

L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE EN CYCLE 3 À PARTIR DE PROJETS

Michel Sarrouy
IUFM de Montpellier

Résumé :

L'apprentissage de beaucoup de connaissances géométriques en cycle 3 peut être organisé à partir de projets.

La première séance a été consacrée à un exposé rapide de projets et au cours de la seconde, nous avons discuté de la mise en place d'un travail pour des PE2 dans le cadre de l'un des projets.

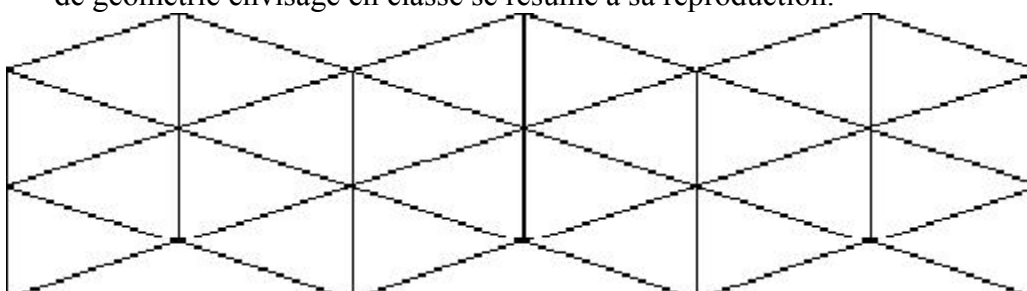
I. PROJETS (CM)

Ces projets sont des travaux en géométrie dont la mise en place est prévue au CM. Ils sont destinés à couvrir une partie importante du programme et constituent un essai de finalisation à l'enseignement de la géométrie en fin de cycle 3, le reste du programme¹ et l'« entretien » courant des notions rencontrées étant assuré par des activités plus classiques.

Chacun de ces projets est assez ambitieux, mais ne se doit-on pas d'être ambitieux pour ses élèves ? Ils constituent de plus une bonne école de rigueur dans les tracés. La preuve en est dans l'excellence des tracés réalisés.

1. Kaléidocycle²

- a. Il s'agit ici d'une proposition de travail à partir d'un patron, l'essentiel du travail de géométrie envisagé en classe se résume à sa reproduction.



Il est constitué de triangles, tous isocèles, de parallélogrammes (des petits et des grands), de trois directions de parallèles.

Remarques sur la construction : si le patron n'est pas « parfait », il ne sera pas possible de le fermer ou il ne tournera pas sur lui-même ; les angles à la base des triangles isocèles doivent mesurer plus de 60° ; tous les plis sont dans le même

¹ Le programme qui a servi de base est celui de 1995, ce travail n'a pas encore été mis à jour pour tenir compte des évolutions de 2002.

² Pour d'autres points de vue, voir « Différents types de kaléidocycles » et « Des kaléidocycles » dans les *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, tome IV, IREM de Paris VII, mars 1996.

sens à l'exception des petits segments de même longueur à supports parallèles qui sont dans les deux sens.

Pour arriver à construire le kaléidocycle, il faut donc arriver à des tracés aussi précis que possible et pour ce faire, on s'occupe des tracés les plus longs. Ce sont des parallèles d'où l'idée d'utiliser ce patron pour travailler plus particulièrement le parallélisme.

b. Travaux en classe :

C'est ce qui a été fait en classe assez régulièrement.

Pour obtenir une très bonne précision dans le tracé de ces parallèles, l'idée qui a prévalu est la suivante : on construit des parallèles en construisant des parallélogrammes et pour ces derniers, on s'appuie sur des segments de même longueur à supports parallèles, des segments portés par des côtés opposés d'une feuille de papier ordinaire A4. Les parallèles des trois directions du patron ont été « prolongées » jusqu'aux bords de la feuille.

Voir un exemple en Annexe 1.

c. Travail en formation PE2

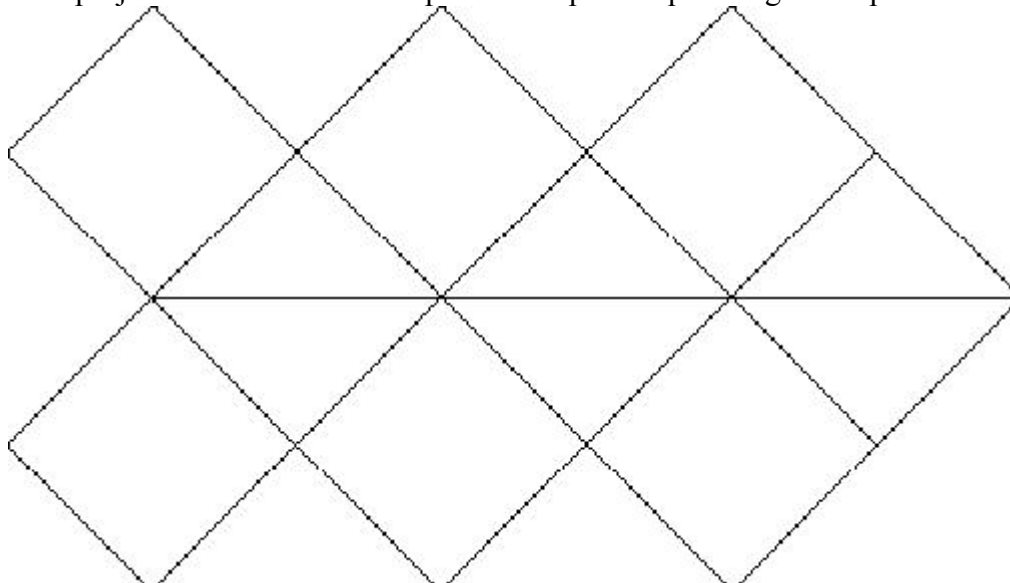
Plusieurs années, ce projet a été proposé à des PE2 en stage de pratique accompagnée. D'autres fois, nous sommes allés faire des séances de maths à l'École Annexe avant un stage de pratique accompagnée et le travail a été poursuivi en stage.

Pour faire ce travail, le groupe de PE2 attaché à ce projet a été mis en situation : après avoir observé et manipulé des kaléidocycles, je leur demande de reproduire le patron, le plus fidèlement possible, le modèle proposé étant adapté à une feuille de papier A4.

Après leurs essais, nous en venons aux parallèles et à leur tracé.

2. 2 cubes imbriqués

a. Ce projet est aussi un travail à partir d'un patron qu'il s'agit de reproduire.



Le patron est formé de carrés, de parallèles, de perpendiculaires. L'élément géométrique retenu pour un travail en classe est l'orthogonalité.

Remarque sur la construction : tous les plis sont dans le même sens à l'exception du segment le plus long qui est dans l'autre sens.

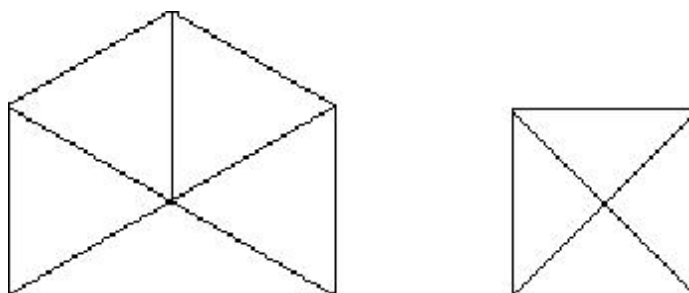
b. Travail en classe :

Le souci initial était de trouver un projet ressemblant au précédent. La plupart de nos classes sont en effet des classes à niveaux multiples dans lesquelles le même projet ne peut pas servir chaque année.

En termes de projet, on a bien là une alternative et en termes de contenus mathématiques travaillés, ils sont complémentaires.

3. Cube et octaèdre imbriqués

- a. Il existe un patron de ce solide, mais il est trop compliqué pour être utilisé à l'école. Par contre, il est possible de procéder à sa construction en construisant des petites pyramides. Il en faut 6 pyramides à base carrée (sans la base) et 8 tétraèdres (sans base).



Le premier « patron » ne comporte que des triangles, tous équilatéraux, mais la réussite de sa reproduction passe par la construction d'un hexagone régulier à l'aide du compas.

Le second « patron » est, lui, formé de triangles, rectangles isocèles, et sa réussite passe ici par la construction d'un carré.

- b. Pour un travail en classe, ces deux « patrons » peuvent être réalisés par les élèves et les solides sont le fruit d'un travail coopératif.

4. Drapeau européen

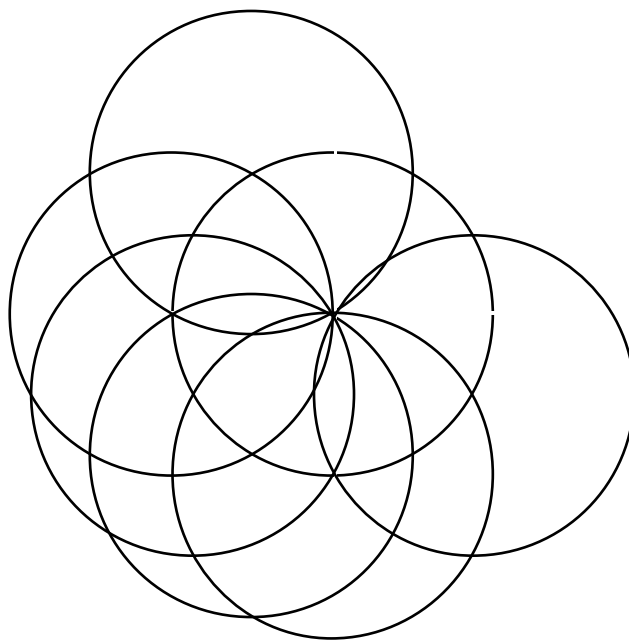


- a. La construction étant complexe il faut la décomposer.

* Rectangle (drapeau) et emplacement des étoiles

Ici, le travail géométrique porte sur le rectangle et son centre qui est obtenu à partir des milieux des côtés et non des diagonales en raison de leur longueur puis sur la construction d'un dodécagone régulier centré au centre du rectangle, ce qui est un beau travail au compas.

Le travail sur le grand rectangle (fond du drapeau final) est fait par l'enseignant après que les élèves l'aient fait au format A4.



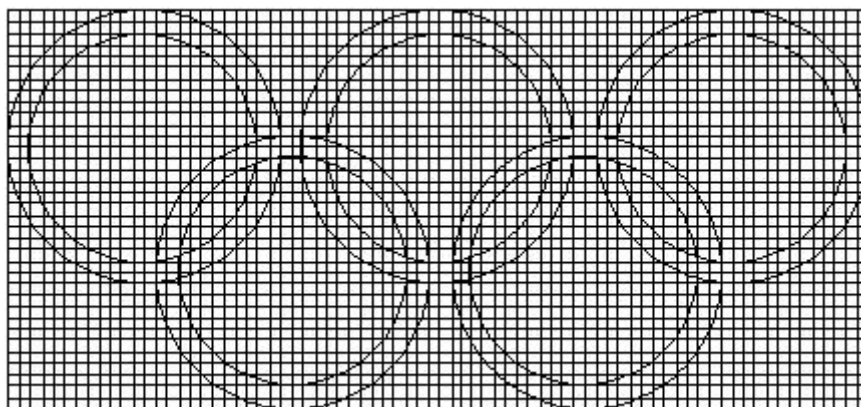
*** Construction des étoiles**

La construction retenue est celle de Mathäus Roriczer, dite de Dürer, un travail sur le cercle et la droite. Voir en Annexe 2.

b. Travail en classe :

Ce projet a en particulier été mené à bien dans une classe ayant un projet plus global de travail sur le thème de la Communauté européenne suivi d'un déplacement à Strasbourg.

5. Anneaux olympiques



Leur construction est un travail quasi exclusif de repérage sur quadrillage et de construction de cercles.

Pour la réalisation sur papier uni, il suffit de poser le quadrillage sur la feuille de papier uni et de percer aux centres des anneaux avec la pointe du compas.

Autant que je sache, ce projet n'a pas encore été utilisé en classe. Il pourrait l'être l'année des Jeux Olympiques.

6. Rosace



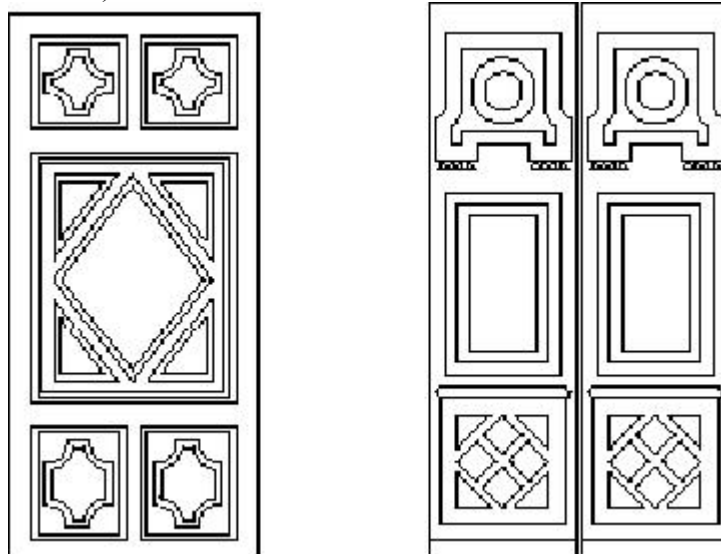
Ce projet peut être qualifié de local puisqu'il s'agit de la rosace qui se trouve au-dessus de la porte nord de la cathédrale de Mende.

D'un point de vue géométrique, on n'y trouve que des tracés circulaires s'appuyant pour certains sur des perpendiculaires.

Cette idée n'a pas encore servi.

7. Portes

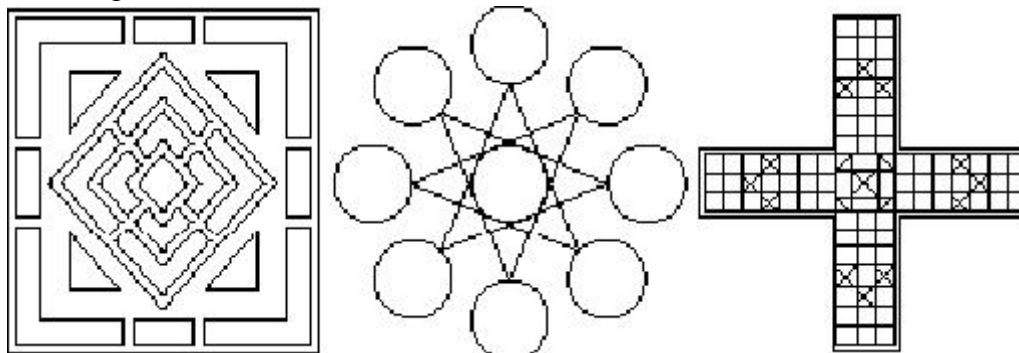
Second projet local, les portes anciennes sont très nombreuses et variées à Mende. Leur reproduction fait travailler les figures planes (rectangles, losanges, arcs de cercle...).



Le dessin des portes et surtout des moulures et formes qu'elles supportent est sans doute un peu compliqué. Diverses simplifications de tracé ont été étudiées et devraient servir bientôt.

8. Plateaux de jeu

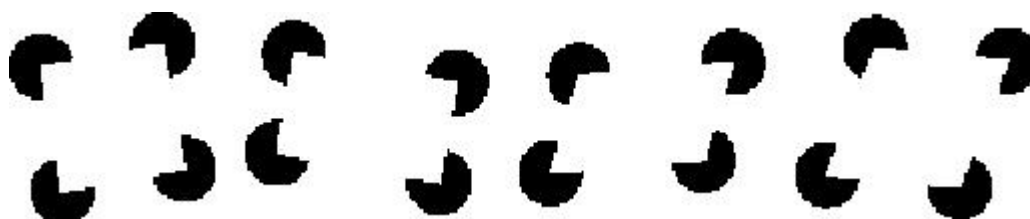
1. C'est un projet dans un CM2 autour de jeux à plateau dans différents pays.
Exemples :



Comme on le voit, leur construction fait travailler différents aspects de la géométrie.

2. La figure du milieu (Mu-Torere, Nouvelle-Zélande) a été utilisée en CM2 par des PE2 en pratique accompagnée cette année. Un des éléments importants de sa construction est le cercle sur lequel sont centrés tous les cercles périphériques.

9. Illusions de Gaetano Kanisza



Les constructions font travailler les quadrilatères usuels à partir de leurs diagonales.

10. Ballon de football

C'est une idée de Jean-Claude Rauscher émise pendant l'atelier. Ce ballon est un icosaèdre tronqué, constitué de 20 hexagones réguliers convexes et de 12 pentagones réguliers convexes, les deux types de polygones ayant tous leurs côtés de même longueur. Le patron est trop complexe mais les polygones réguliers peuvent donner lieu à des travaux pour une classe de CM. L'ouverture du compas peut même rester constante pour toutes les constructions si l'on choisit la même construction des pentagones qu'au I.4.

C'est un projet qui pourrait être envisagé pour une année de Coupe du monde de football.

II. MISE EN PLACE D'UNE SÉANCE DE TRAVAIL AVEC DES PE2

Le projet retenu par le groupe à cette séance de l'atelier fut le kaléidocycle.

1. Au cours de la première séance, un tour de différentes façons de tracer des droites parallèles à l'école (CM) a été évoqué :

Technique	Notion mathématique sous-jacente	Résultats et limitations	Conception du parallélisme
En utilisant un gabarit d'angle ou par double perpendiculaire (deux variantes d'une même technique).	Angles correspondants égaux	Mauvais	Locale dans la mesure où le parallélisme n'est pas une propriété des droites, mais une conséquence de la configuration locale des petits morceaux de droite obtenus.
À l'aide l'écart constant.	Rectangle	Mauvais	Plus ou moins locale
En construisant deux segments de même milieu.	Parallélogramme	Mauvais	Locale
En déplaçant l'équerre le long de la règle.	Angles correspondants égaux	Bons mais la technique est difficile à maîtriser	Locale
En s'appuyant sur les extrémités de deux segments de même longueur à supports parallèles (placés sur les bords opposés d'une feuille de papier).	Parallélogramme	Bon mais pose le problème des angles de la feuille	Moins locale

2. Au cours de la seconde séance, une longue discussion s'est engagée sur les tracés à l'aide d'une règle à bords parallèles³.

N'ayant aucune expérience de classe dans ce domaine, je ne peux en faire qu'une analyse a priori (analyse qui n'a pas été faite ce jour-là).

Technique	Notion mathématique sous-jacente	Résultats et limitations	Conception du parallélisme
En utilisant les bords opposés d'une règle à bords parallèles.	Parallélisme	Le tracé des droites ne doit pas être évident puisque pour un seul bord (tracé d'une droite quelconque) les élèves ont du mal à maintenir l'inclinaison du crayon tout au long du tracé. Simple si l'écart entre les droites est celui de la règle, nécessitant une technique particulière sinon.	Un peu moins locale, surtout si la règle est longue.

³ Pour des précisions et des techniques, voir l'article « La règle à bords parallèles » paru en 2000 dans le numéro 40 de la revue *Repères-IREM*.

3. Différentes phases du travail pour une séance de 2 h
 - a. À partir du solide, le kaléidocycle
Description pour arriver aux tétraèdres, nombre de faces, de sommets, d'arêtes, ce qui n'est pas simple.
Recherche d'un patron sans procéder à un découpage, ce qui peut être fait à partir des tétraèdres, à condition d'arriver à les « rattacher » les uns aux autres.
À disposition, du papier uni et les instruments de géométrie habituels.
La validation se fait en copiant la figure obtenue et en construisant le solide.
 - b. Reproduction du patron du I. 1.
Le patron est donné sur une feuille de papier A4. La consigne est de le reproduire sur papier uni avec les instruments de son choix sans décalquer.
Après un premier jet plus ou moins avancé, le point est fait sur ce qui a été utilisé pour faire cette construction (triangles, triangles isocèles, parallélogrammes, droites, angles de même mesure...).
 - c. Optimisation de la construction
Plus les tracés sont longs, plus précis ils peuvent être. D'où l'idée de travailler avec des droites et de chercher comment tracer des parallèles avec précision.
Ceci renvoie aux tableaux précédents et aux idées de chacun sur le parallélisme à l'école.

Annexe 1 : compte-rendu d'un PE2 du travail effectué en stage de pratique accompagné

Effectif : 17 élèves.

Objectif : l'enfant doit être capable de reproduire une figure avec rigueur et précision (mise en œuvre de la notion de parallèles).

SÉANCE 1, DURÉE 1 H 20.

But visé : déterminer la méthode de tracé la plus précise.

Ce qui a été atteint :

- constitution de la figure : triangles isocèles, tous isométriques, des parallélogrammes (rappel des propriétés des côtés) ;
- on retrouve des écarts constants (à différents endroits) ;
- les différentes directions de parallélisme.

Objectif : déterminer les éléments nécessaires à la construction de la figure : les parallèles et les écarts. Identifier les parallèles.

Matériel :

- 1 feuille photocopiée A4 avec les figures à reproduire pour chacun ;
- la même figure sur un transparent ;
- le matériel de géométrie et des feuilles de brouillon ;
- du papier quadrillé et du calque étaient prévus pour les élèves qui en demanderaient (ce qui n'a pas été le cas).

Déroulement : groupes de 2 à 3 élèves.

- a. Mise en scène sur le kaléidocycle : après expression écrite sur le mot kaléidocycle. Petite histoire et il est montré. Adhésion immédiate des élèves. C'est eux qui demandent à en fabriquer un.
- b. Recherche et essais par groupe. Ils ont conduit les élèves à :
 - décalquer,
 - essayer d'utiliser le rapporteur afin de respecter les angles,
 - mesurer les segments et les tracer mais sans respecter l'orientation (seulement au coup d'œil),
 - construire des triangles successifs (sans analyse de la figure),
 - tracer de proche en proche.

Aucun groupe n'a fait d'analyse sur la façon dont est construite la figure. De quoi est-elle constituée ? Aucune notion de parallèle.

- c. Mise en commun :

Chaque groupe vient présenter sa méthode qui est validée ou invalidée par le transparent.

Aucune figure n'est correcte. Les éléments non respectés sont mis en évidence et une explication du pourquoi est donnée (souvent un tracé pour réfuter, fait par le maître au tableau).

Il est ressorti de cette mise en commun qu'aucune des méthodes n'était correcte :

- mesurer oui, mais placer les segments au bon endroit ;
- décalquer : ça glisse ! (ouf ! ce n'est pas le but) ;
- le rapporteur, c'est trop compliqué.

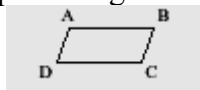
La question est alors posée : comment pourrait-on faire pour que ce soit exactement la même figure ?

La recherche des propriétés de la figure.

d. Recherche en groupe (2 et 3) (temps bref)

e. Mise en commun :

- faite de triangles « réguliers », isocèles, tous isométriques,
- chaque segment vertical mesure 5 cm,
- les sommets sont alignés,
- pas d'angle droit,
- des parallélogrammes donc comment les construire. Un dessin est



fait :

- rappel des propriétés des côtés : $(AD) \parallel (BC)$, $(AB) \parallel (DC)$, $AD = BC$ et $AB = DC$. Donc il faut respecter les mesures et les parallèles.

Puis des élèves viennent montrer les lignes parallèles de la figure (dans les trois directions).

Comptage des parallèles dans les trois directions (certains ne les avaient pas vues).

SÉANCE 2, DURÉE : 1 H.

Objectif visé : trouver une méthode simple (mesure des écarts) et tracer des parallèles.

Matériel :

- matériel de géométrie, brouillon A4 ;
- 1 ou 2 modèles dans chaque groupe ;
- le transparent pour vérifier.

Déroulement :

- a. Rappel collectif de l'activité en cours et de ce qui a été découvert la dernière fois.

J'écris au tableau les propriétés rappelées par les élèves :

- des triangles isocèles,
- des parallélogrammes.

Donc figure formée de parallélogrammes. Ils sont montrés sur la figure.

Il faudra tracer des droites parallèles ; il faudra aussi respecter les longueurs.

La définition de droites parallèles est rappelée.

- b. Essais des élèves. La plupart cherchent des éléments en groupe mais chacun trace sa propre figure.

Ce qui ressort de cette recherche :

- les élèves sont très actifs, ils essaient de bien faire (condition nécessaire au bon fonctionnement du kaléidocycle) ;
- tracés de proche en proche ;

- positionnement de la règle et tracé des parallèles au coup d'œil (imprécision) ;
 - prise de mesures pour les segments ;
 - mesures de l'écart des parallèles mais la règle n'est pas perpendiculaire à ces parallèles ;
 - certains essaient d'utiliser le compas ;
 - prise de repères par rapport aux éléments de la figure.
- c. Mise en commun :
- Les groupes expliquent leur méthode au tableau. On invalide.
Le problème se pose alors de bien tracer des parallèles (fait par le maître au tableau).
Peut-on l'envisager pour cette figure ? Non, c'est trop long et risque d'erreurs par utilisation répétée de l'équerre.
Comment faire ? Comment utiliser la figure à reproduire ?
Apport adulte : il faut prolonger les segments de la figure.
- d. Chaque élève prolonge les segments sur son modèle jusqu'aux bords de la feuille.
- e. Collectivement : on va maintenant utiliser ces droites parallèles (ce sera pour le lendemain).

Remarques :

- un obstacle de taille qui tombe fort mal à propos pendant la séance : la photocopieuse déforme la figure de départ ! Photocopies sur papier et transparent ne sont pas superposables !
- prolonger les traits présente des difficultés (positionner la règle, le crayon...) et conduit à des erreurs.

SÉANCE 3

Objectif visé : être capable de mesurer des écarts⁴ précis et de tracer des droites parallèles (passant par deux points)

- Mesurer et reporter les écarts sur la feuille,
- tracer les parallèles en passant par les points.

Matériel :

- un agrandissement de la figure avec les traits prolongés pour le tableau,
- photocopies de cet agrandissement avec les segments prolongés pour chaque élève,
- matériel de géométrie.

Déroulement :

- a. Rappel collectif de ce qui a été découvert la veille (relancer l'intérêt, on touche au but).
Présentation de l'agrandissement avec les traits prolongés + languettes.
Que remarque-t-on ? Des languettes, c'est un patron, pour coller.

⁴ Il s'agit de longueurs de segments.

Trace au tableau : pour tracer la figure, il faut :

- tracer les parallèles,
- mesurer les écarts.

- b. Préciser que l'on va procéder petit à petit : dans un premier temps, on ne va tracer que les parallèles verticales.

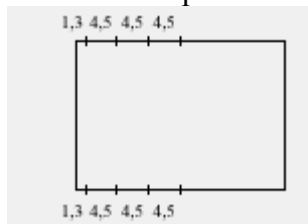
On détermine ensemble une démarche à suivre :

- mesurer sur le modèle (au bord),
- reporter sur la feuille,
- joindre les points.

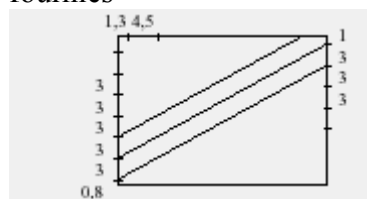
- c. Tracés des élèves

Il y a des problèmes : les mesures sont différentes d'une photocopie à l'autre et surtout sur une même photocopie (on trouve 4,4 ; 4,5 ; 4,6...)

- d. Rectification pour les mesures : tout le monde adopte les mêmes



- e. Le travail est étendu aux parallèles obliques (d'abord dans un sens), mesures fournies



Dans cette séance, les élèves les plus avancés n'auront pas le temps de tracer les obliques parallèles.

Remarques :

Cette séance a mis en évidence bon nombre d'obstacles supplémentaires quant à l'utilisation du matériel géométrique par les élèves.

De même pour la signification des tracés (voir séance 4).

SÉANCE 4

Objectifs :

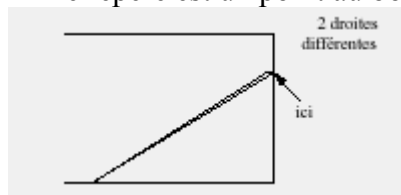
- remédier aux problèmes (obstacles répertoriés pendant la séance et sur les productions des élèves),
- tracer les parallèles obliques.

Matériel :

- les productions des élèves,
- matériel géométrique dont quelques règles de 40 cm (pour les obliques),
- les photocopies de la figure modèle (cf. séance 3),
- une liste ou un tableau récapitulatif contenant des éléments sur l'avancée de chaque élève, sur leurs erreurs... (des élèves vont en aider d'autres).

Déroulement :

- a. Rappel activité en cours et avancée générale du travail.
Faire part des remarques constatées, en général, sur les productions : des problèmes rencontrés qui sont étonnants au CM1.
- b. Exploitation de ces points collectivement :
 - utilisation de la règle : on mesure à partir du 0,
 - 4,5 cm, c'est différent de 4 cm ! Mais aussi de 4,4 cm (c'est plus difficile),
 - quand on place 2 points, il faut mettre la règle de manière à ce qu'elle passe par ces deux points (penser à tourner la feuille !),
 - les repères sont au bord de la feuille car si la règle est oblique il y a des erreurs (leur faire un dessin),
 - le repère est un point au bord de la feuille :



- c. Remarques : autres obstacles rencontrés :
 - la tenue du crayon,
 - crayon pas assez pointu,
 - l'inclinaison du poignet change, donc ils font des « vagues »,
 - règles en mauvais état.
- d. Présentation du travail :
 - des élèves aident les autres,
 - des élèves travaillent de manière autonome (puis aident)
 - des élèves sont aidés par les autres.

Le but est d'arriver à une même avancée pour tous.

- e. Chacun finit le tracé des parallèles dans un sens
Puis explication collective des tracés des autres obliques : passer par les intersections avec le modèle sous les yeux.
Remarques : un dessin au tableau avec des couleurs aurait été plus explicite pour certains élèves. Fin du patron pour certains élèves.

SÉANCE 5, DURÉE 25 MIN (EN DEMI-GROUPE EN PARALLÈLE AVEC L'ANGLAIS)

Objectifs :

- savoir identifier une figure complexe dans un réseau de triangles,
- savoir découper avec précision.

Matériel :

- a. les productions des élèves,
- b. une feuille « récapitulatif des tracés » fin séance 4,
- c. matériel géométrie, ciseaux,
- d. les modèles en photocopie dont 15 sont avec des couleurs (bords figure en rouge, pliage dans les deux sens en bleu, languettes en vert).

Déroulement :

- a. Groupes ayant fini les tracés :
 - retrouver les bords de la figure en rouge dans leur production,
 - repasser les traits en bleu,
 - dessiner les languettes au crayon,
 - découpage minutieux pour les plus avancés.
- b. Enfants en retard :
 - finir les tracés sous le regard de l'enseignant,
 - passer au a .

SÉANCE 6

Objectif :

- savoir plier selon les parallèles,
- savoir fermer le patron et coller (scotch) avec précision.

Remarque : des difficultés avec les obliques et la précision.

Matériel :

- ciseaux,
- scotch,
- feutres pour les derniers (règle, crayon).

Déroulement :

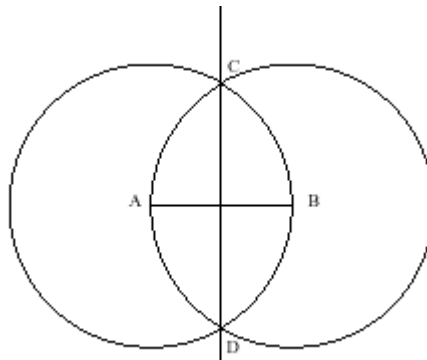
Je les ai pris par groupe de 3 pendant la séance d'expression écrite afin de :

- terminer la figure pour un ou deux élèves,
- découper,
- plier selon les trois directions de parallèles (remarque : ce n'est pas si facile que ça),
- coller avec le scotch et souvent arranger en trichant un peu aux ciseaux, en collant pour que les figures tournent mieux.

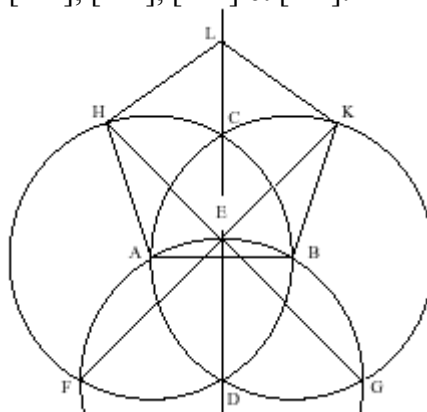
Remarque : on aurait dû faire un agrandissement des productions des élèves de A4 en A3 puis les couleurs.

Annexe 2 : construction approchée d'un pentagone régulier convexe due à Matthäus Roriczer (1487 ou 1488)

1. Placer deux points A et B.
2. Prendre une ouverture de compas donnant le côté du pentagone à construire ([AB], conserver cette ouverture pour toutes les constructions qui suivent).
Tracer le cercle de centre A et le cercle de centre B.
Ils se coupent en C et en D.
3. Tracer la droite (CD).



4. Tracer le cercle de centre D. Il passe par A et par B. Il coupe le segment [CD] en E.
Il coupe le premier cercle en F et le deuxième en G.
5. La demi-droite portée par (EF), d'origine E et ne contenant pas F coupe le deuxième cercle en K.
6. La demi-droite portée par (EG), d'origine E et ne contenant pas G coupe le deuxième cercle en H.
7. Le cercle de centre K coupe la demi-droite portée par (CD), d'origine C et ne contenant pas D en L.
8. Tracer les segments [LK], [KB], [BA], [AH] et [HL].



On obtient ainsi les pentagones : ABKLH (convexe) et AKHBL.