corrigé qui suit, le texte en italique correspond à des compléments de formation. Ces remarques ne sont pas exigibles du candidat, elles visent à enrichir l'étude du sujet.

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS) MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE 1

Question 1

La question porte manifestement sur la correspondance entre les pourcentages de lecteurs en grave difficulté des populations masculines et féminines testées dans chacune des catégories. On s'intéresse donc aux deux lignes surlignées ; il s'agit de répondre à la question : les deux suites de nombres grisées sont-elles proportionnelles ?

Non, elles ne sont pas proportionnelles ; il suffit, pour le justifier, de proposer comme contre-exemple, deux rapports de nombres correspondants qui ne sont pas égaux :

Par exemple :

$$\frac{\text{Pourcentage de garçons de la catégorie 1}}{\text{Pourcentage de filles de la catégorie 1}} \neq \frac{\text{Pourcentage de garçons de la catégorie 2}}{\text{Pourcentage de filles de la catégorie 2}}$$

$$\text{Soit } \frac{27,6}{20,1} \neq \frac{12,9}{8,4}$$

On peut vérifier cela de différentes manières :

- Méthode 1 :

En utilisant un théorème qui caractérise l'égalité de deux rapports $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ par l'égalité des « produits en croix » $a.d$ et $b.c$

$$27,6 \times 8,4 \neq 20,1 \times 12,9 \quad \text{donc} \quad \frac{27,6}{20,1} \neq \frac{12,9}{8,4}.$$

- Méthode 2 :

En utilisant les valeurs approchées des quotients :

$$\frac{27,6}{20,1} \approx 1,37 \text{ à } 0,01 \text{ près par défaut et } \frac{12,9}{8,4} \approx 1,53 \text{ à } 0,01 \text{ près par défaut}$$

Question 2a

Nombre de jeunes en grave difficulté dans chaque niveau de scolarité

Pour calculer l'effectif dans chaque niveau, on multiplie l'effectif total par le pourcentage prélevé dans le tableau et exprimé sous forme de fraction de dénominateur 100.

Par exemple, l'effectif dans le niveau 1 est donné par $\frac{6,7}{100} \times 522148 = 34983,916$, que l'on arrondit à l'unité, car les effectifs sont des nombres entiers.

	Niveau 1	Niveau 2	Niveau 3	Niveau 4	Total
Pourcentage	6,7	29,1	11,7	52,5	100,0
Effectif	34 984	151 945	61 091	274 128	522 148

Dans chaque niveau, on calcule le nombre de jeunes en grave difficulté de lecture, en multipliant l'effectif (calculé ci-dessus) par la fraction de dénominateur 100 qui exprime le pourcentage dans le niveau concerné (lu dans le tableau donné).

	Niveau 1	Niveau 2	Niveau 3	Niveau 4
Effectif total	34 984	151 945	61 091	274 128
Pourcentage de jeunes en grave difficulté	25,3	11,1	3,2	1,4
Nombre de jeunes en grave difficulté	$34\,984 \times \frac{25,3}{100}$ $\approx 8\,851$	$151\,945 \times \frac{11,1}{100}$ $\approx 16\,866$	$61\,091 \times \frac{3,2}{100}$ $\approx 1\,955$	$274\,128 \times \frac{1,4}{100}$ $\approx 3\,838$

Question 2b

Pourcentage de jeunes en grave difficulté dans chaque niveau de scolarité

Dans le contexte de l'exercice, « population totale » désigne l'ensemble des jeunes gens participant à la JAPD.

Méthode 1 :

Sur une population totale de 522 148, on a 8 851 jeunes en grave difficulté dans le niveau 1, ce qui s'exprime par le rapport $\frac{8\,851}{522\,148}$.

Il est demandé d'écrire ce rapport sous forme de pourcentage, c'est à dire comme une fraction de dénominateur 100 :

$$\frac{8\,851}{522\,148} \approx 0,017 \quad \text{soit} \quad \frac{1,7}{100} \quad \text{c'est à dire } 1,7\%$$

Méthode 2 :

6,7% de l'ensemble de la population totale est au niveau 1.

Parmi eux, 25,3% sont en grave difficulté.

Donc, les jeunes en grave difficulté au niveau 1 représentent 25,3% de 6,7% de la population totale.

Cela conduit à calculer :

$$\frac{25,3}{100} \times \frac{6,7}{100} \approx \frac{1,7}{100} \quad \text{soit } 1,7\%$$

Un raisonnement et un calcul similaires pour les niveaux 2, 3 et 4 conduisent au tableau ci-après :

	Niveau 1	Niveau 2	Niveau 3	Niveau 4
Pourcentage de jeunes en grave difficulté par rapport à la population totale.	1,7	3,2	0,4	0,7

Question 3

Nombre de garçons et nombre de filles dans le niveau 1

x désigne le nombre de garçons de niveau 1, c'est un nombre entier positif.

y désigne le nombre de filles de niveau 1, c'est un nombre entier positif.

x + y désigne le nombre total de jeunes au niveau 1, qui est calculé dans le premier tableau de la question 2a.

On peut donc écrire : $x + y = 34\,984$

D'autre part, dans le niveau 1 : 27,6% des garçons et 20,1% des filles sont en grave difficulté d'après les données de l'énoncé ; le nombre total de ces jeunes (garçons et filles réunis) en grave difficulté est 8851 (calculé à la question 2a).

Cela peut s'écrire :

$$\frac{27,6}{100}x + \frac{20,1}{100}y = 8\,851 \quad \text{c'est-à-dire } 27,6x + 20,1y = 885\,100$$

On résout le système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} x + y = 34\,984 \\ 27,6x + 20,1y = 885\,100 \end{cases}$$

La première équation permet d'écrire y en fonction de x et on procède par substitution de y dans la deuxième.

$$x = 34\,984 - y \quad \text{d'où } 27,6x + 20,1(34\,984 - x) = 885\,100$$

d'où après développement et réduction :

$$7,5x = 181\,921,6 \quad \text{c'est-à-dire } x \approx 24\,256,2$$

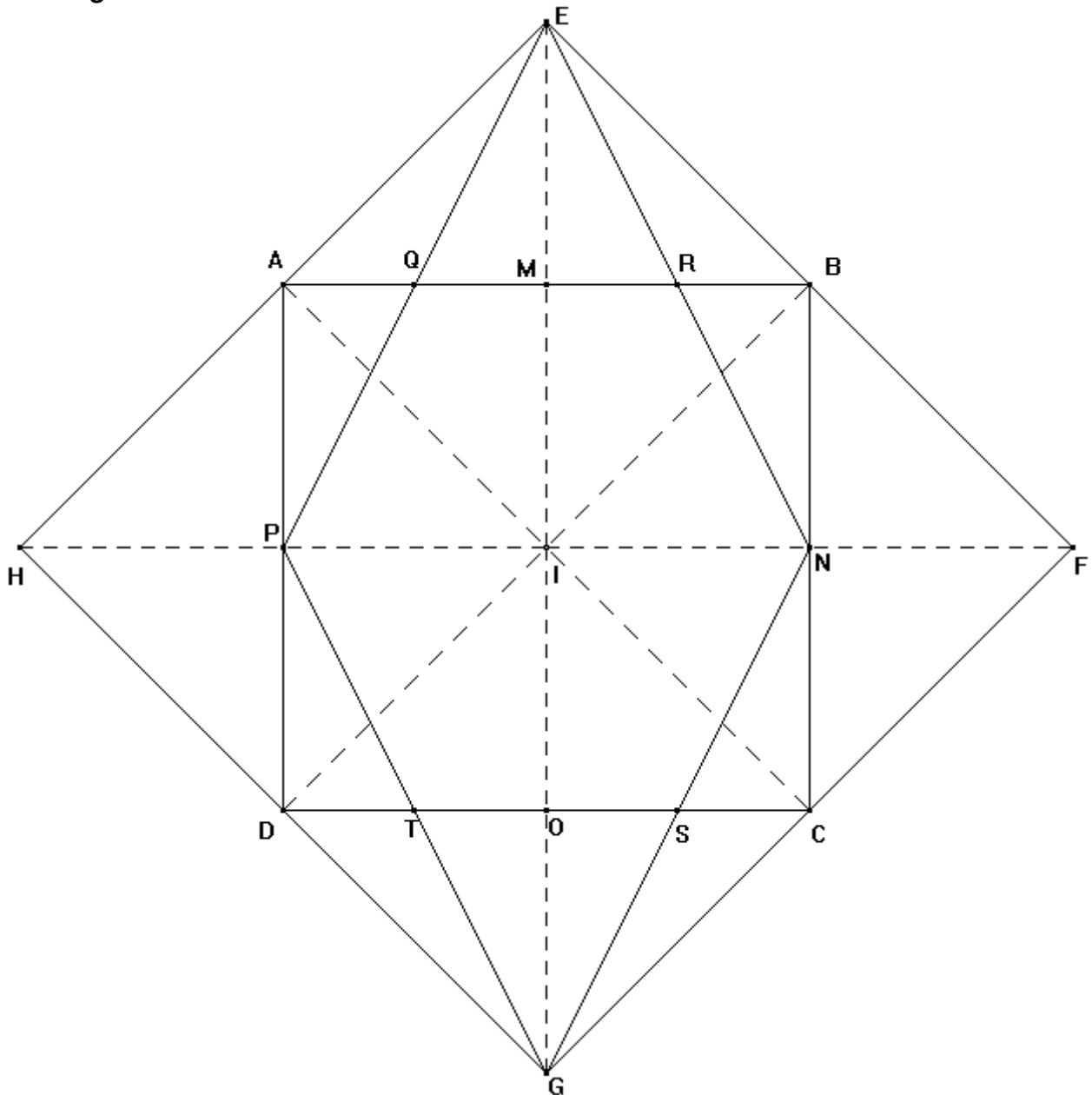
Le report de cette valeur dans la première équation permet de trouver une valeur approchée de y.

$$y = 34\,984 - x \approx 10\,727,8$$

On arrondit à l'entier le plus proche et on conclut que **le nombre de garçons de niveau 1 est 24 256** et que **le nombre de filles de niveau 1 est 10 728**.

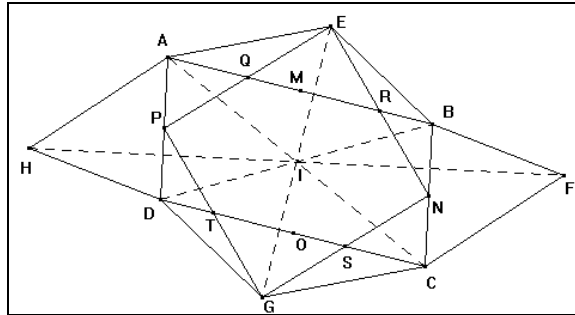
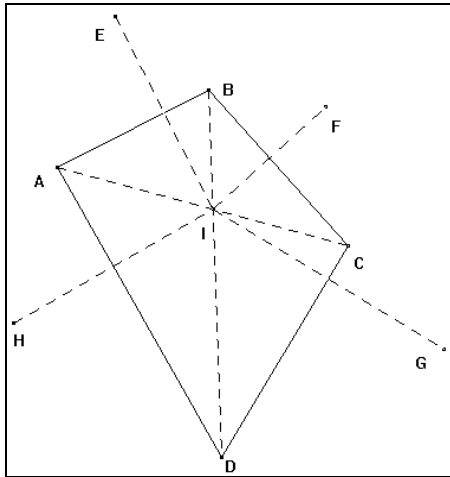
EXERCICE 2

La figure demandée



Remarque :

Les figures ci-dessous illustrent ce que devient la configuration (obtenue par les indications de l'énoncé) dans les cas où ABCD est un quadrilatère quelconque et où ABCD est un parallélogramme « ordinaire ». On y voit que les propriétés que l'on va démontrer dans l'exercice découlent du fait que ABCD est un carré.



Question 1 Nature du quadrilatère AEBI

Nous démontrons tout d'abord que AEBI est un losange, puis que c'est un carré ;

Le point I est le centre du carré ABCD, donc les longueurs AI et BI sont égales.

Par la symétrie orthogonale d'axe (AB), le point I a pour image le point E, les points A et B sont invariants. Or l'image d'un segment par une symétrie axiale est un segment de même longueur, donc le segment [AI] a pour image le segment [AE] et les longueurs AI et AE sont égales.

De même [BI] a pour image [BE] et $BI = BE$.

Par transitivité de l'égalité, on peut conclure que les longueurs des quatre côtés du quadrilatère AEBI sont égales, **donc AEBI est un losange**.

Le quadrilatère ABCD est un carré, donc ses diagonales sont perpendiculaires, cela entraîne que les droites (AI) et (IB) sont perpendiculaires, c'est à dire que **le losange AEBI a un angle droit : c'est un carré**.

Question 2 Nature du quadrilatère EFGH

Nous démontrons en plusieurs étapes que le quadrilatère EFGH est un carré :

- Nous démontrons que les points E, I, G sont alignés, de même que les points H, I, F ; c'est-à-dire que le point I est le point d'intersection des diagonales du quadrilatère EFGH.
- Nous démontrons que les longueurs EI, IG, IF, IH sont égales, ce qui entraîne que les diagonales du quadrilatère EFGH ont même longueur et même milieu.
- Nous démontrons que les droites (EG) et (HF) sont perpendiculaires.
- Nous concluons que EFGH est un carré car c'est un quadrilatère qui a ses diagonales perpendiculaires, se coupant en leur milieu et de même longueur.

a) Les points E, I, G sont alignés, de même que les points H, I, F.

Le point E est le symétrique du point I par rapport à la droite (AB), donc la droite (EI) est perpendiculaire à la droite (AB).

De même, le point G est le symétrique du point I par rapport à la droite (DC), donc la droite (GI) est perpendiculaire à la droite (DC).

Or les droites (DC) et (AB) sont parallèles, comme côtés opposés du carré ABCD, cela entraîne que la droite (GI) est perpendiculaire à la droite (AB).

Par le point I, il passe une unique perpendiculaire à la droite (AB), donc les points E, G, I sont alignés.

Par un raisonnement analogue, on démontre que les points H, I, F sont alignés sur une perpendiculaire à la droite (AD).

Le point I est donc situé sur les droites (EG) et (HF) : il est le point d'intersection des diagonales du quadrilatère EFGH.

b) Nous démontrons que les longueurs EI, IG, IF, IH sont égales.

Nous avons démontré à la question 1 que le quadrilatère AEBI est un carré ; par un raisonnement analogue on démontre que les quadrilatères BFCI, CGDI, DHAI sont aussi des carrés. On a donc pour chacun des diagonales de même longueur : $AB = EI$; $BC = IF$; $CD = IG$; $DA = IH$.

ABCD est un carré, donc ses côtés sont de même longueur, ce qui achève de prouver l'égalité des longueurs EI, IG, IF, IH.

Nous démontrons que les diagonales du quadrilatère EFGH ont même longueur et même milieu.

De l'égalité de EI et IG, et de l'alignement des points E, I, G, on déduit que I est le milieu du segment [EG]. On a de ce fait l'égalité : $EG = EI + IG$.

Par un raisonnement analogue on démontre que I est le milieu du segment [HF] et que $HF = HI + IF$.

On en déduit (avec l'égalité des longueurs EI, IG, IF, IH) que les longueurs HF et EG sont égales.

c) Nous démontrons que les droites (EG) et (HF) sont perpendiculaires.

On a établi au (a) que la droite (AB) et la droite notée (EI) ou (EG) sont perpendiculaires. Or les segments [AB] et [AD] sont deux côtés consécutifs du carré ABCD, donc les droites (AB) et (AD) sont perpendiculaires.

Les droites (EG) et (AD) ont une perpendiculaire commune, donc les droites (EG) et (AD) sont parallèles.

Or on a établi également au (a) que les droites (HF) et (AD) sont perpendiculaires, donc la droite (EG) est perpendiculaire à la droite (HF).

e) Nous concluons.

Nous avons démontré que les diagonales du quadrilatère EFGH sont perpendiculaires (c), de même longueur et de même milieu I (b) : ces propriétés caractérisent **un carré**.

Question 3

Alignement des points E, B, F

Le quadrilatère AEBI est un carré donc les droites (EB) et (AI) sont parallèles.

Le quadrilatère BFCI est un carré donc les droites (FB) et (CI) sont parallèles.

Or les points A, I, C sont alignés (I est le centre du carré ABCD, il appartient donc à la diagonale (AC)), donc (AI) et (IC) désignent la même droite.

Les droites (BF) et (EB) sont toutes deux parallèles à cette droite et passent par le point B, elles sont donc confondues ; donc **les points E, B, F sont alignés**.

Question 4a

$$AQ = \frac{1}{4}AB$$

Le point M est donné comme le milieu du segment [AB], or le quadrilatère AEBI est un carré, donc ses diagonales se coupent en leur milieu. Il en résulte que le point M appartient au segment [EI] et qu'il en est aussi le milieu.

De la même manière, le point P donné comme milieu du segment [AD] appartient au segment [HI] et en est le milieu.

On peut déduire entre autres que $PI = \frac{1}{2}HI$

Méthode 1 : utilisation du triangle EPI

On a montré à la question 2a que les droites (AB) et (HF) sont toutes les deux perpendiculaires à la droite (EI) ; il en résulte qu'elles sont parallèles entre elles. Dans le triangle EPI, la droite (MQ) est donc parallèle au côté [PI] et passe par le milieu du côté [EI]. On en déduit d'une part que la longueur MQ est la moitié de la longueur PI, et également (en vue de la question 4c) que le point Q est le milieu du segment [EP].

$$\text{On a donc } MQ = \frac{1}{2}PI = \frac{1}{4}HI ;$$

or $HI = AD$ (les diagonales d'un carré sont de même longueur)

et $AD = AB$ (les côtés d'un carré sont de même longueur)

$$\text{il vient que } MQ = \frac{1}{4}AB.$$

Par ailleurs $AM = \frac{1}{2}AB$ et le point Q appartient au segment [AM] donc on a l'égalité $AM = AQ + QM$.

Il vient que $AQ = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{4}AB$; c'est-à-dire : **$AQ = \frac{1}{4}AB$** , ce qui termine cette question et permet de déduire en vue de la question 4c que le point Q est le milieu du segment [AM].

Méthode 2 : utilisation du quadrilatère AEMP

On commence par démontrer que c'est un parallélogramme, pour cela on va montrer que ses côtés opposés sont parallèles.

ABCD est un carré donc la droite (AP) est perpendiculaire à la droite (AM) ; la droite (EI) est également perpendiculaire à la droite (AM), donc les droites (AP) et (EI) sont parallèles.

Dans le triangle HEI, on a les points P et M qui sont les milieux de deux côtés ; donc la droite (MP) est parallèle à la droite (HE) qui est le troisième côté du triangle.

Le quadrilatère AEMP a ses côtés opposés parallèles deux à deux, c'est un parallélogramme.

La point Q est le point d'intersection des diagonales [AM] et [PE] de ce parallélogramme, il se trouve donc au milieu de celles-ci ; donc la longueur AQ est la moitié de la longueur AM.

Le point M étant le milieu du segment [AB] on peut conclure que la longueur AQ est le quart de la longueur AB.

Question 4b Nature du quadrilatère ENGP

On suppose démontré tout d'abord (comme pour les points M et P) que le point N est le milieu du segment $[IF]$. Ensuite la démonstration choisie utilise la caractérisation du losange par ses diagonales.

On a déjà établi que les droites (EG) et (HF) sont perpendiculaires à la question 1 ; des alignements et des égalités de longueurs précédemment établis on tire que le point I est le milieu du segment $[PN]$. On savait déjà, depuis la question 2, que ce point I est le milieu du segment $[EG]$.

Le quadrilatère ENGP a ses diagonales perpendiculaires et de même milieu : **c'est un losange.**

Question 4c Aires des quadrilatères ABCD et ENGP

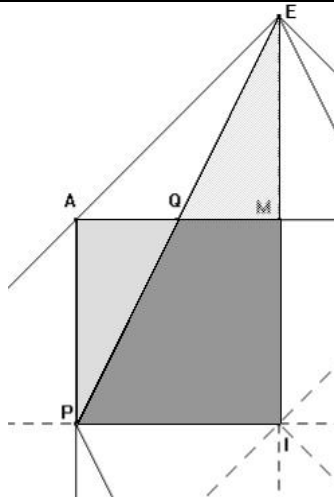
Remarque :

Pour les questions 4c et 5 nous rédigeons des démonstrations par comparaisons de surfaces géométriques, on peut également utiliser les formules de calcul d'aire connues.

Nous commençons par démontrer que les triangles PAQ et EMQ sont superposables et pour cela nous utilisons le quadrilatère AEMP¹ :

Nous avons démontré en traitant la question 4a (méthode 1), que ses diagonales $[EP]$ et $[AM]$ ont le point Q pour milieu, cela entraîne donc que le quadrilatère AEMP est un parallélogramme dont le point Q est le centre. Par suite, les triangles APQ et MEQ sont images l'un de l'autre par la symétrie de centre Q, et ils sont bien superposables.

Nous comparons le quadrilatère AMIP et le triangle EPI :



Ces deux surfaces ont en commun le quadrilatère PIMQ ; le quadrilatère AMIP est la réunion disjointe du quadrilatère PIMQ et du triangle APQ ; le triangle EPI est la réunion disjointe du quadrilatère PIMQ et du triangle MEQ. Cela entraîne que **le quadrilatère AMIP et le triangle EPI ont la même aire.**

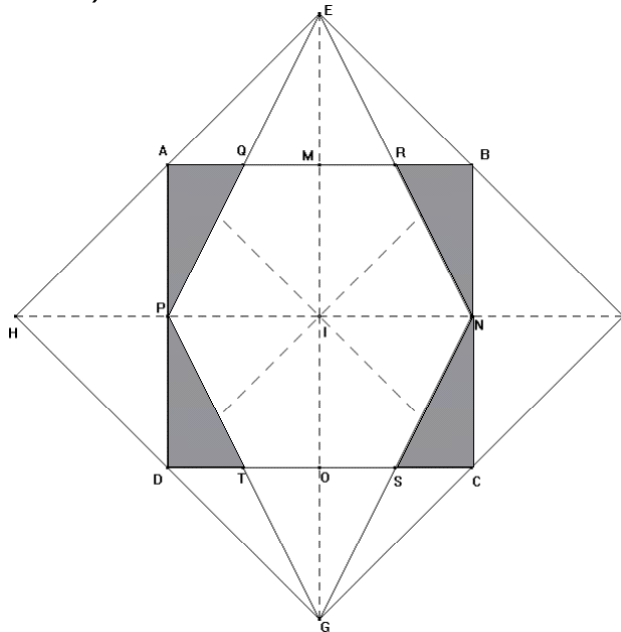
¹ Si l'on a utilisé la méthode 2 à la question 4a, la nature de ce quadrilatère est déjà établie.

Les droites (EG) et (PN) sont des axes de symétrie pour le losange ENGP car ce sont ses diagonales, et pour le carré ABCD car ce sont les médianes de ses côtés (On a déjà démontré à la question 3a que le point M donné comme milieu du côté [AB] est sur la droite (EG), cette droite étant perpendiculaire à la droite (AB) ; un raisonnement analogue s'applique aux trois autres côtés). On en déduit que **le carré ABCD (vu comme réunion des quadrilatères AMIP, MBNI, INCO, IODP) a la même aire que le losange ENGP (vu comme réunion des triangles EIP, EIN, NIG, GIP).**

On déduit également des symétries évoquées que les quadrilatères AMIP, MBNI, INCO, IODP sont superposables, ce sera utile à la prochaine question.

Question 5 Aire du polygone QRNSTP

On va déduire cette aire de l'aire du carré ABCD, en regardant l'hexagone QRNSTP comme obtenu en « retirant » les triangles AQP, RNB, NCS, TDP au carré ABCD (voir illustration ci-dessous).



En remarquant à la question 4c que (EG) et (PN) sont les médianes du carré ABCD, on dit que le quadrilatère AMIP a trois angles droits (en M, en I, en P), on sait par ailleurs que les longueurs AM et AP sont égales, donc AMIP est un carré et le triangle AMP un demi carré.

On a démontré que le point Q est le milieu du segment [AM], donc la droite (PQ) est une médiane du triangle AMP, ce qui entraîne que l'aire du triangle AQP est la moitié de l'aire du triangle AMP et donc le quart de l'aire du carré AMIP et par suite le seizième de l'aire du carré ABCD.

Donc l'aire de l'hexagone QRNSTP est obtenue en retirant à l'aire du carré ABCD quatre fois un seizième de celle-ci, soit un quart.

$$\text{aire (QRNSTP)} = \text{aire (ABCD)} - \frac{1}{4} \cdot \text{aire (ABCD)} = \frac{3}{4} \text{ aire (ABCD)}$$

ce qui donne pour la **mesure d'aire exprimée en cm²** : $\frac{3}{4} \times 8 \times 8 = 48$

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Prénoms	Description de la stratégie et validité	Validité de la production écrite et de la réponse	Cause(s) d'erreur(s) possible(s)	Message aux parents
Clémence	Elle calcule la somme dont elle dispose en additionnant les valeurs unitaires des pièces ou billets. Elle trouve 33. On peut penser qu'elle ajoute mentalement des « 5 » pour approcher 33 par défaut. Elle produit une décomposition additive de 33 utilisant un maximum de termes « 5 ». Elle compte enfin le nombre de « 5 ». Sa procédure est tout à fait valide : le nombre de billets trouvés est la réponse à la question : combien de fois 5 dans 33 ?	Elle ajoute « 2 » trois fois seulement et non quatre fois. Ce qui fausse la réponse. Mais tous les calculs écrits sont justes. Le caractère erroné de la réponse finale provient uniquement de l'oubli initial d'un terme 2.	L'oubli du terme 2 peut relever d'une étourderie ou d'une difficulté à contrôler une longue liste de nombres (écriture de l'addition en colonne).	Clémence a un raisonnement correct dans ce problème à deux étapes, difficile pour un début de CE2. Des calculs additifs bien maîtrisés. Son erreur est sans doute due à une étourderie.
Brandon	Il constitue des sommes de 5 € de deux manières différentes : * regroupement de toutes les pièces de 2 € et de pièces de 1 € par addition mentale de leurs valeurs. * remplacement de chaque billet de 10 € par deux billets de 5 €. Cette procédure est pertinente, elle peut conduire à la réponse, à condition de bien contrôler le nombre de sommes de 5 € obtenues. Elle est favorisée par la collection de pièces donnée par l'énoncé : s'il fallait échanger 5 pièces de 2 €, on ne pourrait pas procéder de la même manière.	Les échanges évoqués sont pertinents et prennent en compte toutes les données de l'énoncé. Les écrits évoquent des échanges ; ce sont des moyens de recherche et de contrôle, mais ce ne sont pas des écrits mathématiques. De telles écritures ont toute leur place dans un écrit de recherche. La réponse est fausse car il se trompe en dénombrant les billets de 5 € obtenus.	Au moment de conclure, on peut penser qu'il a compté le nombre de « 5 », apparaissant sur sa feuille, ou le nombre d'échanges (ou peut-être de lignes) sans prendre en compte les doublements qu'il avait exprimés par l'expression « 2 billets de 5 € ».	Brandon a mis en oeuvre une stratégie personnelle adaptée aux données du problème. Il n'a pas su utiliser son écrit de recherche pour trouver la réponse à la question posée. Le symbole €, est systématiquement écrit à l'envers (problème d'orientation des signes ?).

Malika	Sa procédure est à rapprocher de celle de Clémence. Elle calcule la somme totale, ajoute des « 5 » jusqu'à trouver 35 et conclut en comptant les « 5 » de son addition itérée. A la différence de Clémence, d'une part, elle calcule mentalement la valeur totale des deux billets de 10 € et celle des sept pièces de 1 € ; elle ne le fait pas pour les pièces de 2 €. Elle pose et effectue ensuite une addition en colonne utilisant ces sommes partielles. D'autre part, elle pose en colonne son addition itérée de 5, l'utilisant à la fois comme outil de recherche et de contrôle du résultat (la présence de la retenue le laisse penser).	Tout est juste. Les écrits produits sont des écrits mathématiques totalement décontextualisés, remarquables en début de cycle 3.	Pas d'erreur. <u>Remarque :</u> On peut supposer qu'elle ne regroupe pas les sommes de 2 € en une somme de 8 €, car à ce stade de la scolarité, le résultat multiplicatif « 4 fois 2 » est moins disponible que « 2 fois 10 » ou « 7 fois 1 ».	Malika est capable d'effectuer un traitement mathématique d'un problème additif complexe mettant en jeu des sommes d'argent sans référence au contexte matériel.
Ludovic	Il dessine le « contenu initial de la tirelire », en indiquant la valeur sur les différentes pièces et billets. Il n'y a pas de trace d'une autre recherche, mais la réponse « 35 » laisse penser qu'il a calculé la somme totale. Il n'a pas su exploiter ce résultat pour répondre correctement à la question posée..	Les dessins représentent fidèlement les pièces et les billets donnés par l'énoncé. ; l'élève ne va pas au-delà de cette représentation. La réponse : 35 est la somme totale de l'argent de poche évoqué, mais ne correspond pas au nombre de billets de 5 € après échange, elle est donc fausse.	Il est probable que l'élève n'a pas réellement compris le problème d'échange d'une somme d'argent contre des billets de 5 €. et qu'il a calculé la somme totale par automatisme. Il a pu aussi se construire une bonne représentation du problème puis perdre de vue le but à atteindre.	Ludovic ne parvient pas à utiliser sa représentation matérielle correcte du problème posé pour le résoudre.

SECOND VOLET (8 POINTS)

Question 1

Notion mathématique travaillée dans la séquence.

Le principe des carrés magiques repose sur des égalités de sommes d'entiers disposés dans un tableau carré, donc la notion mathématique travaillée est l'addition.

Question 2

Compétences mises en jeu dans la séquence.

Ces recherches développent des compétences en résolution de problème :

- « Utiliser ses connaissances pour traiter des problèmes ». Des connaissances du répertoire additif doivent être mobilisées pour effectuer les recherches proposées.
- « Chercher et produire une solution originale dans un problème de recherche ». L'existence d'une phase de recherche individuelle doit favoriser l'émergence de solutions personnelles.
- « Contrôler et discuter la pertinence ou la vraisemblance d'une solution ». La recherche individuelle suppose un processus d'essais, de contrôle et d'ajustement. La phase collective conduira les élèves à discuter des solutions proposées.
- « Argumenter à propos de la validité d'une solution produite par soi-même ou par un camarade ». *Des choix différents dans la phase collective (examen de propositions de solutions diverses erronées ou non) auraient pu permettre de travailler cette compétence*

A condition que les recherches s'effectuent sans calculatrice, elles développent aussi les compétences en calcul suivantes :

- « Connaître les tables d'addition (de 1 à 9) et les utiliser pour calculer une somme, une différence ou un complément ».
- « Organiser et effectuer mentalement ou avec l'aide de l'écrit, sur des nombres entiers, un calcul additif ou soustractif en s'appuyant sur des résultats mémorisés et en utilisant de façon implicite les propriétés des nombres et des opérations ».
- « Calculer des sommes et des différences de nombres entiers par un calcul écrit en ligne ou posé en colonnes ».

Question 3

Utilisation de la calculatrice.

L'utilisation ou non de la calculatrice est à envisager en fonction des objectifs prioritaires de l'enseignant qui n'apparaissent pas sur la préparation ; elle dépend également des compétences individuelles des élèves.

Sur un plan collectif :

- Si l'objectif prioritaire de l'enseignant est de proposer à ses élèves un problème de recherche, il est pertinent de mettre la calculatrice à disposition des élèves afin d'éviter les obstacles liés au calcul et de focaliser le travail des élèves sur la recherche.
- Si l'objectif principal de l'enseignant est de renforcer chez ses élèves différentes significations en lien avec la soustraction, la calculatrice (avec la touche -) peut être un outil judicieux pour travailler l'équivalence entre le calcul d'une différence et la recherche d'un complément ; la calculatrice prend en charge tous les calculs, en particulier ceux pour lesquels les élèves ne disposent pas encore de technique maîtrisée.
- Enfin, si l'objectif prioritaire de cette séquence est, pour le maître qui la conduit, un entraînement au calcul l'utilisation de la calculatrice n'est pas pertinente.

Sur le plan individuel :

- Un élève qui a une mauvaise connaissance du répertoire usuel additif ne peut réellement s'engager dans cette recherche puisqu'il n'est pas en mesure de distinguer un carré magique d'un banal tableau de nombres. L'utilisation d'une calculatrice dans cette séquence permettrait à cet élève de s'engager dans la recherche.
- Un élève qui a des difficultés dans les calculs additifs et soustractifs (par exemple parce qu'il n'a pas l'habitude du calcul réfléchi et parce qu'il pose systématiquement toutes les opérations ou qu'il a une mauvaise connaissance du répertoire soustractif et/ou du répertoire des compléments) sera très lent dans la construction de chaque tableau et dans les vérifications.
L'utilisation d'une calculatrice dans cette séquence permettrait à cet élève de se concentrer sur les contraintes du problème et d'engager des recherches efficaces sans être handicapé par ses difficultés en calcul. La résolution du problème reste à la charge de l'élève, l'outil calculatrice ne prenant en charge que l'exécution des calculs et non leur organisation.
- Dans cette optique, on pourrait penser que tous les élèves peuvent tirer bénéfice de l'utilisation d'une calculatrice... il n'en est rien : pour celui qui calcule mentalement avec aisance, la calculatrice ralentit, elle peut être source d'erreurs (liées à la saisie) et peut faire perdre le fil de la démarche engagée par la rupture visuelle nécessaire.

Question 4

La somme des nombres de 1 à 9 est 45. On peut calculer cette somme en effectuant l'addition de ces neuf nombres ou en utilisant la formule qui donne la somme des n premiers entiers : $\frac{n.(n+1)}{2}$ pour $n = 9$.

On veut que « la somme des trois nombres écrits sur chacune des trois lignes et des trois colonnes soit chaque fois la même » (contrainte formulée par l'énoncé). Chaque nombre figure dans une seule ligne et dans une seule colonne, on cherche donc à d'écrire 45 comme somme de trois nombres égaux. Il n'y a qu'une décomposition possible, c'est $15 + 15 + 15$.

Question 5

Rôle de la mention du nombre 15 dans la séquence.

En donnant la somme attendue pour chaque ligne, colonne, diagonale l'énoncé oriente la démarche vers la recherche de triplets d'entiers de somme 15.

Si cette somme n'est pas donnée, l'entrée dans la recherche est différente : la procédure experte consiste à commencer par chercher la valeur de cette somme ; mais on peut penser que des élèves du cycle 3 vont s'engager dans un premier essai en plaçant les neuf nombres dans un tableau, puis en calculant les sommes et en cherchant à ajuster : le nombre d'essais peut alors être très important.

Par ce choix, l'enseignant peut mettre l'accent soit sur la recherche, soit sur les calculs.

Question 6

La recherche individuelle initiale.

La recherche individuelle du début de séance est en général très brève et a pour seul objectif l'appropriation du problème par les élèves. Dans ce cas, la véritable recherche commence après une analyse commune du but à atteindre qui favorise l'entrée dans le problème de tous les élèves... sans « tuer » la recherche.

Ici la phase collective s'appuie sur des solutions trouvées par quelques élèves. Cela suppose que la première phase a été suffisamment longue et a permis à certains élèves de s'engager dans la recherche, et peut-être de résoudre le problème.

Dans ce contexte, les objectifs de la première phase individuelle sont, d'une part de repérer les élèves mis en difficulté par cette recherche et d'intervenir individuellement auprès d'eux, d'autre part de fournir des exemples de solutions en vue du travail collectif qui suit.

Question 7

Analyse de la phase collective.

Le maître veut faire en sorte que tous les élèves disposent de deux solutions, afin de relancer l'activité et d'orienter celle-ci vers une recherche exhaustive de toutes les solutions.

Pour les élèves qui n'avaient pas su résoudre le problème, la phase collective apporte des exemples de bonnes réponses et des explications à leur sujet (la place du nombre cinq dans les tableaux, et l'utilisation des décompositions additives de dix).

Pour les élèves qui ont su résoudre le problème, la phase collective permet, par la juxtaposition des deux carrés magiques, de prendre conscience de la pluralité des solutions. Si on tient compte des deux solutions que le maître envisage de proposer dans sa fiche de préparation, les élèves peuvent être conduits à observer l'existence d'un lien entre les deux solutions : une permutation circulaire des nombres. Cela peut leur suggérer une méthode de recherche d'autres solutions.

Remarque :

On peut s'interroger sur le choix de ne proposer dans cette phase que des « bonnes solutions ». Ne serait-il pas opportun à ce moment du travail, de présenter aux élèves des carrés magiques et d'autres non magiques, pour les faire étudier et valider par la classe : il s'agit alors de faire formuler oralement aux élèves les raisons pour lesquelles on les accepte ou on les écarte. Ce travail peut stimuler l'activité de recherche des élèves.

La phase collective décrite dans la fiche de préparation peut engager certains élèves, lors de la phase individuelle qui suit, dans une stratégie de recherche s'appuyant uniquement sur les relations spatiales entre les nombres (chercher, par exemple, à obtenir une nouvelle solution par permutation circulaire opérant sur une des solutions données par le maître). Dans ce cas, le problème reste consistant mais ne porte plus sur l'addition.

Question 8

Le nombre 10 et ses décompositions

La phase collective fait apparaître le rôle et la place privilégiée du nombre 5 dans ces carrés magiques et met en évidence toutes les décompositions possibles du complément de 5 à 15 (c'est à dire 10) en somme de deux entiers : $1 + 9$; $2 + 8$; $3 + 7$; $4 + 6$.

Recherche d'autres carrés magiques

Étant donné un carré ABCD de centre O, dont les médianes sont appelées (E) et (E'), les transformations géométriques qui le laissent globalement invariant sont les suivantes :

- Rotations de centre O et d'angle 90° , 180° ou 270° .
- Symétrie d'axe (AC), (BD), (E) ou (E')

En faisant opérer ces transformations sur un carré magique, on obtient de nouveaux carrés magiques ; par exemple (il y en a bien d'autres...) :

Solution
donnée dans
l'énoncé :

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Solution 1

Par rotation
d'angle 90° ,
on obtient :

4	3	8
9	5	1
2	7	6

Solution 2,
donnée dans
l'énoncé

Par rotation
d'angle 180° ,
on obtient :

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Solution 3

Par symétrie
d'axe (E), on
obtient :

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Solution 4

Si on identifie les cases disposées autour de la case 5 à celles d'une « roue » comme dans la recherche A, les rotations de centre « la case 5 » et d'angle 45° , 135° , 225° et 315° fournissent d'autres solutions ; par exemple (il y en a bien d'autres...) :

Solution
donnée :

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Solution 1

Par rotation
d'angle 45° ,
on obtient :

3	8	1
4	5	6
9	2	7

Solution 5

Par rotation
d'angle 315° ,
on obtient :

1	6	8
8	5	2
3	4	9

Solution 6

Par symétrie
d'axe (E), sur la
solution 6 on
obtient :

3	4	9
8	5	2
1	6	8

Solution 7

Remarque :

Le fait que, dans tous les carrés magiques 3×3 , l'entier 5 occupe nécessairement la case centrale n'est jamais prouvé dans ce problème.

Question 9 La recherche A.

Remarques :

La fiche de préparation ne donne pas d'informations sur le statut de cette recherche dans la séquence. La seule indication fournie est que cette situation est proposée « selon la réussite à la recherche 1 », ce qui n'est pas suffisant pour comprendre l'intention du maître quand il propose cette recherche.

Pour répondre à la question, il est judicieux de résoudre soi-même le problème.

Le passage du carré à la roue permet de focaliser sur la place centrale du 5 et sur la perception des alignements de trois cases de même somme, 15, incluant 5. On peut penser que cet exercice, à la place qu'il occupe dans la séquence, permettra de vérifier que les élèves comprennent la signification de l'expression « obtenir la même

somme sur chaque... », la compréhension de cette contrainte étant un préalable à la résolution du problème.

L'exercice peut également permettre de vérifier que les élèves placent correctement le nombre 5 et savent utiliser les paires de nombres de somme 10 qui ont été listées dans la phase collective.

Question 10

La solution de la recherche B.

Remarque :

La question posée conduit à proposer et rédiger une procédure de résolution du problème très éloignée de celle que pourrait élaborer un élève de cycle 3.

La somme des nombres entiers de 1 à 16 qui figurent chacun une seule fois dans le tableau est donnée par la formule rappelée à la question 4 : $16 \times \frac{17}{2} = 136$

La somme des nombres figurant sur chaque ligne, colonne, diagonale étant constante, elle vaut : $\frac{136}{4} = 34$

Le nombre manquant dans la colonne 1 est donc 12 car $34 - (1 + 8 + 13) = 12$

Le nombre manquant sur la diagonale où figure déjà trois nombres est 4 car $34 - (13 + 10 + 7) = 4$

On en déduit le nombre manquant sur la ligne 1 : $34 - (1 + 14 + 4) = 15$

Il reste 6 nombres à placer : 2 – 3 – 5 – 6 – 9 – 11

Notons a ; b ; c ; d ; e ; f les contenus des cases où il faudra les placer :

1	15	14	4
12	a	7	b
8	10	c	d
13	e	f	16

Les contraintes sur les lignes, donnent :

Pour la ligne 2,

$$a + b = 34 - (12 + 7)$$

$$\text{donc } a + b = 15$$

la seule manière de faire 15 avec les nombres de la liste est 9 + 6.

$$\text{donc } a = 6 \text{ et } b = 9 \text{ (*) ;}$$

$$\text{ou } a = 9 \text{ et } b = 6$$

Pour la ligne 3,

$$c + d = 34 - (8 + 10)$$

$$\text{donc } c + d = 16$$

la seule manière de faire 16 avec les nombres de la liste est 11 + 5.

$$\text{donc } c = 11 \text{ et } d = 5 \text{ (**) ;}$$

$$\text{ou } c = 5 \text{ et } d = 11$$

Pour la ligne 4,

$$e + f = 34 - (13 + 16)$$

$$\text{donc } e + f = 5$$

la seule manière de faire 5 avec les nombres de la liste est 2 + 3.

$$\text{donc } e = 2 \text{ et } f = 3 ;$$

$$\text{ou } e = 3 \text{ et } f = 2 \text{ (*)}$$

Les contraintes sur les colonnes vont conduire à écarter l'une des possibilités à chaque fois :

Pour la colonne 2,

$$a + e = 34 - (10 + 15)$$

$$\text{donc } a + e = 9$$

la seule manière de faire 9 avec deux nombres de la liste est $3 + 6$.

$$\text{donc } a = 6 \text{ et } e = 3$$

$$\text{ou } a = 3 \text{ et } e = 6$$

En prenant en compte la conclusion du travail sur les lignes (*), on déduit que nécessairement

$$a = 6 ; b = 9 \text{ et } e = 3 ; f = 2$$

Pour la colonne 3,

$$c + f = 34 - (14 + 7)$$

$$\text{donc } c + f = 13$$

on sait déjà que $f = 2$

$$\text{donc } c = 13 - 2 = 11$$

On déduit du travail sur la ligne (**) que $d = 5$.

On n'a pas besoin de travailler avec la colonne 4, on peut l'utiliser pour vérifier.

D'où la solution unique du problème posé :

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Question 11

La première étape de la résolution est nécessairement la détermination du nombre 34 qui est la somme des termes de chaque ligne, colonne et diagonale du carré magique.

Ce calcul, du fait qu'aucune rangée n'est complète, ne peut être exécuté directement et nécessite une véritable recherche comportant plusieurs étapes. De plus, les élèves peuvent ne pas avoir conscience du caractère déterminant de ce calcul.

La situation va probablement inciter les élèves à essayer des nombres dans les cases, puis à ajuster pour tenter de rendre égales les sommes. Etant donné le nombre de termes inconnus, cette stratégie a peu de chance d'aboutir.

Une fois le nombre 34 connu, la recherche peut rester très lourde du fait de la taille des nombres et de la quantité d'opérations à effectuer.

Des aides peuvent être données à plusieurs niveaux :

- Préciser qu'il faut d'abord chercher la valeur de la somme des termes de chaque rangée.
- Faciliter le calcul de cette somme en donnant une rangée complète dans le carré.
- Dire que la somme de chaque rangée vaut 34.
- Autoriser l'usage de la calculatrice pour contourner les difficultés inhérentes au calcul.

LYON

Note préliminaire :

Dans le corrigé qui suit, le texte en italique correspond à des compléments de formation. Ces remarques ne sont pas exigibles du candidat, elles visent à enrichir l'étude du sujet.

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS) MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE 1

La technique habituelle d'addition de deux nombres consiste à additionner les chiffres de même ordre d'unités de ces deux nombres, en commençant par les unités, puis les dizaines et les centaines, et en tenant compte des retenues éventuelles, 0 palliant éventuellement l'absence de chiffre à un certain rang.

Le chiffre des unités et le chiffre des dizaines de la somme sont égaux à 9.

La somme de deux nombres s'écrivant avec un chiffre est au plus égale à 18, et il est alors impossible d'obtenir 19, nombre au moins égal à 10 et dont le chiffre des unités est égal à 9 et non à 19, de ce fait il n'y a pas de retenue sur les chiffres des dizaines. Par le même raisonnement que sur les chiffres des unités on en conclut que la somme des chiffres des dizaines ne peut être égale qu'à 9 et non à 19, il n'y a donc pas de retenue sur les chiffres des centaines. Au total l'addition de Toto ne comporte aucune retenue.

Remarque :

Pour obtenir 9 comme chiffre des unités les seules possibilités sont $9+0$, $8+1$, $7+2$, $6+3$, $5+4$, $4+5$, $3+6$, $2+7$, $1+8$, $0+9$.

Voici quelques exemples de telles sommes : $496+3$, $432+67$, $195+304$.

EXERCICE 2

Question 1 a

La différence des pourcentages de votes exprimés pour chacun des deux camps est égale à 0,96% ($50,48 - 49,52 = 0,96$).

Les 1044 voix d'écart correspondent donc à 0,96% des votes exprimés.

Le nombre de suffrages exprimés est égal à 108 750 voix car $\frac{1044}{0,96} \times 100 = 108\,750$

Question 1 b

On ne peut connaître le nombre d'électeurs inscrits, n'ayant aucune information sur les nombres de votes blancs, de votes nuls et d'abstentions.

Question 2

En 2003 il y a eu un tiers de suffrages exprimés en plus qu'en 1992, il y a donc eu 600 votes exprimés (un tiers de 450 est égal à 150, et $450 + 150 = 600$).

62% de 450 voix représentent 279 voix.

47% de 600 voix représentent 282 voix.

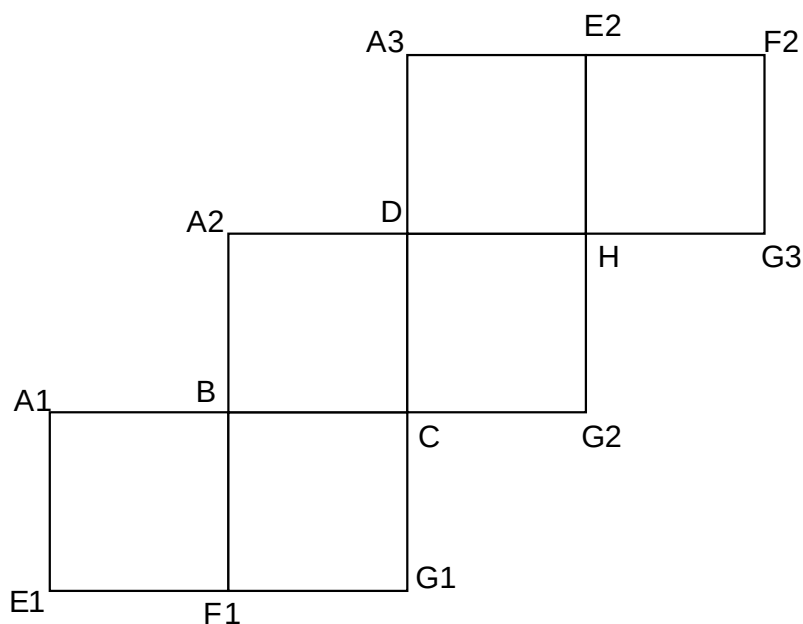
Année	Suffrages exprimés	Votes « non »	Pourcentages de « non »
1992	450	279	62%
2003	600	282	47%

Le nombre de « non » a donc augmenté, car il y a 3 voix de plus en 2003, cependant que le pourcentage de ces votes relatif au nombre de suffrages exprimés a, au contraire, diminué.

PROBLEME.

Question 1

Patron complété



Question 2 a

Le tracé demandé comprend la réunion de deux segments : la diagonale $[A_2C]$ et le segment $[CG]$ lui-même représenté par $[CG_1]$ et $[CG_2]$ sur le patron. Voir ci-dessous.

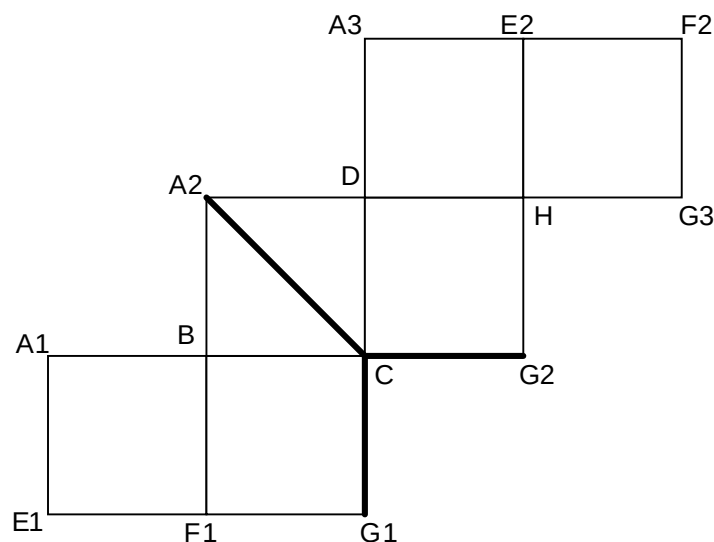
Question 2 b

La longueur de la ligne brisée est $l = AC + CG$.

La longueur d'une arête du cube est égale à 1, donc $CG = 1$.

Une diagonale d'une face carrée du cube a pour longueur $\sqrt{2}$. (C'est une application directe du théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ABC).

La longueur l de la ligne brisée ACG est donc égale à $\sqrt{2} + 1$.



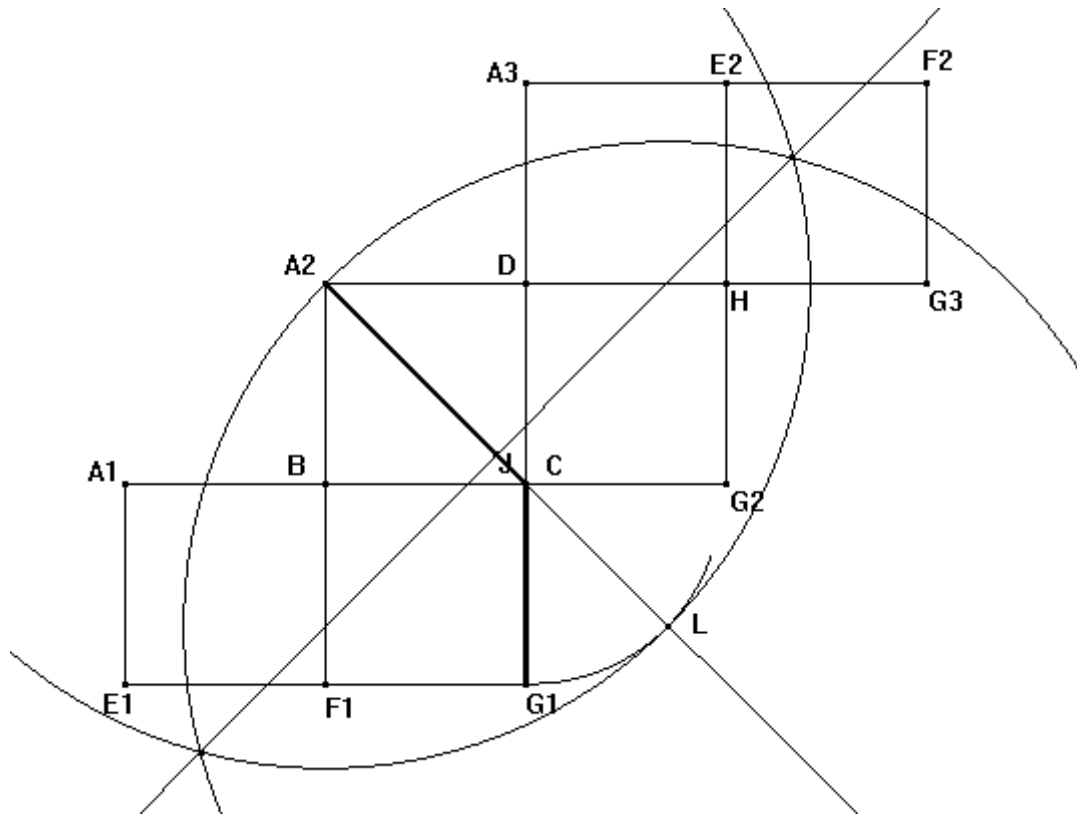
Question 2 c

J est le point de la ligne brisée ACG tel que $AJ = \frac{l}{2}$. Comme $AC > CG$, le point J est un point du segment $[AC]$.

Tracé sur le dessin du patron : Prolonger la demi-droite $[A_2C]$. Placer un point L sur $[A_2C]$ tel que $CL = CG_1$. Ainsi $A_2L = A_2C + CG_1$ (C étant situé entre A_2 et L).

$A_2L = l$.

Il reste à utiliser la construction de la médiatrice de $[A_2L]$ pour situer le milieu J du segment $[A_2L]$. J est le point cherché.



Autre méthode possible :

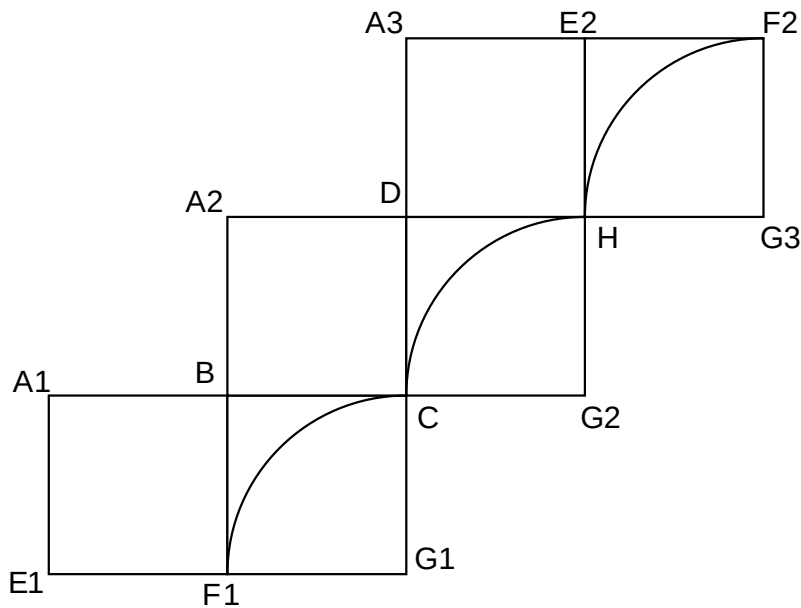
Construire le point C' tel que C' soit sur $[A_2C]$ et $A_2C' = CG_1$ alors J est le milieu de $[C'C]$, le milieu s'obtenant par construction de la médiatrice de $[C'C]$ comme précédemment.

Question 3

Si la « distance » de G à M , notée $d(G,M)$, est égale à la « distance » de G à C , cela permet de dire que $d(G,M) = 1$. Il s'agit donc de tracer le lieu des points M qui, situés sur la surface du cube, sont à une distance constante et égale à 1 du point G .

Sur chacune des trois faces ayant G pour sommet, l'ensemble des points est un quart de cercle de centre G et de rayon 1.

L'ensemble des points est la réunion des trois quarts de cercle tracés sur la figure ci-après.



Question 4 a
Le trajet le plus court de A à G

Premier cas :

Considérons le dessin du patron du cube : Cette représentation plane du cube permet de voir toutes les faces à plat, dans un même plan. Chacun connaît le principe selon lequel « le chemin le plus court d'un point à un autre est (sur) une ligne droite », aussi le chemin le plus court allant du sommet A au sommet G est-il représenté par le segment $[A_2G_2]$ pour respecter le choix imposé des faces ABCD et CDHG.

Pour le tracer sur cette représentation, il suffit de joindre avec une règle les sommets A_2 et G_2 .

Se reporter à la figure ci-dessous.

Second cas :

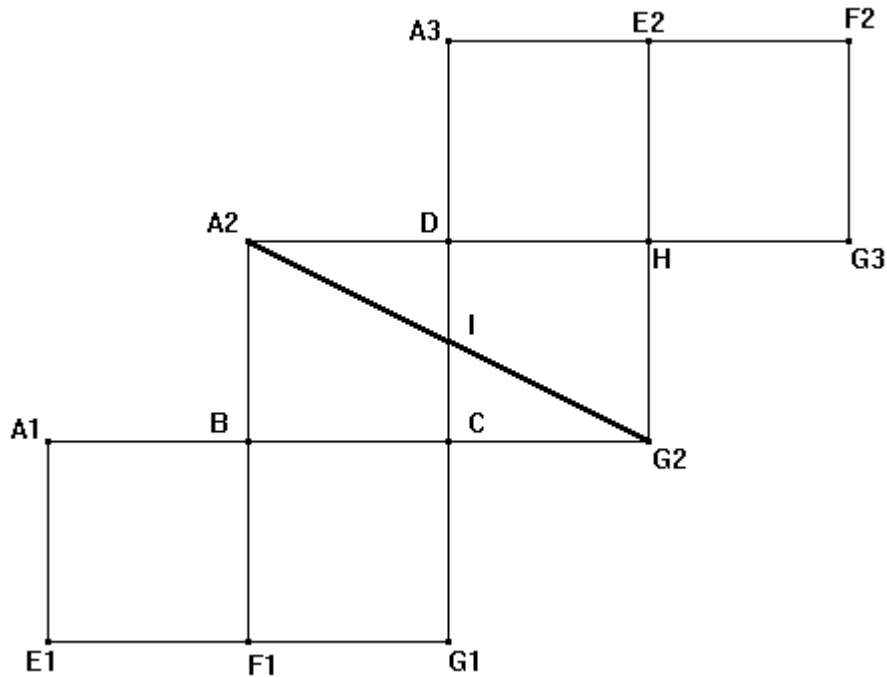
Sur le dessin en perspective cavalière, il faut d'abord situer et construire le point I de l'arête $[DC]$, situé sur le trajet. En effet, les segments $[AI]$ et $[IG]$ sont situés le premier sur une face « horizontale », le second sur une face « verticale » et leurs représentations sur le patron ne suivent pas la même règle.

On « voit » que le point I est le milieu de l'arête $[DC]$. Prouvons-le, en nous appuyant sur le dessin du patron : On considère le triangle rectangle A_2HG_2 . La droite (A_2H) est perpendiculaire à la fois à (DC) et à (HG_2) , les angles droits provenant du fait que les faces du cube sont des carrés. Appelons I le point d'intersection des droites (DC) et (A_2G_2) . Appliquons la réciproque du théorème des milieux dans le triangle A_2HG_2 : Le point D est le milieu de $[A_2H]$, la droite (DC) est parallèle à (HG_2) et coupe par conséquent le segment $[A_2G_2]$ en son milieu. I est donc le milieu du segment $[A_2G_2]$. Mais il faut encore prouver que I est aussi le milieu de $[DC]$.

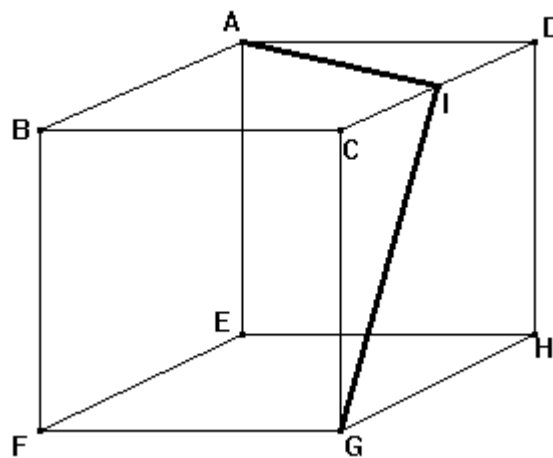
Pour cela on peut écrire l'égalité des rapports :

$$\frac{A_2D}{A_2H} = \frac{A_2I}{A_2G_2} = \frac{DI}{HG_2}$$

Ces rapports sont tous égaux à $\frac{1}{2}$, donc [DI] a pour mesure la moitié de celle d'un côté d'une face carrée du cube, soit $DI = \frac{DC}{2}$, ce qui permet d'affirmer que I est bien le milieu de [DC].



Pour tracer à la règle le plus court trajet sur la représentation en perspective cavalière, joindre les points A et I (I milieu de l'arête [DC]), puis joindre I et G.



Question 4 b

Calcul de la longueur de ce trajet

On considère de nouveau le triangle rectangle A_2HG_2 .

Le segment $[A_2H]$ a pour mesure 2, le segment $[HG_2]$ a pour mesure 1. Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle A_2HG_2 rectangle en H :

$$A_2G_2^2 = A_2H^2 + HG_2^2. \quad A_2G_2^2 = 5, \text{ on en déduit } A_2G_2 = \sqrt{5}$$

La longueur du trajet le plus court, sur les faces du cube, a pour mesure $\sqrt{5}$. Cette mesure est effectivement inférieure à l égale à $\sqrt{2} + 1$.

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES

Le graphique est un histogramme. Pour chaque jour, les ventes sont représentées par une bande rectangulaire verticale en couleur dont la longueur est proportionnelle au nombre de livres vendus ce jour. Les cinq bandes correspondant aux cinq jours s'inscrivent chacune dans un cadre rectangulaire identique, blanc, dont la longueur est égale à 48 mm. On peut observer que cette longueur (48 mm) correspondrait à une vente de 120 livres (en utilisant la représentation concernant le mardi). La réponse attendue est résumée dans le tableau ci-dessous, lequel n'était pas demandé dans cette épreuve.

On y désigne par n le nombre de livres vendus, par l la longueur de la bande correspondante exprimée en millimètres, et par r le rapport entre la longueur de la bande en couleur et celle du rectangle blanc servant de cadre. Les réponses attendues sont indiquées en caractères gras.

jour	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi
n	60	45	90	105	75
l (en mm)	24	18	36	42	30
r	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{8}$

Question 1

Principale notion mathématique abordée

Pour compléter le graphique d'un jour, en cohérence avec les deux premiers qui fournissent un modèle, il faut déterminer la longueur de la bande rectangulaire en couleur, cette longueur devant être proportionnelle au nombre de livres vendus.

La « notion mathématique principale » abordée est donc **la proportionnalité**.

Question 2

Analyse des productions

Production de Yann :

- Procédures mises en œuvre :

Sa procédure repose sur les propriétés de conservation d'écarts, ou de rapports entre écarts, entre les termes de deux suites proportionnelles : la suite constituée par les nombres de livres vendus (n) et la suite des longueurs de la bande en couleur correspondante (l).

Pour compléter les trois graphiques Yann utilise la même procédure : Il calcule l'écart entre le nombre de livres vendus un jour avec celui du mardi. Il compare cet

écart avec celui existant entre les ventes des mardi et mercredi. Il établit le rapport entre ces écarts. Il reporte alors autant de fois sur le dessin l'écart de longueur mesuré entre les bandes du mardi et du mercredi, en se référant toujours au rectangle du mardi. « Je prends **deux fois, trois fois ou une fois...** l'écart ».

Sa méthode est correcte, la trace écrite fort explicite.

- Réponses aux questions posées :

Les mesures des bandes rectangulaires sont étonnamment correctes, car le report de l'écart d'une longueur de 6mm nécessite de la précision et du soin. On ne sait quelle procédure géométrique et quels instruments ont été utilisés.

Production d'Alexis :

- Procédures mises en œuvre :

Sa procédure repose sur la comparaison de nombres entiers, et la représentation approximative de longueurs de façon à respecter la relation d'ordre observée.

Pour compléter les trois graphiques Alexis utilise la même procédure : Par exemple, pour le dessin du jeudi : « 90 est plus grand que 60, donc le rectangle doit être plus haut. » Alexis compare le nombre de livres vendus un jour avec le nombre de livres vendus la veille, le jour précédent. Il exprime la différence de ces deux nombres en termes de dizaines et d'unités, et trace à la règle un trait horizontal, plus haut ou plus bas selon la comparaison, apparemment sans effectuer de mesure précise, sans quantifier la longueur à ajouter ou retirer (car les longueurs correspondant à 3 dizaines ne sont pas égales entre elles et celle correspondant à 1,5 dizaines n'est pas égale à la moitié de l'une d'elle). La proportionnalité n'est donc pas respectée.

- Réponses aux questions posées :

Les graphiques respectent l'ordre entre les longueurs. Cependant, le rectangle du jeudi est trop petit, celui du vendredi est trop grand, seul celui du samedi est correct.

Remarque :

On peut se demander si cela est dû au hasard, ou bien s'il s'agit d'une facétie des auteurs de ce sujet, destinée à évaluer la rigueur de l'observation des candidats.

Production d'Héloïse :

- Procédures mises en œuvre :

La procédure d'Héloïse est originale. Elle s'appuie sur le sens donné aux parties non colorées du cadre rectangulaire. Ayant affirmé que le nombre total de livres à vendre était égal à 120, elle en déduit que la seconde partie du cadre rectangulaire, non colorée, correspond à des livres qui resteraient à vendre, dont le nombre est le complément à 120 du nombre de livres vendus. Elle va alors calculer ce que représentent les différentes bandes blanches ainsi que leur moitié, selon le besoin, afin de reporter leur longueur, en haut du cadre. Le reste du rectangle sera alors colorié. Elle emploie une procédure analogue pour les trois jours, en choisissant les bandes appropriées :

Pour jeudi, la longueur de la bande à laisser en blanc est la moitié de celle du mardi. Le complément est à colorier.

Pour vendredi, la longueur de la bande à laisser en blanc est la moitié de celle du jeudi, et le complément est à colorier.

Pour samedi, la longueur de la bande à laisser en blanc est la même que celle qui représente les ventes du mercredi.

Elle associe aux rectangles des longueurs proportionnelles aux nombres qu'ils

représentent, indépendamment de leur couleur. Cette démarche est sensée et s'avère également « économique » pour le tracé du graphique de samedi.

- Réponses aux questions posées :

La procédure, correcte, permet à Héloïse de proposer des dessins qui le sont aussi.

Remarque :

Héloïse affirme d'entrée : « **On sait que** le nombre de livres à vendre est égal à 120. » On ne sait pas si elle a déduit cette affirmation initiale d'une fine observation du graphique des ventes du mardi, ou bien si cela faisait partie d'un énoncé plus complet, ou bien si cela a été établi par le maître lors de la présentation du problème.

Production de Benoît :

- Procédures mises en œuvre :

Benoît ne fait pas référence aux nombres de livres, mais associe après mesurage une mesure de longueur égale à 1,2 cm au nombre 30 (« la moitié du mardi »). Il semble qu'ensuite il ait privilégié le calcul, pour déterminer la longueur de bande associée au nombre 15 et égale à 0,6 cm. Se référant ensuite, pour les trois exercices, à la longueur du rectangle du mardi, les mesures en centimètres des longueurs des rectangles coloriés auraient dû être respectivement :

2,4 + 1,2 pour le jeudi, 3,6 + 1,2 pour le vendredi et 2,4 + 0,6 pour le samedi.

Ce raisonnement est donc pertinent, mais Benoît n'indique pas les mesures qu'il a obtenues. On constate que les mesures des rectangles du jeudi et du vendredi sont nettement erronées : Il manque 4 à 5 millimètres à chacun d'eux.

- Réponses aux questions posées :

Les tracés des rectangles du jeudi et du vendredi sont erronés. S'agit-il d'une erreur de mesurage, d'un emploi incorrect de sa règle graduée, ou d'une erreur de calcul antérieure ?

Question 3

Autres procédures possibles

Les suites (n) de nombres de livres vendus et (l) de longueurs (exprimées en mm) pour les rectangles qui les représentent sont proportionnelles. Soit l_j la longueur du rectangle pour le jeudi et l_v celle du vendredi.

jour	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi
n	60	45	90	105	75
l (en mm)	24	18	l_j	l_v	l_s

Trois procédures différentes de celles observées précédemment peuvent être les suivantes :

- Ventes du jeudi : utilisons la conservation du rapport entre termes de chacune des suites : 90 est le double de 45, donc l_j vaut le double du nombre de ventes du mercredi, soit 18×2 .
 $l_j = 36$.

- Ventes du vendredi : utilisons la propriété additive de linéarité pour déterminer l'image de 105.

$105 = 60 + 45$ (le nombre de ventes du vendredi est la somme de celles du mardi et du mercredi). Par conséquent la longueur l_v du rectangle doit être égale à la somme des longueurs des rectangles correspondants à ces deux jours : $24 + 18$

$$l_v = 42$$

- Ventes du samedi : soit f la fonction linéaire associant la longueur (exprimée en mm) du rectangle au nombre n de livres correspondant : $f(n) = l$

Sachant que $f(60) = 24$, on en déduit successivement $f(1) = 0,4$ et $f(n) = 0,4.n$ (0,4 est le coefficient de proportionnalité, ce nombre est dépendant du choix effectué pour l'unité de mesure de longueur)

Alors, pour le samedi, où 75 livres ont été vendus : $f(75) = 75 \times 0,4 = 30$

$$l_s = 30.$$

SECOND VOLET (8 POINTS)

I - ANALYSE DE LA SÉQUENCE EXTRAITE DE *MILLE MATHS CP*

Question 1a

Compétences que les élèves doivent maîtriser

Remarque :

Les élèves disposent des cartes à points. En principe les cartes à dix points présentent la face où il est écrit « dix », mais il est peut-être possible de les retourner...

Les élèves doivent maîtriser la comptine, la suite des mots nombres.

Pour utiliser la procédure souhaitée, il leur faut comprendre qu'une carte indiquant « dix » représente une collection de dix points (qu'en principe ils ne voient pas) et que cela dispense de compter effectivement les points un à un, tout en permettant d'obtenir le même nombre au final.

Il leur faut savoir compter à partir de 10, et même compter de 10 en 10 (savoir au moins que $10 + 10 = 20$). Ils doivent pouvoir surcompter à partir de 20 pour ajouter le nombre de points de la dernière carte. (Le document suggère que cet exercice soit répété dix fois pour aller de 20 à 30 !)

Il leur faut savoir écrire les nombres sous forme d'écriture additive et passer d'une écriture telle que $10 + 10 + 3$ à l'écriture usuelle 23, savoir lire cette écriture en chiffres...

La seconde partie de cette activité consiste à inverser la démarche, pour représenter avec le nombre minimal de cartes en privilégiant les cartes « dix » un nombre écrit en chiffres au tableau.

Question 1b

Le fait de compter en premier les dizaines augmente considérablement la rapidité de comptage par rapport au comptage un à un. Une contrainte de limite de durée pourrait, à condition que la consigne en fasse valoir l'intérêt, amener les élèves à choisir une procédure plus rapide. Une autre contrainte pourrait consister à modifier les cartes « dix » de sorte que leur verso ne montre plus les dix points. Dès lors, ne pouvant plus accéder à la vue de la collection de points, les élèves seraient contraints à envisager une procédure de comptage différente de celle qui leur semble la plus naturelle.

Question 1c

Pertinence du deuxième exercice (activité « Décomposer en utilisant 10 »

Non, cette « situation » ne permet pas vraiment de faire prendre conscience de l'intérêt qu'il y a à utiliser 10 puisque l'élève n'a pas l'occasion de choisir une autre stratégie, de comparer une autre procédure avec celle qui lui est imposée par la consigne. Le nombre de cartes « dix » semble donné a priori par la consigne du professeur, il ne reste à l'élève qu'à chercher la carte correspondant aux unités, et s'il avait quelque hésitation, il lui suffit de se reporter à son matériel « bande numérique » où la réponse attendue est déjà affichée.

Question 2

Difficultés dans l'activité « Dénombrer des collections »

Les difficultés pour trouver le nombre d'objets d'une collection peuvent être liées :

- aux objets plus ou moins commodes à manipuler, à déplacer, objets qui glissent, roulent, et rendent difficile le contrôle du comptage, qui peuvent se prêter difficilement à être regroupés en paquets, indépendamment de leurs propriétés ou de leur aspect, surtout dès lors que leur nombre devient important.
- à une connaissance insuffisamment stable de la comptine, suite des mots nombres (par exemple, certains enfants ont des difficultés lors des passages à la dizaine supérieure).
- à l'énumération de la collection (chaque objet doit être pris en considération, une fois et une seule, sans redoublement, sans omission, et cela doit être fait en parfaite synchronisation avec la comptine). Une organisation de la manipulation des objets est nécessaire.
- à la mémorisation des différents nombres dans le cas d'une décomposition en paquets non réguliers.

Question 3a

Adéquation entre l'objectif annoncé et les exercices (annexe 6)

Les exercices ne correspondent pas à l'objectif annoncé puisque les groupements par dizaines sont déjà effectués : l'élève n'a pas lui-même à grouper des objets par dix.

Dans le premier exercice l'énoncé indique que les boîtes contiennent chacune dix chocolats (non visibles en dehors de la boîte modèle).

Dans le second exercice les modèles de calcul proposés, qu'il s'agit de compléter et imiter, reposent sur une décomposition explicite en dizaines (Chaque nombre 10 correspond à un billet de 10 euros).

L'énoncé du troisième exercice ne laisse pas davantage l'initiative aux élèves de grouper par 10 les éléments d'une collection : le nombre de bonbons contenus dans les poches est écrit sur le paquet : c'est 10.

Question 3b

Procédures utilisables pour résoudre l'exercice A (annexe 6)

- Les élèves pourraient dessiner une collection plus ou moins schématisée des 19 ou 30 chocolats (en effectuant ainsi la simulation de vider les boîtes de 10) et dénombrer cette collection témoin. Connaissances sollicitées : savoir dessiner tous les éléments de la collection, même ceux qui sont « cachés » dans la dizaine ; dénombrer une collection dessinée.
- Les élèves pourraient surcompter à partir de dix (cette procédure est davantage favorisée par le premier des deux exercices : « dix, onze,... dix-neuf. », plutôt que par le second dans lequel ils pourraient plus facilement compter de dix en dix). Connaissances sollicitées : savoir surcompter en sachant qu'une dizaine vaut dix unités.
- Les élèves pourraient effectuer un calcul réfléchi : 10 et 9, c'est dix-neuf, puis, 10 et 10 et 10, cela fait trente (en passant ou non par 20). Connaissances sollicitées : calcul mental avec 10.

Les deux premières procédures ont toutes les chances d'aboutir à une réponse correcte, la troisième nécessite davantage de connaissances, une maîtrise expérimentée du domaine numérique concerné ($n < 50$), ce qui peut se rencontrer.

Question 3c

Remarque :

Il nous paraît légitime de se demander ce que peut recouvrir l'expression « réussir partiellement l'exercice » : S'agit-il seulement de trouver l'écriture en chiffres ? S'agit-il d'avoir complété les espaces réservés conformément au modèle ?

Proposition 1 :

La disposition spatiale des billets et monnaies représentés peut inciter à effectuer le calcul autrement. En opérant sur des alignements verticaux, les calculs des trois exercices pourraient se traduire par les additions : $15 + 12$; $12 + 10$, puis $15 + 15$ ce qui amène à compléter autrement les cases de la somme sans altérer le résultat final.

Proposition 2 :

Les élèves peuvent additionner mentalement, étape par étape, la valeur de chaque billet et pièce représentés ce qui les conduit à donner le résultat final (dont la valeur dépend de leur habileté calculatoire) sans pour autant compléter les cases vides de la somme.

II - ANALYSE DE LA SÉQUENCE EXTRAITE DE CAP MATHS CP

Question 4

La séance 1 (annexe 7)

Pour réussir leur commande les enfants peuvent compter un à un les « boutons »

(petits carrés blancs sur le dessin) en les marquant d'une croix afin de rendre plus fiable leur énumération et leur dénombrement (leur disposition spatiale ne privilégie aucun regroupement évident à l'aide de paquets particuliers).

Les élèves peuvent aussi effectuer librement des groupements de « boutons » par 10, ou par 4 ou par 7 ou par 6... puis effectuer une commande en disant par exemple : « Il me faut un paquet de dix boutons, et 13 boutons » ou « 2 paquets de dix et 3 boutons » ou bien « 7 boutons et 6 boutons et encore 6 et encore 4 ». Notons bien qu'une commande demandant des paquets contenant un nombre de boutons différent de 10 ne peut aboutir vu la règle imposée aux marchands.

Remarque :

Le dessin du ziglotron ne favorise pas la procédure consistant à entourer les paquets de dix carrés au fur et à mesure de leur pointage.

Question 5a

Intérêt des trois premières contraintes (séance 2 de l'annexe 7)

L'apprentissage visé est de « mettre en évidence la signification de chaque chiffre dans l'écriture chiffrée d'un nombre ».

- La première contrainte oblige à effectuer une commande écrite, et non plus orale comme dans la phase précédente, faisant référence à des paquets de 10 et à des unités isolées. Le bon de commande ne permet de commander que des paquets de 10 boutons, ou un nombre au plus égal à 9 de boutons isolés. Il doit indiquer également l'écriture usuelle du nombre total. Ceci devrait permettre de faire découvrir la coïncidence entre le chiffre des dizaines et le nombre de paquets de 10, entre le chiffre des unités et le nombre de boutons isolés ; en juxtaposant l'écriture du nombre total de boutons (exemple : 23), avec le nombre de paquets de dix boutons (ici 2) et le nombre de boutons seuls (ici 3), on favorise la prise de conscience chez l'élève des liens existant entre ces trois écritures.
- La seconde contrainte interdit de formuler une commande telle que $15+13$ ou $20 + 2 + 12$, ou encore 37 (avec des nombres supérieurs à 10), les seuls groupements de boutons autorisés étant des paquets de 10 ou un nombre de boutons isolés inférieur ou égal à 9. Cela contribue à renforcer la prise de conscience évoquée ci-dessus.
- La troisième contrainte est l'obligation pour les marchands de lire le bon de commande. Une lecture à haute voix permet aux élèves qui l'ont rédigé d'entendre ce qu'ils ont écrit et peut favoriser la découverte de certaines relations ; de plus la simple exécution du bon de commande après lecture amène les marchands à se contenter de donner les paquets de 10 et les boutons isolés demandés sans nécessairement s'assurer que cela est en cohérence avec l'écriture usuelle du nombre. Cela permettra éventuellement ensuite de rendre nécessaire un débat entre les élèves.

Finalement l'objet de ces contraintes est de rendre nécessaire pour tous les élèves

la prise en compte du nombre de paquets de 10 de la collection et l'association chiffre des unités et nombre de boutons isolés.

Question 5b

Intérêt de la quatrième contrainte (séance 2 de l'annexe 7)

Retarder une validation effective, matérielle, va permettre au maître d'effectuer une mise en commun où il s'agira d'analyser et de comparer les différents bons de commande. Sont-ils lisibles ? Respectent-ils les différentes contraintes ? Permettent-ils a priori d'obtenir le nombre convenable de boutons ? Est-il possible d'anticiper sur la validité d'une commande ? Certains élèves prendront-ils alors conscience des similitudes perceptibles entre le nombre de paquets de 10, le nombre d'unités, et l'écriture du nombre lui-même ?

Question 6a

L'enseignant est seul en possession du ziglotron... (séance 3 de l'annexe 7)

Les élèves ne disposant plus du matériel (le ziglotron), ils ne peuvent plus dénombrer directement les boutons sur le dessin et ne peuvent plus entourer sur la collection les paquets de dix dont elle se compose ; ils sont incités à lire directement les nombres de paquets de 10 et d'unités dans l'écriture des nombres eux-mêmes.

Question 6b

Trois procédures utilisables (séance 3 de l'annexe 7)

Le nombre 42 est donné. Il s'agit de compléter le bon de commande en respectant les contraintes.

Trois procédures peuvent être choisies parmi les suivantes :

- Dessiner 42 boutons, entourer les paquets de 10 et compléter le bon de commande par : 4 paquets de 10 et deux boutons isolés.
- Traduire l'écriture 42 par 10 10 10 10 2 ou par $10+10+10+10+2$ en contrôlant chaque étape de la décomposition puis exploiter cette écriture pour compléter le bon.
- Compter oralement de dix en dix jusqu'à 40 en comptant les « dix » sur leurs doigts, remplir alors la partie du bon de commande concernant les paquets de dix, puis surcompter jusqu'à 42 et compléter le bon de commande.
- Utiliser la procédure attendue en affirmant : « Dans 42, le 4 c'est 4 paquets de 10, et le 2 c'est les boutons tout seuls. »

Question 6c

Lien entre l'apprentissage visé et la réussite de l'élève

Bien que cette dernière phase soit individuelle, la réussite d'un élève doit être considérée avec prudence : Il est possible que l'élève ait perçu ce que le maître attendait de lui (effet de contrat didactique), et que sa réponse soit guidée davantage

par cette attente que par une réelle compréhension du mécanisme de la numération. Il est possible aussi que sa compréhension du problème posé soit fortement liée au contexte de la situation du ziglotron, et qu'il ne fasse pas spontanément une généralisation de cette découverte. Une phase d'institutionnalisation des connaissances, menée par le professeur, est nécessaire, afin d'explicitier et d'identifier clairement ce qui vient d'être « découvert », de transformer cette connaissance en un savoir commun à toute la classe, savoir qui devra être retenu et réutilisé ultérieurement, tâche que l'élève ne serait pas capable de faire seul.

III - SYNTHÈSE.

Question 7a

Analyse comparative par rapport à l'apprentissage visé

L'apprentissage visé est pratiquement le même : il s'agit de comprendre la signification des chiffres dans l'écriture d'un nombre.

Question 7b

Analyse comparative par rapport aux modalités utilisées pour provoquer l'apprentissage

Les modalités ne s'appuient pas sur la même conception d'un apprentissage.

Dans la séquence extraite de *Mille maths* les auteurs montrent d'abord les connaissances numériques que les enfants devront apprendre (par le biais de la bande numérique et des consignes à respecter, par la répétition de la même tâche proposée au paragraphe 2 de l'annexe 1 *pour tous les nombres de 20 à 30*, ce qui peut se traduire par l'expression « enfoncer le clou »). Les auteurs leur demandent ensuite d'appliquer ces connaissances dans les exercices de la page « utiliser la dizaine ». Cette séquence correspond de fait à une démarche d'apprentissage par ostension, ou de transmission des savoirs.

Dans la séquence extraite de *Cap maths* les auteurs ont privilégié une démarche d'apprentissage par la résolution de problèmes, dans laquelle les élèves sont davantage acteurs et responsabilisés : ils doivent découvrir eux-mêmes la relation entre l'écriture chiffrée des nombres et la signification de chacun des chiffres de cette écriture. Le savoir visé est la solution d'une situation problème qu'ils ont à résoudre.

MARTINIQUE

Note préliminaire :

Dans le corrigé qui suit, le texte en italique correspond à des compléments de formation. Ces remarques ne sont pas exigibles du candidat, elles visent à enrichir l'étude du sujet.

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS) MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE 1

Les nombres.

Question 1

Les égalités vraies

$$\frac{1}{5} = 0,2 \qquad \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$$

Question 2

Décimaux rangés dans l'ordre croissant

1,07 ; 1,109 ; 1,7 ; 1,81

Question 3

Intercaler deux décimaux...

1,102 < 1,1025 < 1,12 et 1,102 < 1,11 < 1,12

Question 4

Durées à exprimer en heures, minutes et secondes

1,5 ou $1 + \frac{5}{10}$ ou $1 + \frac{1}{2}$ soit **1 heure 30 minutes** ($\frac{1}{2}$ heure vaut 30 minutes)

2,25 ou $2 + \frac{25}{100}$ ou $2 + \frac{1}{4}$ soit **2 heures 15 minutes** ($\frac{1}{4}$ heure vaut 15 minutes)

0,3 ou $\frac{3}{10}$ ou $3 \times \frac{1}{10}$ soit **18 minutes** ($\frac{1}{10}$ heure vaut 6 minutes)

3,375 ou $3 + (3 \times \frac{1}{10}) + (7 \times \frac{1}{100}) + \frac{5}{1000}$

$3 \times \frac{1}{10}$ heure valent 18 minutes

1 heure vaut 60 minutes ou 60×60 secondes, $\frac{1}{100}$ heure vaut donc 36 secondes et

$7 \times \frac{1}{100}$ heure valent donc $7 \times 36 = 252$ secondes soit $(60 \times 4) + 12$ soit 4 min 12 s.

$\frac{5}{1000} = \frac{1}{200} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{100}$ et $\frac{5}{1000}$ heure valent donc 18 secondes

3,375 heures, c'est donc : $3 + 18 \text{ min} + (4 \text{ min} + 12\text{s}) + 18 \text{ s}$
soit 3 heures 22 minutes 30 secondes

Question 5

Fractions irréductibles

$$A = \frac{5}{8} + 0,25$$

$$A = \frac{5}{8} + \frac{25}{100} = \frac{5}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8} + \frac{2}{8}$$

$$A = \frac{7}{8}$$

$$B = \frac{2}{10} + \frac{7}{4} + 0,15$$

$$B = \frac{2}{10} + \frac{7}{4} + \frac{15}{100} = \frac{20}{100} + \frac{175}{100} + \frac{15}{100} = \frac{20+175+15}{100} = \frac{210}{100}$$

$$B = \frac{21}{10}$$

PROBLÈME 1

Question 1

La famille de Mme Lelong :

2 adultes, 3 enfants dont 1 de plus de 15 ans et un de moins de 5 ans pour 10 nuits,
soit 1 semaine et 3 nuits d'une seconde semaine.

Camping Beausoleil	Installation : 50 € Une nuitée : 3 de plus de 15 ans $3 \times 15 = 45$ 2 de moins de 15 ans $2 \times 10 = 20$ soit 65 € par nuit 10 nuitées : $65 \times 10 = 650$ soit <u>un total de 700 €</u>
Camping Bellevue	Première semaine : 7 jours 4 personnes payantes $4 \times 20 \times 7 = 560$ Seconde semaine : 3 nuits 4 personnes payantes $4 \times 15 \times 3 = 180$ soit <u>un total de 740 €</u>

Ils doivent donc choisir le camping Beausoleil.

Question 2

La famille de Mme Dubois : 2 adultes, 2 enfants pour 2 semaines soit 14 jours.

Composition famille	Camping Beausoleil	Camping Bellevue	Choix du camping
2 adultes 2 enfants moins de 5 ans	<u>Installation</u> : 50 € <u>Par nuitée</u> : Plus de 15 ans $2 \times 15 = 30$ Moins de 15 ans $2 \times 10 = 20$ Soit 50 € par nuit <u>Pour 14 nuitées</u> : $50 \times 14 = 700$ <u>Soit un total de 750 €</u>	Première semaine : 7 jours 2 personnes payantes $2 \times 20 \times 7 = 280$ Seconde semaine : 7 jours 2 personnes payantes $2 \times 15 \times 7 = 210$ <u>Soit un total de 490 €</u>	Bellevue
2 adultes 1 enfant moins de 5 ans 1 enfant plus de 5 ans et moins de 15 ans	<u>Idem 750 €</u>	Première semaine : 7 jours 3 personnes payantes $3 \times 20 \times 7 = 420$ Seconde semaine : 7 jours 3 personnes payantes $3 \times 15 \times 7 = 315$ <u>Soit un total de 735 €</u>	Bellevue

2 adultes 1 enfant moins de 5 ans 1 enfant plus de 15 ans	<u>Installation : 50 €</u> <u>Par nuitée :</u> Plus de 15 ans $3 \times 15 = 45$ Moins de 15 ans $1 \times 10 = 10$ Soit 55 € par nuit <u>Pour 14 nuitées :</u> $55 \times 14 = 770$ <u>Soit un total de 820 €</u>	<u>Idem : 735 €</u>	Bellevue
2 adultes 2 enfants plus de 5 ans et de moins de 15 ans	<u>Installation : 50 €</u> <u>Par nuitée :</u> Plus de 15 ans $2 \times 15 = 30$ Moins de 15 ans $2 \times 10 = 20$ Soit 50 € par nuit <u>Pour 14 nuitées :</u> $50 \times 14 = 700$ <u>Soit un total de 750 €</u>	Première semaine : 7 jours 4 personnes payantes $4 \times 20 \times 7 = 560$ Seconde semaine : 7 jours 4 personnes payantes $4 \times 15 \times 7 = 420$ <u>Soit un total de 980 €</u>	Beausoleil
2 adultes 1 enfant de plus de 15 ans 1 enfant entre 5 et 15 ans	<u>Installation : 50 €</u> <u>Par nuitée :</u> Plus de 15 ans $3 \times 15 = 45$ Moins de 15 ans $1 \times 10 = 10$ Soit 55 € par nuit <u>Pour 14 nuitées :</u> $55 \times 14 = 770$ <u>Soit un total de 820 €</u>	<u>Idem 980 €</u>	Beausoleil
2 adultes 2 enfants de plus de 15 ans	<u>Installation : 50 €</u> <u>Par nuitée :</u> Plus de 15 ans $4 \times 15 = 60$ Soit 60 € par nuit <u>Pour 14 nuitées :</u> $60 \times 14 = 840$ <u>Soit un total de 890 €</u>	<u>Idem 980 €</u>	Beausoleil

PROBLEME 2

Question 1

Calcul du prix réel

Soient : P_n le nouveau prix, P_i le prix initial et R la remise

$$P_n = P_i - R \quad \text{avec } R = \frac{20}{100} \times P_i \quad \text{d'où } P_n = \left(1 - \frac{2}{10}\right) \times P_i$$

Un remise de 20% correspond donc à un coefficient multiplicateur de 0,8 à appliquer au prix initial.

	Prix initial	Prix après remise de 20%
Jean	60 000 €	$60\,000 \times 0,8 = 48\,000$ €
Pascal	43 200 €	$43\,200 \times 0,8 = 34\,560$ €
Sandrine	46 800 €	$46\,800 \times 0,8 = 37\,440$ €

Question 2

Coût du gardiennage

Le coût initial en euro du bateau est $60\,000 + 43\,200 + 46\,800 = 150\,000$

	Prix initial	Part de chacun	Contribution au gardiennage
Jean	60 000 €	$\frac{60\,000}{150\,000} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$	$5000 \times \frac{2}{5} = 2000$ €
Pascal	43 200 €	$\frac{43\,200}{150\,000} = \frac{432}{1500} = \frac{144}{500}$	$5000 \times \frac{144}{500} = 1440$ €
Sandrine	46 800 €	$\frac{46\,800}{150\,000} = \frac{468}{1500} = \frac{156}{500}$	$5000 \times \frac{156}{500} = 1560$ €
Somme totale	150 000 €	1	5000 €

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS) ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES
--

Question 1

Compétences nécessaires à la réussite

S'agissant de calcul réfléchi, plusieurs procédures vont être envisageables.
Il s'agit pour l'élève de savoir effectuer mentalement, sans l'aide de l'écrit, des calculs donnés oralement et plus spécifiquement de :

60 - 19	P₁ : savoir effectuer mentalement un calcul soustractif en utilisant de façon implicite les propriétés des nombres et des opérations. Par exemple (60 - 20) + 1 ou 19 + 1 + 40 pour une décomposition de 60. P₂ : savoir calculer une différence de deux entiers mettant en jeu une retenue.
3 × 0,5	P₁ : savoir effectuer mentalement un calcul de type « fois 0,5 » en utilisant de façon implicite les propriétés des nombres et des opérations. P₂ : savoir calculer le produit d'un décimal par un entier en se basant éventuellement sur une addition itérée et sur le fait que 2 fois 0,5 est 1.
1,7 + 2,3	P : savoir calculer une somme de deux décimaux de même format (au dixième) mettant en jeu une retenue.
2,5 × 4	P : savoir calculer le produit d'un décimal par un entier en se basant éventuellement sur une addition itérée et sur le fait que 2 fois 2,5 est 5

On peut rajouter pour les quatre items :

Être capable de donner du sens à l'écriture à virgule d'un nombre décimal.

Question 2
Analyse des productions et aides¹

Analyse et aides	Alex	Raoul	Claire
60 - 19	Il trouve 59 : résultat erroné. L'élève effectue mentalement une soustraction entre les chiffres de même rang (nombre plus petit soustrait au nombre le plus grand).	Il trouve 51 : résultat erroné. L'élève effectue mentalement une soustraction en oubliant de prendre en compte la retenue.	Elle trouve 41 : résultat juste
3 × 0,5	Les trois résultats sont erronés, car l'élève effectue mentalement les opérations indépendamment sur les parties entières et les parties décimales : 3 × 0 puis 3 × 5 pour 0,15 1 + 2 puis 7 + 3 pour 3,10 2 × 4 puis 5 × 4 pour 8,20.	Pas de réponse	Elle trouve 1,5 : résultat juste
1,7 + 2,3		Il trouve 3 : résultat erroné. L'élève effectue mentalement une addition en oubliant de prendre en compte la retenue.	Elle trouve 3,10 : résultat erroné, ce qui est étonnant vu la réussite aux calculs 3 × 0,5 et 2,5 × 4.
2,5 × 4		Pas de réponse	Elle trouve 10 : résultat juste
Aide 1 sans support écrit	• Pour enlever 19 il suffit d'enlever 20 et d'ajouter 1 • 2 fois 0,5 c'est 1 on demande 3 fois 0,5 • Ajouter d'abord 0,3 à 1,7 on obtient 2 ; poursuivre. • 2 fois 2,5 c'est 5 on demande 4 fois 2,5.		Ajouter d'abord 0,3 à 1,7 on obtient 2 ; poursuivre.

¹ De quels types d'aides s'agit-il ? Sont-elles destinées à lui permettre de réussir ce calcul mental sur l'instant ou à redonner du sens aux techniques opératoires et à l'écriture des entiers et (ou) des décimaux ?

Analyse et aides	Alex	Raoul	Claire
Aide 2 avec support écrit	Poser la soustraction. Remplacer 0,5 par l'écriture fractionnaire 5 dixièmes et suggérer que l'on a donc 3 fois 5 dixièmes ($\frac{5}{10} + \frac{5}{10} + \frac{5}{10} = \frac{15}{10}$) Poser l'addition en colonnes : virgule sous virgule. Remplacer 2,5 par l'écriture fractionnaire 25 dixièmes et suggérer que l'on a donc 4 fois 25 dixièmes ($4 \times \frac{25}{10} = \frac{100}{10}$ et $\frac{100}{10} = 10$).		Poser l'addition en colonnes : virgule sous virgule
Autres² aides	A long terme : redonner du sens à l'écriture des entiers (numération écrite) et à l'écriture à virgule des décimaux en opérant sur ces écritures dans le cadre d'une addition, d'une soustraction et d'une multiplication par un entier perçue comme une addition itérée. L'écriture fractionnaire est à favoriser, y compris à l'aide du support de la droite numérique.		Redonner du sens à l'écriture à virgule des décimaux en opérant sur ces écritures dans le cadre d'une addition.

² Ces aides supplémentaires sont d'autres qui seraient envisageables dans le cadre de la correction

SECOND VOLET (8 POINTS)

Question 1 Niveau concerné

Cette séquence peut être proposée en troisième année du cycle 3 (CM2).
Tout d'abord, le document comporte des désignations de points que l'on trouve dans les manuels scolaires de fin de cycle 3.

Elle est difficilement réalisable à un niveau inférieur car les tâches proposées nécessitent :

- une anticipation des mouvements des pièces en vue de constituer un carré (activité 1)
- le tracé de perpendiculaires à un segment donné passant par un point sur ou à l'extérieur du segment (activité 3)
- l'utilisation d'une propriété de la médiane du carré : la perpendiculaire au milieu d'un côté coupe le côté opposé en son milieu (activité 3)
- la réalisation de figures complexes à construire (activités 3 et 4)
- la rédaction d'un programme de construction qui nécessite un vocabulaire et des notions en cours d'acquisition en cycle 3 (activité 3)

Ces compétences restent encore fragiles au cycle 3.

Remarque :

L'activité 4 nécessite un contrôle complexe de l'égalité de longueurs de segments pour trouver l'enchaînement des actions à effectuer pour la reproduction du dessin.

Question 2 Analyse des activités 1, 2 et 3

Bien que l'énumération des tâches ne soit pas demandée, il nous paraît important de les expliciter avant de répondre à la question.

	Activité ³ 1	Activité 2	Activité 3
Tâches	Utiliser un dessin à main levée pour recomposer un carré.	Reproduire à l'aide d'une règle un dessin d'échelle ⁴ différents	T1 : reproduire à l'aide d'une règle et d'une équerre un

³ Les deux carrés sont respectivement réalisés avec les pièces 1, 3, 6 et 2,4,5.
remarque : les 3 pièces sont regroupées dans une même zone, les pièces 1 et 3 s'emboîtent après une simple translation .

⁴ Deux échelles sont possibles : utilisation du pointé 7 × 7 (demande implicite) ou du pointé 5 × 5

	Activité³ 1	Activité 2	Activité 3
		sur un support pointé.	dessin d'échelle différente sur une feuille blanche. T2 ⁵ : rédiger un programme de construction.
Compétence 1	Percevoir des égalités de longueurs.	Percevoir l'égalité de longueur de 2 segments, percevoir le milieu d'un segment tracé sur deux supports différents (papier blanc ou papier pointé).	T1 : savoir tracer à la règle des perpendiculaires à une droite donnée passant par un point sur ou hors de la droite.
Compétence 2	Percevoir des angles droits et des égalités d'angles.	Percevoir ou vérifier à l'aide d'une règle des alignements de points et de segments (un point et un segment ; deux points et un segment)	T1 : savoir ordonner des actions pour réaliser la construction d'une figure complexe.
Autres⁶ compétences	• Connaître les propriétés caractéristiques d'un carré. • Imaginer une rotation glissement d'une figure. • Percevoir l'emboîtement d'un angle saillant et d'un angle rentrant.	• Être capable d'utiliser une règle pour tracer un segment en joignant deux points. • Connaître la signification des mots milieu et carré. • Percevoir l'orthogonalité ou le parallélisme de deux segments comme moyen de contrôle de la tâche.	T1 : savoir (même implicitement) que la perpendiculaire au milieu d'un côté coupe le côté opposé en son milieu. De plus les compétences nécessaires à l'activité 2 restent valables car il faut analyser les caractéristiques de la figure pour la construire (en particulier percevoir ou vérifier des

⁵ Nous ne citerons pas de compétences particulières pour cette tâche dont les difficultés seront précisées à la question 4c.

⁶ Ces compétences supplémentaires sont d'autres qui seraient envisageables dans le cadre de la correction.

	Activité ³ 1	Activité 2	Activité 3
			alignements et des perpendicularités) T ₂ : les documents d'accompagnement évoquent les « programmes de construction » dans le cadre d'une lecture et non de la rédaction.

Question 3

Analyse de la logique de la séquence

Plusieurs logiques peuvent être mises en évidence :

1) Utilisation progressive d'instruments dans le cadre d'une difficulté croissante.

D'abord règle sur un support pointé (activité 2), puis règle et équerre sur du papier blanc (activité 3), et enfin règle, équerre et compas sur du papier blanc (activité 4).

2) Volonté de faire acquérir aux élèves des compétences spatiales dans une activité de reproduction de dessins.

Activité 1 : reconstitution de figures à partir de pièces (activité puzzle).

Activité 2 : reproduction d'une figure avec l'aide d'un papier pointé.

Activité 3 : reproduction d'une figure sur papier blanc à l'aide d'instruments de géométrie (règle non graduée et équerre) et formulation de l'action.

Activité 4 : reproduction d'une figure sur papier blanc à l'aide d'instruments de géométrie (les mêmes que pour l'activité 3, plus le compas), puis analyse de la relation spatiale du dessin 2 avec le dessin 1.

Remarque :

Nous pouvons reconnaître une logique dans le choix des figures toutes réalisées à partir de carrés. Si l'on fait subir une rotation de centre B et d'angle 90° dans le sens direct au triangle ABE dans le dessin 2 de l'activité 4, on obtient le dessin 1.

Question 4 (Activité 3)

Question 4a

Rôle des instruments

Règle :

- permet de vérifier des alignements d'objets (points, segments).
- de tracer des segments en joignant 2 points, de réaliser des alignements de points et de segments.

Équerre :

- permet de vérifier si un angle est droit.
- permet de tracer une perpendiculaire à un segment en un point donné de ce segment (élever une perpendiculaire) ou de tracer une perpendiculaire à un segment passant par un point donné hors de ce segment (abaisser une perpendiculaire).

Question 4b

Deux difficultés prévisibles pour la construction

Nous répertorions quatre familles de difficultés :

- La première famille de difficultés est de prendre l'information nécessaire pour la reproduction du dessin et qui n'est pas codée explicitement sur celui-ci : égalité de longueurs de segments, angles droits, alignements (souvent codés sous forme de pointillés)
- La deuxième famille de difficultés réside dans l'obtention de l'ordre des constructions à réaliser :
 - d'abord (DC) et (BC) pour obtenir le point C (tracés de 2 perpendiculaires)
 - puis (EF) pour obtenir F puis [DF] (tracé d'une perpendiculaire et d'un segment)
 - et enfin les deux derniers segments permettant d'obtenir le carré central (tracés de deux perpendiculaires)
- La troisième famille de difficultés est celle de l'obtention des différents éléments de la figure complexe :
 - difficulté de repérage du tracé du point F : il doit être obtenu comme l'intersection du segment [BC] et de la perpendiculaire au segment [AD] en E (deuxième étape du programme de construction).
 - difficulté du tracé du segment porté par la droite perpendiculaire à la droite (BE) et passant par A et délimité par les segments [BE] et [DF] (élément de la troisième étape du programme de construction).
- La quatrième famille de difficultés réside dans l'usage des instruments, en particulier celui de l'équerre.

Question 4c

Trois difficultés prévisibles pour la rédaction

- difficulté de trouver l'ordre des différentes étapes de la construction.
- difficulté à décrire une construction, en particulier dans l'élaboration de phrases souvent très complexes pour des enfants de cet âge.
- difficulté à utiliser du vocabulaire géométrique efficace (perpendiculaire à un segment en un point ...) des désignations géométriques (nommer un point ; désigner un segment, une droite).

Question 4d
Trois composantes⁷ du bilan

- pointer les difficultés rencontrées dans la réalisation des deux tâches (construction et rédaction) et essayer de les surmonter collectivement ;
- reprendre collectivement la construction de la figure complexe en pointant la nécessité de bien l'analyser (ce que permet l'activité 2) et faire réaliser avec soin les différents tracés de perpendiculaires ;
- reprendre collectivement la rédaction du programme en introduisant le vocabulaire géométrique approprié utilisable dans de futures activités identiques.

Remarque :

Rédiger le programme de construction du dessin de l'activité 3 paraît hors de portée de la plupart des élèves de cycle 3.

⁷ Il est difficile de répondre à cette question dès l'instant où nous n'avons aucun détail de mise en œuvre de cette activité.

Editeur : **ARPEME**
Responsable de la publication : Pierre EYSSERIC
Dépôt légal : septembre 2004 ISBN : 2-9515107-5-6

www.arpeme.com