

SUPPORTS ET OUTILS DE COMPRÉHENSION POUR ÉLÈVES EN DIFFICULTÉ (CYCLE III ET COLLÈGE)

François Boule
CNEFEI, Suresnes

Résumé :

Il s'agit de proposer des supports et activités visant à faciliter la compréhension, la représentation, la mémorisation. La plupart ont été expérimentées dans le cadre de Réseaux d'aides, SEGPA, Classes-relais.

Plusieurs directions sont envisagées :

- * Présentation des fractions et des décimaux (approche critique, construction ou remédiation),
- * Techniques opératoires sur les entiers,
- * Entraînement au calcul par des jeux numériques variés, individuels ou collectifs.

1. LE CADRE.

Les supports proposés à la discussion dans cet atelier ont été conçus pour être mis à disposition des enseignants des classes-relais. Les classes-relais sont des dispositifs de collège destinés aux élèves descolarisés, en vue de permettre leur réinsertion scolaire jusqu'à l'âge de 16 ans. Il ne s'agit en aucune façon de les occuper mais d'enseigner, selon des modalités pédagogiques adaptées, des contenus leur permettant de réintégrer une classe de collège convenant à leur niveau scolaire. Le séjour dans une classe-relais peut durer quelques semaines ou quelques mois. Les groupes sont très peu nombreux (6 à 10 élèves) et les parcours individualisés. Il convient donc de disposer d'outils permettant une relative autonomie, assez attractifs, et en écart par rapport aux supports habituellement en usage, afin de donner du sens à des apprentissages qui n'en ont plus.

Mais on peut penser que ces supports et méthodes pourraient être utilisés ou adaptés avec profit avec d'autres publics, dans des cadres différents, comme la SEGPA, ou les groupes d'élèves en grande difficulté scolaire.

Le champ de cet atelier comporte deux thèmes : la reconstruction des fractions et décimaux ; les jeux de calculs (sur des entiers) propres à établir de façon attrayante des stratégies de calcul efficaces.

Il s'agit donc d'examiner ces supports du point de vue de leur utilisation avec un public particulier (dans un cadre qui n'est pas celui d'un apprentissage premier), et d'autre part en formation : mise à jour des avantages/inconvénients, progression, variantes, scénarios pédagogiques.

Les documents discutés, résumés ci-dessous, sont disponibles, complets, au format PDF, sur demande à l'adresse < fboule@wanadoo.fr >.

2. PÉDAGOGIE DES FRACTIONS ET DÉCIMAUX : UN RAPIDE APERÇU HISTORIQUE ET CRITIQUE

Il s'agit de comparer quelques présentations diverses, plus ou moins anciennes et d'en signaler les avantages et les inconvénients, aucune ne semblant, malgré les nombreuses recherches didactiques des vingt dernières années, éviter tous les obstacles et mériter une préférence définitive.

Une distinction quasi-rituelle (et inscrite traditionnellement dans les programmes) consiste à séparer les « fractions simples » des autres ; les premières sont celles qui portent un nom particulier en français (une moitié, un demi, un tiers, un quart) et qui par conséquent appartiennent au vocabulaire et à l'expérience courante des enfants. Une représentation classique associe à ces fractions de l'unité un secteur angulaire :

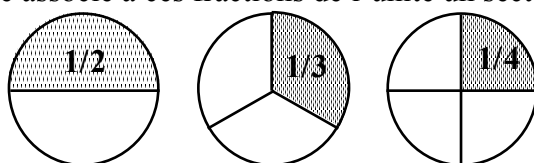


fig. 1

On reviendra plus tard sur les inconvénients de cette représentation. Remarquons au passage plusieurs caractéristiques : le numérateur est 1 ; elles sont inférieures à l'unité ; elles sont classiquement représentées par une barre de fraction horizontale ou oblique (comme ci-dessus).

Une approche historiquement ancienne (antérieure à 1970) consiste à définir une fraction comme une division à faire : « $17/3 = \text{diviser } 17 \text{ par } 3$ » ; l'écriture et la technique de la division étant supposées connues, cette définition permet de disposer aussitôt d'un décimal aussi proche que l'on veut, en poursuivant la division. Cette définition, qui a l'avantage de présenter parallèlement fraction et encadrement décimal, ne donne pas un *statut de nombre* aux fractions, ce qui rend vide de sens leur addition (on ne peut "additionner" des procédures) ou leur produit. La comparaison est rendue difficile, voire faussée puisqu'on ne peut comparer par exemple $3/17$ et $2/11$ sans passer par une approximation décimale. Une maîtrise très incertaine de la division avec quotient décimal rend cette définition, non seulement insatisfaisante, mais d'emploi malaisé. On pourrait penser que l'usage des calculettes est de nature à faciliter cette approche. Il n'en est rien puisque la calculette rend un résultat tronqué. La définition, qui confondrait alors $2/3$ et 0.666666 , en devient fautive.

Une approche de nature voisine, et qui a eu un succès certain dans les années 70 est fondée sur l'usage des « opérateurs ». Un opérateur est défini par la donnée de deux listes (fig. 2)

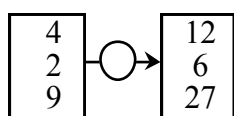


fig. 2

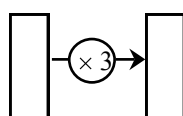


fig. 3

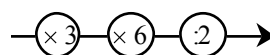


fig. 4

Ainsi défini fonctionnellement, un opérateur peut être étudié indépendamment des listes, et notamment être intégré dans des chaînes (fig. 4). Ces chaînes permettent commutations, associations et réductions.

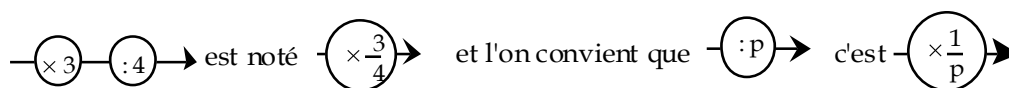


fig. 5

Une fraction est définie comme une chaîne composée d'une multiplication et d'une division (fig.5).

Cette définition peut sembler relever d'un certain arbitraire. Mais elle facilite beaucoup l'étude de certaines propriétés et particulièrement l'usage du calcul multiplicatif. En effet, moyennant un léger flou initial (qui risque peu de froisser les élèves), on accepte volontiers la commutativité et l'associativité des opérateurs. En revanche elle a deux inconvénients majeurs. D'une part le *nombre* 4 et la *fraction* $\times 4$ sont, par définition, des objets de nature différente, et il faut *admettre* que $\times 1/2$ opérant sur le nombre 1 produit le *nombre* $1/2$. D'autre part, comme précédemment, la comparaison et surtout l'addition d'opérateurs sont dépourvues de sens.

Ces approches peuvent être appelées "fonctionnelles" puisqu'elles privilégient une propriété algébrique.

Une approche plus récente (Neyret, thèse, 1995) offre quelque parenté avec celle-là :

Un automate, partant du zéro d'une graduation, arrive au point 7 en trois sauts (fig. 6).

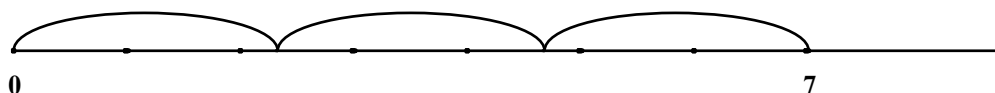


fig. 6

Un saut est un déplacement, mais on lui associe implicitement la longueur du saut, qui est repérée par un nombre. C'est l'avantage de cette définition par rapport à la précédente. Mais on retrouve le même arbitraire formel lorsque l'on désigne ce saut par la fraction $7/3$.

Le versant "transformations" du contexte des sauts permet d'étudier aisément les équivalences, c'est-à-dire la "simplification" des fractions, de laquelle découle les procédures de calcul. En revanche la signification des opérations somme et produit réclame, comme on va le voir, de recourir au versant "mesure".

Les approches suivantes privilégient toutes une relation avec la mesure.

La première, d'usage encore très répandu, consiste à utiliser la représentation proposée fig. 1. Mais elle a un grave inconvénient : elle permet difficilement d'aborder des fractions supérieures à l'unité.

En effet on n'a pas de mal à accepter que la partie grisée (fig. 7) représente un tiers, même en l'absence du disque référence.



fig. 7

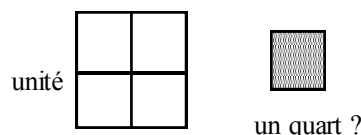


fig. 8

En revanche si la figure de référence n'est pas un disque (fig. 8) la partie grisée n'a plus de sens en l'absence de l'unité de référence.

Une dernière approche permet de définir fractions et décimaux par un système de mesure.

On considère un objet L à mesurer et une unité de longueur U, subdivisée en dix sous-unités V :



fig. 10

On peut écrire d'abord $U < L < 2U$, puis $1U\ 8V < L < 1U\ 9V$. Ou encore $18V < L < 19V$. Le processus peut se poursuivre. On définit ainsi un *système* (U,V,W...). La position de l'unité **principale** U est marquée par une virgule : *Def.* : $18V = 1U\ 8V = 1,8U$

Si, au lieu d'un partage en dix parties, on utilise un partage en trois, on crée une subdivision en tiers. Cette approche, qui semble maintenant considérée comme le « modèle standard » présente deux avantages considérables : permettre rapidement des comparaisons empiriques, en constituant diverses graduations, et donner une interprétation très accessible de l'addition et même de la multiplication (voir ci-dessous). Deux difficultés se présentent cependant, dont l'une est de caractère théorique.

La première est due à la *confusion* de la *longueur* et du *repère* de l'extrémité :



fig. 11

La seconde difficulté, plus théorique, n'est certainement pas un obstacle pédagogique : il est nécessaire *d'admettre* que la formule donnant l'aire d'un rectangle, que l'on peut établir pour des côtés dont les mesures sont des entiers est encore valable pour des côtés dont les mesures ne sont pas entières. C'est ce que l'on appellera ici un « passage en force » (énoncé à faire admettre). On ne peut évacuer tout *passage en force* dans l'enseignement, mais il convient d'en évaluer le *coût psychologique*. Ils ne sont pas tous psychologiquement équivalents. Ni la didactique ni les programmes ne s'interrogent sur ce point. Faire admettre un point pour alléger le programme, conduit à renoncer aux mathématiques (ce qui advient de plus en plus au lycée). On peut souvent donner l'idée d'une démonstration, sans approfondir la mise en forme. Les points à faire admettre n'ont pas tous la même portée.

Exemple:

L'aire d'un rectangle sur papier quadrillé est obtenue par le produit longueur $\times$ largeur.

Aucun élève ne résiste à admettre que c'est encore vrai pour les mesures non entières. Pourtant la preuve n'est pas simple (passage à la limite, comme dans la démonstration classique du Th. de Thalès).

Ce « passage en force » offre un bon appui à l'intuition. Il est légitime et efficace. A charge d'approcher la preuve plus tard.

Fournir un algorithme non justifié (règle de trois, produits en croix...) n'est pas de même nature.

La bonne pédagogie consiste à trouver un itinéraire où les « passages en force » sont intuitivement efficaces, et légitimes (c'est-à-dire ne font pas craindre des ruptures de sens ou des élargissement illicites).

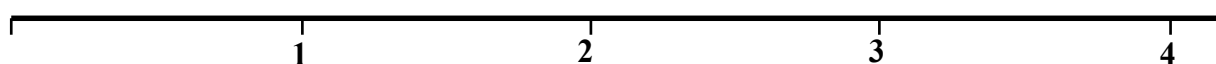
3. LE SCÉNARIO DES BANDES DE PAPIER. AVANTAGES ET INCONVÉNIENTS

Le principe de cette présentation des fractions consiste à construire plusieurs échelles et à les comparer. Une échelle a pour but de repérer avec précision croissante des longueurs à mesurer. On se donne une **unité**, par exemple la *largeur* d'une feuille de papier A4 (il est facile d'obtenir un grand nombre d'exemplaires, de couleur et largeur diverses, en pliant et découpant plusieurs feuilles). Plutôt que de *reporter* cette unité, on peut aisément construire des bandes de longueur 2, ou 3, ou 5 unités, et éviter ainsi des reports.



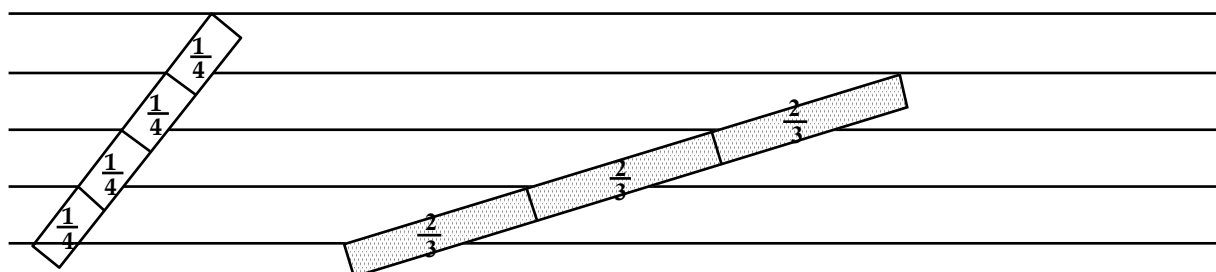
3.1 Graduations

Ceci permet de graduer un axe :



Pour améliorer la précision, on partage l'unité. On utilise pour cela un réseau de traits parallèles.

Ce réseau permet de subdiviser les bandes (nouveau "passage en force" mais dont le coût est faible).

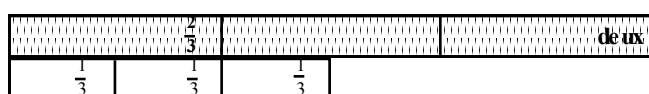


On a plié la première bande en quatre, on obtient des **quarts**, la seconde en **tiers** ; la notation chiffrée conventionnelle est une fraction dont le NUMERATEUR représente l'objet partagé, l'unité et le DENOMINATEUR indique le nombre de parties. On traduit ces subdivisions par :

Definition : $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ et $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 2$

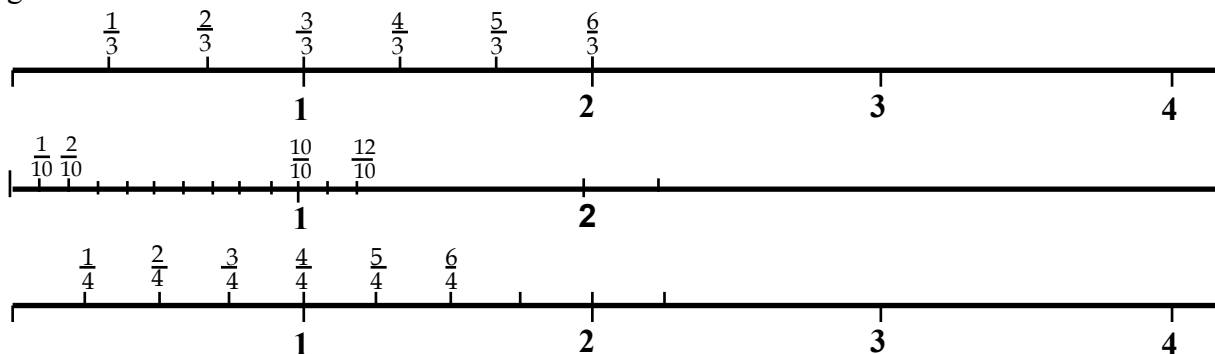
Un premier résultat important est exprimé par l'exemple suivant :

« Il revient au même de prendre le tiers de 2 et de prendre deux fois le tiers de l'unité ».



3.2 Premières égalités

En reportant le long de l'axe précédent (fig. 13), on obtient de nouvelles graduations :



En calant tous les points de départ, on constate ainsi des **coïncidences** qui vont s'écrire :

$$\frac{3}{3} = \frac{4}{4} = 1, \quad \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = 2, \quad \frac{2}{4} = \frac{5}{10}, \quad \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = \frac{15}{10} \text{ etc.}$$

3.3 Comparaison de fractions

La confrontation de ces graduations permet aussi d'écrire des *inégalités* :

$$\frac{4}{3} < \frac{3}{2} < \frac{5}{3} \quad \frac{5}{4} < \frac{4}{3} < \frac{6}{4}$$

Deux règles empiriques simples résultent de ces comparaisons :

> *Quand deux fractions ont le même dénominateur, la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur.*

Exemple : $\frac{5}{3} > \frac{4}{3}$

> *On obtient une fraction égale en multipliant numérateur et dénominateur par le même nombre ($\neq 0$).*

Exemple : $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{10}{15} = \dots$

On dispose alors d'un moyen pour comparer deux fractions.

Pour comparer deux fractions, on dresse d'abord une liste de fractions égales :

$$\begin{aligned} \frac{4}{7} &= \frac{8}{14} = \frac{12}{21} = \frac{16}{28} = \frac{20}{35} = \dots = \frac{36}{63} \\ \frac{5}{9} &= \frac{10}{18} = \frac{15}{27} = \frac{20}{36} = \frac{25}{45} = \dots = \frac{35}{63} \end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure : $\frac{35}{63} < \frac{36}{63}$ donc $\frac{5}{9} < \frac{4}{7}$

Remarque :

Un autre moyen de comparaison, au moins pour les fractions inférieures à l'unité, procède d'une construction géométrique sur un quadrillage. Commençons par représenter des fractions :

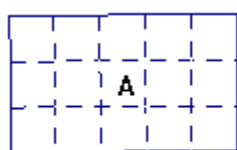


fig. 12

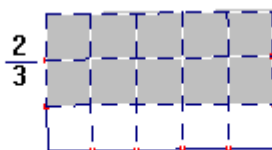


fig. 13

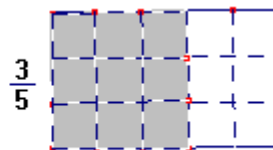


fig. 13

La surface-unité est A. Sur les figures 13 et 14, les surfaces hachurées représentent respectivement $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{5}$. Il reste à comparer ces deux rectangles, ce que l'on fait en dénombrant les carreaux (respectivement 10 et 9).

3.4 Pluralité d'écritures, notation décimale

La meilleure possibilité de maîtrise des fractions et des décimaux, décisive pour les comparaisons et les calculs, consiste en la *pluralité des écritures*. On est habitué à manipuler des décompositions additives sur les entiers ; c'est l'un des outils fondamentaux du calcul réfléchi. Il est fondamental de s'attarder sur la multiplicité des écritures d'une fraction (puis d'un décimal), avant d'aborder les calculs.

$$\text{Ainsi } \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2} \dots$$

En particulier, le détachement de la partie entière facilite comparaisons et calculs.

Dans le cas d'un partage en dix parties, on introduit une nouvelle notation (*nombres décimaux*).

$$\text{Par définition } 2,3 = 2 + \frac{3}{10} = \frac{23}{10}$$

Le nombre de chiffres après la virgule indique le partage de l'unité.

$$\text{Exemples : } 0,12 = \frac{12}{100} = \frac{1}{10} + \frac{2}{100} \quad 2,03 = 2 + \frac{3}{100}$$

3.5 Calcul additif

L'addition est représentée par une juxtaposition de bandes.



Dans le cas de fractions de même dénominateur, il suffit de travailler sur une seule graduation.

$$\text{Exemple : } \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{8}{4} = 2 \quad \text{ou encore } \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = 1 - \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} = 2$$

Pour obtenir un résultat exact dans un cas plus général, il convient de se ramener à une graduation commune, c'est-à-dire au même dénominateur.

3.6 Calcul multiplicatif

Si le calcul additif n'offre guère d'alternative, puisque l'on reste dans le champ de mesures de longueurs, le calcul multiplicatif offre deux interprétations.

La première consiste à revenir à la définition du produit comme mesure d'une aire. L'aire d'un rectangle est mesurée par le produit des longueurs des côtés.

La seconde interprétation s'exprime en terme de transformation.

Ces deux interprétations sont liées par la double lecture que l'on peut faire d'une fraction.

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times 2 \text{ (deux fois un tiers) } = 2 \times \frac{1}{3} \text{ (un tiers de 2, ou encore 2 divisé par 3)}$$

Considérons par exemple le produit $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$.

On peut l'interpréter comme la mesure d'un rectangle dont les côtés mesurent $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{5}$.

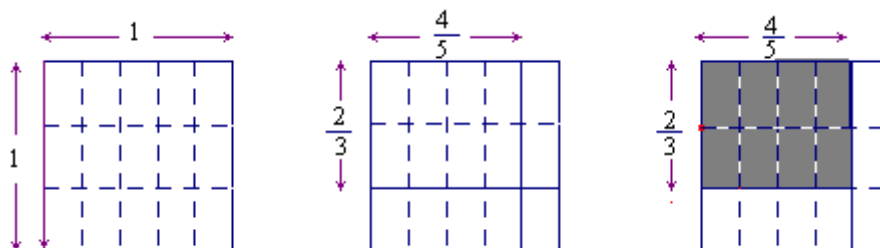


fig.15

Il reste à calculer le résultat : on obtient 2×4 carreaux sur 3×5 , soit $8/15$.

La seconde interprétation consiste à considérer que l'on prend d'abord les $2/3$, puis les $4/5$ du résultat (l'ordre inverse conduit bien sûr au même résultat).

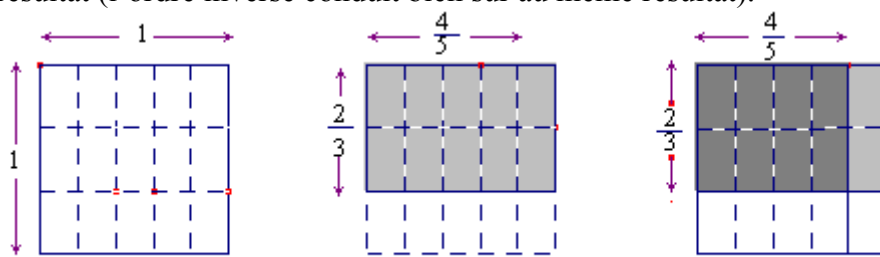


fig.16

Il reste à calculer le résultat : on obtient 2×4 carreaux sur 3×5 , soit $8/15$.

Remarque :

Cette seconde interprétation contient un moyen de calcul pratique très efficace, grâce à un abus de langage ; c'est la méthode des opérateurs. L'abus de langage consiste à identifier $2/3$ et $\times 2/3$.

$$1 \rightarrow \left(\times \frac{2}{3} \right) \rightarrow \frac{2}{3} \quad \quad \quad \left(\times \frac{2}{3} \right) \rightarrow \text{c'est} \quad \left(\times 2 \right) \rightarrow \left(: 3 \right) \rightarrow$$

On aura reconnu là un nouveau «passage en force».

Dans tous les cas, le résultat s'énonce en une règle simple :

« *numérateur = produit des numérateurs ; dénominateur = produit des dénominateurs* ».

La seconde démarche offre le grand mérite de permettre de traiter aisément la *division* d'un entier ou d'une fraction par une fraction, par le moyen de la fraction *inverse*.

$$1 \rightarrow \left(\times \frac{2}{3} \right) \rightarrow \frac{2}{3} \quad \quad \quad \frac{2}{3} \rightarrow \left(\times \frac{3}{2} \right) \rightarrow 1$$

4. DISCUSSION

Plusieurs questions alimentent le débat, comme les «passages en force» évoqués ci-dessus. Ces questions concernent la **population spécifique** (élèves déscolarisés ou en grande difficulté) pour lesquels il ne s'agit pas d'un apprentissage premier, la possibilité de **transposition** pour une population "ordinaire" plus jeune, l'intégration à la formation des maîtres. Elles portent principalement sur la distance entre les «conceptions» initiales et les représentations à construire.

Tenter de s'appuyer sur les conceptions peut consister en un amorçage par des questions comme "*que veut dire $2/3 + 4/5$?*". Cette question risque de déstabiliser les élèves car elle ne renvoie à aucun savoir pratique ; la réponse risque fort d'être un résultat (vraisemblablement $6/8$) obtenu en sollicitant une procédure fictive. On ne peut alors rien opposer d'autre que "*ce n'est pas ça*" et le débat n'en est pas avancé. Il ne convient donc d'interroger les conceptions (initiales) que lorsque la distance aux représentations visées n'est pas trop grande. En revanche, si l'on a exercé le recours à un support, l'élève peut expérimenter avec les bandes de papier, et trouver un encadrement. Le support ne prouve rien, mais évite la panne.

C'est une stratégie pédagogique indispensable avec les élèves en grande difficulté, c'est-à-dire dépourvus de représentations efficaces et de moyens de contrôle (cf. Julo-Houdebine, 1988).

C'est ici qu'interviennent les "*représentations-relais*" (comme la frise numérique ou les collections de doigts pour les nombres entiers). Il s'agit d'objets intermédiaires (*schèmes* pour Kant, *schémas* pour Gonseth), qui permettent d'établir des représentations, et d'intégrer les propriétés fonctionnelles.

D'une façon analogue, un fonctionnement verbal réitéré de type de $2/3 U + 2/3 U$ conduit à l'"évaporation de l'unité", c'est-à-dire à la construction d'un algorithme formel agissant sur $2/3 + 2/3$. Autre moyen : l'utilisation empirique des bandes juxtaposées, puis leur progressive mise à distance. Les deux moyens peuvent être coordonnés et conduisent à la constitution conjointe d'une représentation et d'une procédure.

Dans ce cas, le support n'est pas seulement un objet mou, une image inerte ; il peut servir de support à un début d'isomorphisme avec la structure à construire.

La question du rapport avec les apprentissages premiers a été abordée, mais pas épuisée.

Si une méthode se révèle efficace pour des élèves en difficulté et retard scolaire, pourquoi ne pas l'employer *plus tôt*, comme apprentissage initial ? Une méthode est rarement meilleure *intrinsèquement*, indépendamment des conceptions et du développement des élèves. C'est pourquoi une telle hypothèse mérite expérimentation.

En ce qui concerne l'exercice professionnel, on s'accorde à constater un assez fréquent recours (régressif ?) des enseignants débutants à des conceptions plus primitives que celles qui leur sont enseignées en formation, et plus proches de leurs souvenirs d'élèves. Quel place donner alors en formation à l'étude de différentes méthodes dans un domaine donné, et comment éviter que la présentation de fiches-élève ne désamorce toute critique ?

5. JEUX DE CALCUL

Les activités numériques sur les entiers constituent un socle indispensable pour la construction des objets numériques plus complexes. Elles peuvent également se présenter comme ludiques, comme défis, compétitions entre élèves ou entre groupes. Elles ont pour objectif *d'affermir* les représentations numériques.

La représentation la plus primitive de l'ensemble N est celle d'une **liste** verbale.

Les apprentissages ultérieurs visent à donner des moyens de **survol** de cette première représentation (estimation, opérateurs additifs et multiplicatifs, etc). Il s'agit non seulement de moyens de calcul, mais d'enrichissement de la représentation numérique, et de constitution de l'ordre de grandeur.

La représentation primitive de *liste* peut se révéler suffisante pour effectuer certains calculs de la vie mais elle est insuffisante dès que l'un des nombres dépasse une ou deux dizaines ou lorsqu'il s'agit de calcul multiplicatif.

Le rapport de la Commission Kahane (2002) insiste sur l'opposition entre l'automatisation de "routines" et la composante stratégique du calcul. Le calcul mental a été longtemps considéré à l'école comme une *gymnastique intellectuelle*, un exercice d'attention, et à ce titre régulièrement recommandé jusqu'aux années 70. Le rôle de la mémorisation a été minoré pendant les deux ou trois décennies suivantes. On reconnaît maintenant, dès le début de l'école élémentaire, que la connaissance des nombres n'est pas indépendante des structures de calcul, c'est-à-dire qu'il n'y a pas antériorité de la liste sur la structure organisatrice. Le calcul contribue à la construction des nombres.

En première approximation, on a coutume de distinguer les "calculs arithmétiques simples" (les *tables*) et les calculs complexes. Les résultats arithmétiques simples sont d'abord "reconstruits" (Fayol : *l'Enfant et le Nombre*, 1990), puis progressivement "rappelés" (sous forme d'énoncés répertoriés en mémoire). Cette constitution de répertoire résulte de l'exercice fréquent et de l'exigence de rapidité. Elle est indispensable à une *automatisation* nécessaire à la hiérarchisation, c'est-à-dire à la réalisation de calculs plus complexes, mais aussi à la constitution de représentations plus riches et plus fermes de l'ensemble des nombres entiers. Ces représentations sont essentielles, non seulement pour l'efficacité calculatoire dans la vie courante, mais aussi pour la constitution d'objets complexes, comme les décimaux et les fractions, dont la structuration est bien plus délicate que celle des entiers.

SOMMAIRE DES FICHES¹ PROPOSÉES :

- **COMPUTIX** (jeu à deux)
pratique du calcul additif simple, utilisation d'une stratégie
- **FAIRE QUINZE** (jeu à deux)
renforcement des décompositions additives de 15 en trois termes ; composante stratégique importante
- **CASCADE**
réciprocité addition/soustraction, pratique du calcul mental, approche des notions d'inconnue et d'équation
- **COMPTE EST BON**
pratique du calcul arithmétique simple, du parenthésage, pratique de l'ordre de grandeur
- **CHAINE DE CALCUL**
pratique du calcul arithmétique, anticipation, recherche d'hypothèse
- **OPERATIONS A TROUS**
réciprocité addition/soustraction, multiplication/division
- **TABLEAUX DE NOMBRES**
entraînement aux décompositions numériques
- **OPERATIONS IMAGINAIRES**
formulation et validations d'hypothèses.

¹ Les fiches mentionnées ci-dessus sont disponibles, au format PDF, sur demande à l'adresse <fboule@wanadoo.fr>. Les commentaires critiques, résultats d'expérimentations, suggestions seront accueillis avec gratitude.