

# DEUX PROBLÈMES POUR PENSER LA QUESTION DES RAPPORTS ENTRE MATHÉMATIQUES ET RÉALITÉ

**Viviane Durand-Guerrier**

IUFM de Lyon, LIRDHIST UCBLyon 1 & IREM de Lyon

## Résumé :

Il s'agissait dans cet atelier de proposer aux participants de résoudre deux problèmes, l'un sous la forme du dispositif du problème ouvert, l'autre sous la forme du débat scientifique ; d'en faire émerger un certain nombre de questions concernant le rapport entre mathématiques et réalité ; de proposer quelques résultats obtenus auprès des professeurs d'école en formation ; et pour finir d'essayer de dégager ce qui, dans chacune de ces deux situations, est porteur d'un questionnement didactique.

## I LES SOLIDES DE PLATON

### I.1 Présentation de la situation

Les solides de Platon sont des objets ayant une valeur culturelle certaine et on les trouve parfois proposés dans certains manuels de cycle 3 avec la propriété remarquable qu'ils sont au nombre de cinq exactement. Ce résultat est en général cependant peu connu des professeurs d'école stagiaires, et lorsqu'il l'est les arguments permettant d'affirmer ce résultat ne sont en général pas disponibles. Nous avons donc là a priori un bon candidat pour un problème ouvert que je propose depuis plusieurs années en formation aux professeurs d'école stagiaires ainsi qu'aux professeurs stagiaires de l'AIS sous la forme indiquée ci-dessous (figure 1.) en respectant le dispositif problème ouvert (Arsac et al. 1989). Naturellement, la résolution de ce problème à l'intérieur de la géométrie euclidienne dépasse très largement le niveau de mathématiques requis pour l'exercice du métier de professeur d'école, ce qui rend nécessaire de considérer que la solution du problème va mobiliser des éléments extérieurs aux théories mathématiques. Dans l'organisation de la situation, nous mettons à la disposition des participants du matériel permettant de faire et défaire facilement des solides : polygones en plastique avec procédés d'articulation type Polydron ou Clixix que l'on trouve assez souvent dans les écoles maternelles. Nous proposons également règles, compas, ciseaux, équerre ....

C'est ce dispositif que nous avons proposé aux participants de l'atelier d'Avignon. Il y avait treize participants répartis en quatre groupes.

### Résolution de problème en géométrie

*Un polyèdre est un solide délimité par des faces planes.*

*Un polyèdre régulier est un polyèdre convexe dont les faces sont des polygones réguliers deux à deux superposables tels que à chacun des sommets correspond un même nombre de faces.*

*Déterminer tous les polyèdres réguliers*

1. Résoudre le problème
2. Faire une affiche présentant vos résultats, leur justification, la démarche de résolution et les difficultés éventuelles.

**Figure 1. le texte du problème ouvert de géométrie**

## I.2 Eléments recueillis dans le cadre de l'atelier

Je rapporte ci-dessous les éléments principaux qui se sont dégagés lors de la mise en commun en ce qui concerne la résolution du problème<sup>1</sup> :

Un premier groupe fait état des questions qu'ils se sont posées : faut-il construire ? trouver une méthode ? prouver l'existence ? et propose trois types de procédures : 1. à partir des triangles , partir de la pyramide régulière, imaginer d'autre solides , y compris non réguliers, en augmentant le nombre de faces ; 2. travailler à partir du type de faces ; 3. utiliser des symétries par rapport à un plan, en remarquant que, à part pour l'octaèdre, un tel plan n'est pas matérialisé par les arêtes.

Un deuxième groupe fait état d'une résolution qu'il qualifie d'empirique : 'concernant tout d'abord le triangle se posent plusieurs questions : comment prouver l'existence, l'unicité, pourquoi y a t-il un nombre fini de solutions, comment on le sait ? On regarde ce qui se passe au niveau du sommet : on le voit complètement, on déplie les faces de base sur un plan, on rajoute une face (4), puis un autre (5) ; avec six faces on obtient un plan et avec sept ça se chevauche. Les angles sont égaux, pour plier il faut au moins trois faces, il faut que ça soit inférieur à  $360^\circ$ . On peut voir sans construire et faire une vérification expérimentale. Avec le carré :  $90 \times 3 = 270$  ;  $90 \times 4 = 360$  , donc un seul ; avec le pentagone :  $108 \times 3 < 360$  ; on peut peut-être le construire ; avec un hexagone,  $120 \times 3 = 360$ , C'est impossible.

Comment contrôler l'existence sans construire ?' Un groupe dit avoir recherché une méthode expérimentale permettant de montrer que les polyèdres sont faisables ; ils ont établi qu'il faut au moins trois faces pour avoir un sommet et que on peut le faire jusqu'à 6-1 pour les triangles, 4-1 pour les carrés etc.

A la question des difficultés prévisibles pour des professeurs stagiaires, les participants ont envisagé :

1. des difficultés pour comprendre la consigne, en particulier l'expression « deux à deux superposables »;

<sup>1</sup> A partir de mes notes et de celles prises par Catherine Houdement que je remercie.

2. la possibilité que certains n'osent pas manipuler ;
3. des confusions entre espace et plan ;
4. des hypothèses erronées, par exemple qu'il y a autant de faces que de sommets ;
5. des difficultés à inférer des informations à partir des manipulations.

### **I.3 Eléments recueillis dans diverses situations de formation**

Lors des observations que nous avons pu conduire en formation, la difficulté à interpréter l'expression « deux à deux superposables » apparaît très régulièrement, avec l'interprétation selon laquelle ce sont les faces opposées qui doivent être superposables. Le refus de manipuler apparaît rarement chez les professeurs stagiaires, parfois chez les professeurs titulaires. On observe cependant des comportements variables entre ceux qui explorent le problème directement avec le matériel et ceux qui cherchent à résoudre dans l'environnement papier crayon avant de confronter leurs hypothèses avec le matériel, mais d'une manière générale, la nécessité de recourir au matériel apparaît généralement assez vite, ceci d'autant plus facilement que le matériel est disponible.

Concernant le point de 3., la situation précisément pose la question de la relation entre espace et plan, puisqu'en effet l'impossibilité de réaliser un polyèdre régulier avec des faces hexagonales est liée intrinsèquement au fait que l'on peut paver le plan avec des hexagones réguliers isométriques. C'est là que se trouve le plus souvent le point nodal dans la situation. En effet, une conjecture fréquemment faite par les professeurs stagiaires est qu'il doit y avoir une infinité de polyèdres, un pour chaque type de polygone régulier. Dans ce cas, la confrontation avec la « réalité » est cruciale ; il n'est pas rare de voir des groupes argumenter pour savoir s'il est possible ou non de réaliser un polyèdre avec les hexagones. La possibilité est soutenue par le fait que le matériel n'étant pas absolument rigide, il est possible d'obtenir une courbure, ce qui peut laisser croire que si on avait suffisamment d'hexagone, on réussirait à réaliser un polyèdre. Cependant, dans cette situation, les rétroactions du « réel » sont suffisamment fortes pour créer a minima le doute, et dans la plupart des cas permettre une remise en cause des conjectures erronées. En effet, dans la plupart des cas, les participants finissent par s'accorder sur le fait qu'il est impossible de réaliser un polyèdre régulier à faces hexagonales car dans ce cas, on reste dans le plan<sup>2</sup>. Se pose alors la question de savoir pourquoi il en est ainsi ; la réponse est en général cherchée du côté des mathématiques, et non pas du côté des contraintes du réel. Du point de vue de l'évolution de la situation mathématique, nous avons là un élément moteur. En effet, ceci permet de mettre en relation le phénomène observé et les résultats sur les angles, ce qui en retour permet de faire des prédictions sur les polyèdres qu'il devrait être possible de construire, en mettant en oeuvre des procédures exhaustives du type de celles mentionnées plus haut. Le plus souvent, c'est seulement à ce moment-là que l'icosaèdre, obtenu en associant cinq triangles équilatéraux par sommet, est envisagé. Il reste alors à vérifier expérimentalement que l'on peut en effet réaliser tous les polyèdres que les contraintes repérées permettent d'envisager.

Lors de la mise en commun, on peut alors stabiliser le résultat suivant : pour obtenir un sommet, il faut au minimum trois faces et il est nécessaire que la somme des angles au sommet ne dépasse pas  $360^\circ$ . Ces deux conditions apparaissent comme les éléments minimaux d'un modèle géométrique dans lequel on pourrait rendre compte du « fait matériel » : il y a exactement cinq polyèdres réguliers ».

---

<sup>2</sup> On retrouve dans cette situation des éléments de la situation du « triangle aplati » étudié dans Arsac et al. 1989

#### **I.4 En guise de conclusion**

On se trouve ici, selon moi, dans une perspective de modélisation au sens de Sensevy & Mercier (1999) qui écrivent « Assimiler une culture des « modèles » c'est donc se rendre capable de considérer le modèle, non dans un rapport mimétique à la réalité (...); mais comme un système de signification susceptible de nous apprendre des choses sur la réalité, et par là même, de nous rendre susceptible d'agir sur elle. (...) ». En effet, le recours au modèle mathématique que constitue ici la géométrie euclidienne, dans une perspective minimaliste, permet de rendre compte des phénomènes observés, de faire des prédictions sur le réel et nous donne des indications pour agir afin de confronter ces prédictions au réel. Ceci relève de ce qu'on appelle dans les programmes de l'école élémentaire la démarche scientifique et fournit un exemple de ce que peut être une démarche expérimentale en mathématique.

---

## **II LE CYCLISTE**

---

### **II.1 Présentation de la situation**

La situation du cycliste est empruntée à Marc Legrand <sup>3</sup>qui l'utilise, dans le cadre du débat scientifique à l'université, pour introduire l'intégrale. En ce qui me concerne, je l'utilise en formation tant auprès de professeurs d'école stagiaires que de professeurs de mathématiques de collège et de lycée en formation continue, avec des ambitions plus modestes sur le plan des concepts mathématiques convoqués, mais pour sa richesse quant aux questions qu'elle permet de poser sur les rapports entre mathématiques et réalité. Je la propose en général sous la forme du débat scientifique (Legrand 1993) et c'est sous cette forme qu'elle a été proposée dans l'atelier. Le problème est introduit par le texte de la figure 2.

---

<sup>3</sup> Legrand, M. Le cycliste, (non publié, cassette vidéo IREM de Lyon, transcription IREM de Grenoble) et Legrand & al, 2003, pp.23-24

**Un cycliste monte un col à la vitesse de 21km/h. Arrivé au sommet, il redescend aussitôt par le même trajet à la vitesse de 63km/h.**

***Quelle est la vitesse moyenne de ce cycliste sur l'aller-retour ?***

Ce problème a été proposé à des élèves de collège qui ont donné les réponses suivantes :

28km/h      30km/h      31,5km/h      42km/h

Enfin, certains élèves ont répondu qu'on ne pouvait pas répondre à la question.

*Quelle est selon vous la bonne réponse à la question posée ? Indiquez votre réponse sur le bulletin qui vous a été remis.*

**Figure 2. la présentation du problème du cycliste**

Après un court temps de réflexion, les participants sont invités à répondre à la question sur un bulletin de vote anonyme. Ceci a pour fonction de permettre à chacun de proposer une réponse et d'en favoriser le décompte. En général, la réponse majoritaire est la réponse 42km/h qui correspond à la moyenne arithmétique ; la réponse « on ne peut pas répondre à la question » apparaît également très fréquemment ; les trois autres valeurs apparaissent plus rarement. Ceci permet d'engager un débat entre les participants. Certains sont d'emblée convaincus que la vitesse moyenne est, dans ce cas, indépendante de la distance et du temps de parcours mais ne sont en général pas capable dans un premier temps de l'argumenter ( ceci correspond à une preuve intellectuelle au sens de Balacheff (1987). D'autres au contraire ne voient pas pourquoi cela serait indépendant et en l'absence d'arguments réfutent ce résultat. Si personne ne propose alors de faire les calculs pour plusieurs valeurs de la vitesse de descente, je fais la proposition au groupe. Les résultats d'une part montrent que la valeur 42 ne convient pas, d'autre part permettent de faire la conjecture que le résultat est bien indépendant de la distance et du temps de parcours et vaut 31,5. Il reste alors à prouver ce résultat et pour certains à expliquer cette indépendance inattendue. Certains participants s'engagent dans des calculs algébriques, d'autres cherchent des résultats de type arithmétique, voire même graphique. Une fois le résultat établi, je pose aux participants la question subsidiaire suivante : *à quelle vitesse le cycliste devrait-il descendre pour que sa vitesse moyenne sur l'aller-retour soit de 42km/h ?*. nous procédons alors à un nouveau vote. Les réponses se partagent en général entre 84 km/h, *c'est impossible*, et dans une proportion non négligeable *je ne sais pas répondre*. La réponse 84km/h obtenu par analogie avec le fait que 31,5 est la moitié de 63 est facilement réfutée ; il suffit de faire le calcul pour voir que cela ne convient pas. Un nouveau débat s'engage alors entre ceux qui refusent que ce soit impossible et ceux qui le soutiennent, le plus souvent en s'appuyant sur les formules littérales obtenues lors de la première phase de l'activité. On peut alors réinterroger le modèle mathématique adopté pour résoudre le problème en se demandant s'il est encore valable dans une situation limite où le résultat proposé est en désaccord avec l'intuition. Pour s'en convaincre, on va chercher un argument à l'extérieur des mathématiques : pour atteindre une vitesse moyenne de 42 km/h, il

faudrait arriver en bas du col au moment même où on arrive au sommet, ce que les cyclistes montagnards savent bien d'ailleurs !

## **I.2 Quelques éléments du débat au sein de l'atelier**

Les réponses spontanées données par les participants reflètent la diversité rencontrée en formation, mais on peut faire l'hypothèse que certains participants connaissant la réponse ont joué le jeu du « non expert ». Les échanges ont alors porté sur le type de réponse que l'on pouvait attendre, ce qui a donné lieu à une grande variété : divers types de calcul littéral selon ce que l'on choisit d'introduire la distance, le temps de montée, le temps de descente ..., utilisation de la moyenne harmonique qui est une solution experte lorsque elle est connue, utilisation de tableaux, utilisation de graphiques, raisonnement de type arithmétique en langue naturelle. Lorsque l'on introduit la distance  $d$  dans le calcul littéral, le déroulement du calcul « montre » que la distance ne joue aucun rôle puisqu'on simplifie par  $d$  ; ceci permet de mettre en évidence l'efficacité d'un traitement littéral pour traiter la question de la généralité. A la question subsidiaire, on retrouve aussi la variété habituelle des réponses. Il faut noter que la formule de la moyenne harmonique<sup>4</sup> permet de trouver par le calcul que c'est impossible, alors que les calculs plus classiques induisent facilement la réponse erronée 84 km/h. Certains participants ont fait remarquer qu'il est bien connu qu'il est difficile d'envisager qu'en mathématique, un problème soit impossible.

## **II.3 Quelques caractéristiques de cette situation**

Cette situation relève d'une catégorie de problèmes que l'on pourrait qualifier de pseudo-concrets, puisqu'en effet, on a déjà fait un premier travail de simplification en éliminant « ce qui se passe au col » ; toutefois la question posée - la valeur de la vitesse moyenne - est une question relativement pertinente vis à vis de la situation de la vie courante évoquée, qui permet d'envisager un contrôle de la vraisemblance des résultats proposés par un recours à cette situation évoquée. Sur le plan mathématique, un premier résultat remarquable dans la perspective de la formation des professeurs d'école est que nous avons une illustration de ce qu'il est illusoire de prétendre déterminer « à coup sûr » les données nécessaires à la résolution d'un problème avant d'avoir résolu ce problème. Un deuxième résultat est de montrer que la question de la généralité peut se traiter de plusieurs manières, et pas seulement par du calcul littéral, mais que celui-ci fournit des outils de contrôle, donne à voir et rend explicites certaines relations et propriétés et permet de faire des prédictions sur le « réel ». Or ceci est un enjeu important de l'enseignement des mathématiques dans l'articulation école élémentaire/collège. Sur le plan didactique, nous avons ici un exemple éclairant de ce qu'est un théorème en acte au sens de Vergnaud (1991). En effet la réponse majoritaire 42km/h provient de l'application du théorème en acte suivant : « *la vitesse moyenne s'obtient en divisant par deux la somme des vitesses* ». Ce théorème en acte a un domaine de validité étendu puisqu'il s'applique lorsque l'on considère des intervalles de temps égaux. Mais utilisé en dehors de son domaine de validité, il conduit à des résultats en contradiction avec les données de la situation. Dans le cas du cycliste, la

---

<sup>4</sup> La moyenne harmonique de deux nombres réels non nuls  $a$  et  $b$  est le nombre réel  $c$  défini par  $\frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ .

confrontation ne se fait pas directement avec le monde réel, mais avec une situation évoquée et, contrairement au problème des solides de Platon, le problème peut se traiter à l'intérieur des mathématiques. Cependant, comme on l'a vu plus haut, le modèle mathématique mobilisé peut être remis en question si les résultats qu'il produit heurtent l'intuition<sup>5</sup>. Enfin, ce problème permet de travailler également des concepts mathématiques plus élaborés. Nous avons déjà vu que Marc Legrand l'a introduit pour travailler l'intégrale ; on peut également l'utiliser pour travailler la notion de limite et d'asymptote puisqu'en effet, si on considère la fonction qui pour une vitesse de montée de 21km/h associe la vitesse moyenne à la vitesse de descente, on obtient une fonction homographique dont la limite en  $+\infty$  est 42 km/h et dont la représentation graphique admet la droite d'équation  $y = 42$  comme asymptote. Di Martino (2002) décrit également une utilisation de ce problème en seconde en entrant directement par ce que j'ai appelé la question subsidiaire.

---

## CONCLUSION

---

Je voudrais conclure sur quelques éléments de réflexion qui guident l'institutionnalisation que l'on peut faire à l'issue de ces situations en formation initiale ou continue, en sachant que, en formation, il est toujours demandé aux stagiaires d'envisager une situation pour des élèves d'un niveau donné (ici, dans les deux cas, la fin du cycle 3) s'appuyant sur les caractéristiques repérées de la situation travaillée. En outre, la situation du cycliste permet d'introduire en formation les concepts nécessaires pour étudier la situation du puzzle (Brousseau 1998).

La première concerne ce que l'on appelle parfois conceptions (voire *misconceptions*) qui peuvent se manifester par des théorèmes en acte : ce sont des connaissances du sujet qui ont un certain domaine de validité et qui, utilisées en dehors de leur domaine de validité, peuvent conduire à des résultats et/ou des raisonnements erronés. En situation de résolution de problème, la reconnaissance de l'erreur est le moteur de la poursuite de la recherche : or pour reconsidérer son résultat, il faut en douter sérieusement et pour abandonner une procédure qui a fait ses preuves dans de nombreuses situations, il faut avoir une bonne raison de le faire. Les situations permettant des rétroactions fortes du côté du réel, matériel ou évoqué, favorisent ce questionnement.

La deuxième concerne la modélisation mathématique des problèmes « concrets » ou « pseudo-concrets ». La mobilisation d'outils mathématiques est une aide à la résolution du problème, qui *devient* un problème de mathématiques et cette exploration du problème permet un approfondissement des notions mathématiques en jeu ; ceci n'est pas exclusif d'autres types de raisonnement. Il faut alors « rendre des comptes au réel ». On ne peut pas faire n'importe quoi ; les mathématiques sont *autonomes*, mais leur rapport au réel ne l'est pas. Autrement dit, si l'utilisation d'un modèle mathématique pour un problème concret permet de faire des prédictions sur le comportement du réel, il faut cependant s'assurer que l'on reste dans le domaine de validité du modèle. En effet, dans toute modélisation, on abandonne une partie des paramètres de la situation, et parmi ceux-ci certains pourraient être cruciaux dans des situations limites. Ce va et vient entre modèle et réalité aide à construire un rapport idoine aux mathématiques à ce niveau d'enseignement et favorise le développement de compétences nécessaires à la conduite des raisonnements mathématiques.

---

<sup>5</sup> Ceci apparaît clairement dans Di Martino, 2002 pp. 9-10

A l'école élémentaire, et même encore au collège, une partie importante de l'activité mathématique relève de ce paradigme : en d'autres termes, la *décontextualisation* doit être progressive. L'organisation de situations didactiques, comportant des phases d'action, de formulation, de débat, de validation et d'institutionnalisation s'appuyant sur les concepts de variable didactique et de contrat didactique (Brousseau 1998) permet de relever ce défi.

Je terminerai en disant que, pour moi, ces deux situations illustrent ce que peuvent être des situations de formation articulant les dimensions mathématique, épistémologique et didactique dans la perspective du développement de compétences professionnelles essentielles pour l'organisation des situations d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques à l'école élémentaire, et au-delà. C'est ceci que j'ai souhaité partager et mettre en débat lors des deux sessions de cet atelier. Il est clair au vu des échanges que la question de la nature des relations entre mathématique et réalité fait l'objet de débat, ce qui renvoie à la question de savoir si les mathématiques comportent ou non une dimension expérimentale<sup>6</sup>.

---

## RÉFÉRENCES

---

- Arsac, G. & al. 1989 *Initiation au raisonnement déductif au collège*. Presses Universitaires de Lyon ; IREM de Lyon
- Balacheff, N. 1987 Processus de preuves et situation de validation in *Educational Studies in Mathematics* 1 1/2 pp.147-176
- Brousseau, G. 1998 *Théories des Situations Didactiques*. La Pensée Sauvage
- Di Martino, H. 2002 Comment ça s'écrit, Lire, écrire, interpréter des expressions algébriques en seconde in *PetitX* n°59. IREM de Grenoble, Université Joseph Fourier. pp.5-22
- Durand-Guerrier, V. 2004 Enseigner les mathématiques à l'école élémentaire. Un défi à relever. *La Gazette des mathématiciens* n°99 41-44
- Légrand, M. 1993 Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse in *Repère-IREM* n°10 Topiques Editions pp ;123-158
- Légrand, M. & al. 2003 A la recherche d'une cohérence pour une véritable activité mathématique en classe, in *Faire des maths en classe ?*, coord. Jacques Colomb, Jacques Douaire et Robert Noirfalise. INRP/ADIREM. pp. 13-51
- Mercier, A. & Sensevy, G. Pourquoi faire encore des mathématiques à l'école *Le Télémaque* n°15- Enseigner les sciences- mai 1999 pp.69-78
- Vergnaud, G. (1991) La théorie des champs conceptuels. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 10/2.3 133-169

---

<sup>6</sup> Ces questions sont abordées dans Durand-Guerrier 2004.