A.R.M. & TABLE ARITHMÉTIQUE NATURELLE

Jean-Noël Manouba
P.E. École de Bonneveine 2 à Marseille
jnmanouba@club-internet.fr

Pierre Eysseric
Formateur à l'I.U.F.M. d'Aix-Marseille
p.eysseric@aix-mrs.iufm.fr

Résumé :

Les participants ont eu l'occasion de vivre le début d'un A.R.M. (Atelier de Recherche en Mathématiques) en référence au dispositif présenté par P. Eysseric au cours des colloques de St.-Étienne et Limoges : cf. actes ou sur Internet : http://perso.club-internet.fr/peysseri/DOCUMENTS/ARM/Atelier221APMEPNICE2000.htm.

Le sujet de recherche proposé a été celui de la Table Arithmétique Naturelle : une table numérique mise au point par J.N. Manouba et expérimentée depuis octobre 2001 avec ses élèves de cycle 3 de l'École Freinet Bonneveine 2.
(sur Internet : http://www.structureimaginaire.com).

Le travail s'est déroulé en petits groupes à partir de ce support. Il s'agissait tout d'abord d'observer la T.A.N. puis de commencer à explorer quelques pistes de recherche.

Celles-ci furent alors présentées et discutées collectivement (phases 1 à 3 du dispositif A.R.M.). Nous avons également essayé d'imaginer ensemble les recherches en mathématiques envisageables à partir de ce support pour des élèves de différents niveaux (élémentaire et secondaire).

L'atelier s'est poursuivi par une présentation par J.N. Manouba de quelques travaux réalisés dans ses classes avec la T.A.N. et d'autres tables arithmétiques.

En mode de conclusion a eu lieu un débat et un bilan personnel des participants autour du potentiel disciplinaire et de recherche de ces tables.

Conseil au lecteur du présent article :

Avant de lire cet article et si vous ne la connaissez pas encore, prenez le temps d'observer la T.A.N. (**T**able **A**rithmétique **N**aturelle, voir page suivante) et de réfléchir par vous même à toutes les possibilités qu'elle offre au niveau de la structuration arithmétique et ce, principalement pour deux raisons :

- Il a fallu à la plupart des personnes qui s'y sont intéressées un certain temps (de quelques dizaines de minutes à plusieurs heures) pour se l'approprier ce qui est infiniment mieux que d'en accepter les principes et potentialités dans la mesure où elle offre un angle de vue original et profond de l'arithmétique.
- l'originalité et la simplicité de la Table en font un support visuel propre à l'observation : c'est un ostensif mathématique puissant.

I - COMPTE RENDU DU DÉROULEMENT DE LA PARTIE « RECHERCHE »

I - 1. L'introduction

Un sujet de discussion a été proposé en introduction quant à la place de la recherche au niveau de la structuration des connaissances mathématiques :

- apprendre à chercher est-il un objectif à part entière des programmes, auquel il est légitime de consacrer des séances spécifiques dans lesquelles les contenus mathématiques passent au second plan ? (Les savoirs mathématiques ne sont pas absents, mais ils ne constituent pas l'objectif principal de la séance. Le contenu mathématique auquel la recherche aboutit peut même dans certains cas ne pas avoir été anticipé par l'enseignant, voire se situer en dehors du programme. Mais lorsque les résultats de la recherche coïncident avec un savoir au programme de la classe, on revient sur ceux-ci et on les institutionnalise au cours d'une séance spécifiquement consacrée à ce savoir.)
- ou bien peut-on ou doit-on mener l'apprentissage de la recherche conjointement aux apprentissages disciplinaires sous-jacents dont elle permet de révéler les contenus ? (Apprendre à chercher est alors un objectif présent dans toutes les séances d'apprentissage ou tout au moins dans certaines phases de celles-ci. On apprend à chercher en travaillant sur les savoirs mathématiques inscrits au programme de la classe. Ce point de vue exclut toute recherche mathématique débouchant ou pouvant déboucher sur un contenu mathématique hors programme.)

Pierre Eysseric a défendu le premier point de vue. Quelques participants se sont manifestés dans un sens comme dans l'autre. Il a été convenu de revenir à la fin de l'atelier sur cette question qui renvoie à la distinction faite entre *sujet de recherche*, *problème de recherche* et *phase de recherche d'une situation d'apprentissage* dans « Le plaisir de chercher » (Repères IREM n°35 – avril 99, pages 23-38).

La consigne de travail a porté sur trois types d'observation/ réflexion :

- Chercher à son niveau d'expertise les apports numériques et opératoires de la T.A.N. : *découvrir la T.A.N. avec ses yeux et son esprit.*
- Imaginer les recherches en mathématiques envisageables à partir de ce sujet pour des élèves aux différents niveaux de l'école élémentaire et du collège : *penser la T.A.N. comme point de départ d'activités de recherche.*
- Réfléchir au processus ayant amené une classe de CE2 à construire une telle table haute en couleurs : *penser la T.A.N. comme aboutissement d'activités de classe.*

I - 2. Le travail de recherche

En investissant la partie de la salle où la TAN (dimensions : 1 m x 6 m) était installée à même le sol, les participants se sont réellement mis en situation de recherche tels des archéologues essayant de remonter le temps pour mieux comprendre ce qui avait pu amener de jeunes élèves à construire une telle mosaïque ou encore tels des paléontologues observant sous toutes ses coutures une fouille surprenante sans autre préoccupation que de chercher à voir et à comprendre.

Table de 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Table de 2		2		4		6		8		10		12		14		16		18		20		22		24		26		28		30		32
Table de 3			3			6			9			12			15			18			21			24			27			30		
Table de 4				4				8				12				16				20				24				28				32
Table de 5					5					10					15					20					25					30		
Table de 6						6						12						18						24						30		
Table de 7							7							14							21							28				
Table de 8								8								16								24								32
Table de 9									9									18									27					
Table de 10										10										20										30		
Table de 11											11											22										
Table de 12												12												24								

<u>Portion de la Table Arithmétique naturelle qui se poursuit jusqu'à 84</u> [1](les cases concernées des lignes entières y sont colorées : celle de 1 en blanc, celle de 2 en jaune très clair, celle de 3 en bleu clair, celle de 4 en jaune clair, celle de 5 en rouge, celle de 6 en vert, celle de 7 en gris, celle de 8 en jaune, celle de 9 en bleu, celle de 10 en orange, celle de 11 en hachuré, celle de 12 en vert clair, …)

Une demi-heure s'est écoulée pendant laquelle chacun semblait découvrir ou redécouvrir individuellement un arrangement « dérangeant » de nombres : la table observée (T.A.N.) n'est pas à proprement parler une table à double entrée et plusieurs lectures y étaient faites. Pour certains, une lecture horizontale était nécessaire, transcrivant la notion de multiples. Pour d'autres, la lecture verticale s'imposait comme faisant rejaillir miraculeusement la notion de facteur ou diviseur des nombres du haut.

Le fait qu'un nombre donné corresponde à une seule colonne et inversement n'était pas toujours instantanément compris (obstacle cognitif) du fait de l'habitude de lire des tableaux à double entrée, et notamment la sacro-sainte Table de Pythagore.

Peu à peu, la notion de quotient (liée à celle de multiple) a été suffisamment perceptible pour la plupart des participants (au niveau des « escaliers ») qui ont alors également perçu celle de reste pour des nombres (ou colonnes) dont la case sur une ligne donnée était vide.

Le travail d'observation/recherche s'est ensuite poursuivi par groupe autour des tables. Une T.A.N. en couleurs a été distribuée aux participants.

Il a été remarqué que ce n'était pas la même table et que cette seconde table était moins « lisible » car surchargée.

[1] Dans ces Actes, cette figure et les suivantes ont été reproduites en niveau de gris. Vous pouvez accéder à la version couleur des documents sur le site www.arpeme.com .

Table de 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Table de 2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Table de 3	11	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Table de 4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Table de 5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Table de 6	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

I - 3. Les remarques et découvertes des participants à l'issue de leur travail de recherche sur la T.A.N.

- La différence entre le support pour la classe au format 1 m x 6 m et le support pour les élèves au format A4 dans lequel tous les nombres sont écrits sur chaque ligne.
- La table murale fait apparaître de nombreuses dispositions géométriques intéressantes à étudier : les « escaliers », les motifs revenant périodiquement, …
- L'intérêt et les limites de l'usage des couleurs :
    - Les multiples de 2 sont jaunes, les multiples de 3 sont bleus et les multiples de 6 (2x3) sont verts (VERT = JAUNE + BLEU)
    - Les multiples de 2 sont jaunes ; ceux de 4 sont aussi jaunes, mais un peu plus foncé ;ceux de 8 sont encore plus foncé … « Plus un nombre est grand, plus il a de couleurs ».
    - Mais il y a une infinité de nombres premiers et seulement trois couleurs primaires…
- Extrapoler la table au-delà de la partie représentée sur l'affiche conduit à passer du perceptif à l'algorithmique.
- La table permet de retrouver : $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$
- La table permet de trouver quotient et reste d'une division euclidienne.
- Un bel ostensif pour produire les diviseurs d'un nombre.
- Utilisation de la table pour multiplier deux nombres.
- Utilisation de la table pour décomposer un nombre en base 2 par exemple.
- Utilisation de la table pour la recherche du PGCD ou du PPCM.

I - 4 Des questions à poser aux élèves pour lancer la recherche

(Questions proposées par les participants à l'atelier)

- Qu'est-ce que vous voyez ?
- Que représentent les cases coloriées ?

- Pourquoi certaines lignes ont la même couleur ?
- Y a-t-il deux colonnes consécutives sans cases coloriées ?
- Recherche des diviseurs d'un nombre.
- Extrapoler la table vers la droite, vers le bas, …
- Des questions d'anticipation : par exemple prévoir les cases coloriées pour 78.
- Un dispositif pour faire émerger des questions dans une classe : poser à un autre groupe des questions auxquelles la table vous permet de répondre et une question que vous vous posez à son sujet et à laquelle vous ne savez pas répondre.

I - 5 Discussion sur l'utilisation de la table en classe

- Qui pose les questions lorsque la T.A.N. est utilisée comme sujet de recherche : le maître ou les élèves ?
- Le problème de la régularité de ce genre d'activité en classe est posé.
- Quel est le statut des objets mathématiques rencontrées au cours de l'exploration de la table : qu'institutionnalise-t-on ?
- Le risque de dériver en dehors du programme.

On revient à la question posée en introduction qui n'a pas été tranchée…

II - ÉLÉMENTS D'UNE DIDACTIQUE DE CLASSE

II -1 Petit historique de classe

II – 1.1 L'année scolaire 2001/ 2002 : classe de CE2

Cette année scolaire a été basée sur une approche de construction collective des savoirs arithmétiques. Une quinzaine de séances ont été dédiées à la construction, à l'exploration, l'appropriation et au dépassement de la T.A.N. Les principales étapes ont été les suivantes :

1) Suite au questionnement de classe « comment apprendre nos tables ? », la table multiplicative classique à double entrée ou Table de Pythagore a été observée. Des recherches de coloriages susceptibles de mettre en relation les différentes tables ont été réalisées. Le jaune a été choisi pour les tables de 2, 4 et 8, vues comme très semblables. Le bleu pour les tables de 3 et 9 et le rouge pour la table de 5. La table de 6 avait par exemple été vue comme pouvant être de couleur jaune ou bleue, et n'avait donc pas reçu de couleur.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

(Exemple du 9 intersection de la ligne bleu clair 3 et de la colonne bleu clair 3 : sa case est bleu soutenu, les deux 6 et les deux 12 qui l'entourent en croix sont en vert ; les 4, 8 et 16 qui l'entourent sont en jaune, alors que les lignes et colonnes 2 et 4 sont en jaune clair.)

Ce coloriage de classe permit ainsi de trouver la couleur de 6 et de ses multiples : vert !

2) Ces tables réunies derrière une couleur ont alors été mises en cascade **tout en respectant l'écart naturel entre les nombres** : productions individuelles de ce qui sera appelé plus tard Table Arithmétique Primitive (T.A.P.).

Table de 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Table de 2		2		4		6		8		10		12		14		16		18		20		22		24		26		28		30		32
Table de 4				4				8				12				16				20				24				28				32
Table de 8								8								16								24								32
Table de 16																16																32
Table de 32																																32
Table de 64																																

4 = x 1
x 2
x 4

8 = x 1
x 2
x 4
x 8

12 = x 1
x 2
x 4

16 = x 1
x 2
x 4
x 8
x 16

20 = x 1
x 2
x 4

24 = x 1
x 2
x 4
x 8

28 = x 1
x 2
x 4

32 = x 1
x 2
x 4
x 8
x 16
x 32

36 = x 1
x 2
x 4

40 = x 1
x 2
x 4
x 8

Premier type d'exercice donné en application (cf. stratégie de remplissage).

3) La nécessité de ne pas considérer ces tables séparément mais simultanément s'est alors fait sentir. La table en question, regroupant **tous les entiers naturels** (car ouverte contrairement à la table de Pythagore souvent limitée à 10x10 ou à 12x12), et leur laissant leurs **espacements et rapports naturels** a été appelée

Table Arithmétique Naturelle (T.A.N.) car **plus naturelle** à aborder pour le jeune élève : simple, claire et très structurante.[2]

Des coloriages individuels de T.A.N. (distribuées) ont été réalisés. Des observations ont amené à écrire toutes les décompositions multiplicatives visibles sur la T.A.N. Des stratégies très structurantes d'écriture ont d'ailleurs été élaborées lors des ré-écritures de ces égalités successives. Les nombres premiers ont été caractérisés simplement et appréciés pour ce qu'ils sont : « Les pauvres ne sont les multiples d'aucun nombre plus grand que 1 et plus petit que eux mêmes. Ils sont dans la table de 1 et dans leur propre table et c'est tout ! », sans qu'aucun apprentissage ne les concerne directement mais également sans vouloir non plus chercher à les écarter du discours au quotidien. La T.A.N. permettait d'aborder les entiers dans toute leur globalité et complexité, sans tabou !

4) La Construction d'une T.A.N. aux dimensions de la classe (6m x 1m) a alors été perçue comme nécessaire : les élèves ont réalisé tout le coloriage aux pastels secs lors de plusieurs séances d'Arts plastiques (utilisation de patrons, mélange de couleurs…). La T.A.N. murale terminée, ils se l'étaient appropriée physiquement. Le début de l'aventure conceptuelle pouvait véritablement commencer…

5) La T.A.N. a alors été explorée lors de séances dédiées.
- La commutativité a été vue comme évidente et a été travaillée de façon très fonctionnelle et donc efficace du point de vue du calcul réfléchi : les élèves préféraient lire ou calculer 2 paquets de 7 plutôt que 7 de 2 !
- La distributivité était aussi très lisible et fonctionnelle (présence des escaliers plus ou moins profonds, calculs de multiples du type 5x17 avec référence visuelle à 50 puis à 5 x 7 = 35…).
- L'associativité a juste été travaillée par la recherche des couples de facteurs. Une distinction visuelle entre division-partage et division-groupement a aussi été rendue possible. Le geste mental de division-groupement y a été vu comme bien plus facile. La systématisation ultérieure d'utiliser ce dernier n'a pas posé de difficultés.
- Par ailleurs, la technique de division utilisée a été systématiquement celle de la division-groupement, quel que soit le type de problème de division rencontré. Voir la division-partage dans la T.A.N. était plus délicat mais également structurant pour la compréhension de l'équivalence des gestes mentaux.

6) L'utilisation fréquente : <u>exploration</u> (séances dédiées), <u>appropriation</u> (calculs, réflexe de référence à certains nombres, cf. la propriété de distributivité), <u>dépassement</u> de la T.A.N. (calculs hors champ à droite et en bas, activités dos à

[2] Il est intéressant de remarquer ici que les auteurs de l'ouvrage « Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire » - ERMEL INRP (Tome 2, pages 128 à 130) proposaient en 1978 une construction du répertoire multiplicatif dans laquelle la première étape était une table ressemblant fortement à la T.A.N. (la seule différence est l'absence de « jeu » avec les couleurs primaires), pouvant déboucher (en la « compactant ») sur la table de Pythagore. Voir reproduction en annexe.

la T.A.N. etc.) ont animé plusieurs séances à travers des résolutions de problèmes, des activités sur les mesures etc.

7) Des brevets sur l'utilisation/ dépassement de la T.A.N. (multiples, quotient et reste) ont été passés avec succès par les élèves : 100% ont réussi le brevet relatif à la détermination quotient et reste (sur des nombres hors champ de divers ordres de grandeur).

II – 1.2 L'année scolaire 2002/ 2003 : classe de CM2

Cette année scolaire a été basée sur une approche d'introduction, d'approfondissement et d'éclaircissement des savoirs arithmétiques liés à la T.A.N. Entre 15 et 20 séances ont été dédiées à la T.A.N. ainsi qu'aux divers supports tirés de la T.A.N.

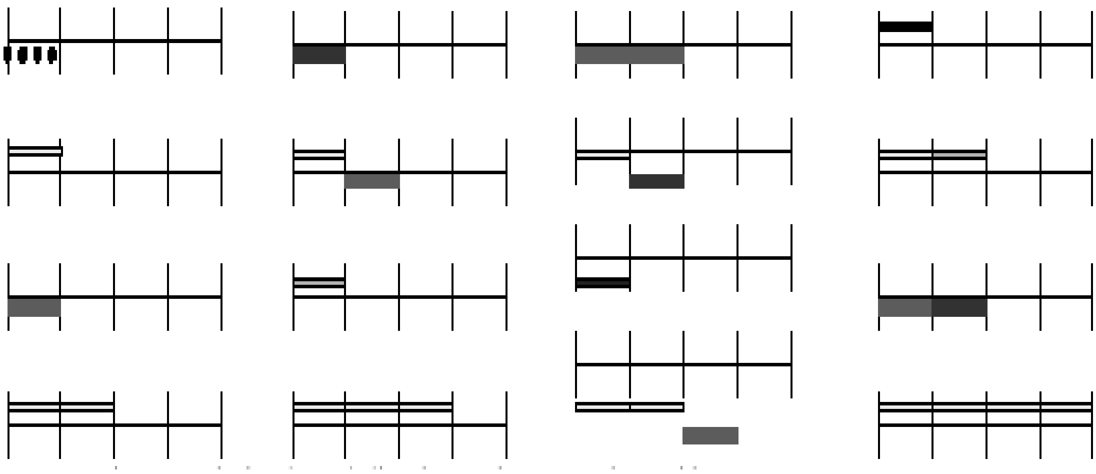
Les principales étapes ont été les suivantes :

1) **Introduction à la T.A.N.**
   - Tout d'abord, les élèves ont été sollicités à propos des familles qui existent « chez les nombres ». L'introduction des familles des multiples de 2 et de 3 a permis de mettre en évidence que le nombre 6 et ses multiples appartiennent aux deux familles.
   - La T.A.N murale a alors été introduite et explorée de façon libre pendant une dizaine de jours : quelques propriétés intrinsèques de la T.A.N. ont été observées et la recherche des facteurs des nombres entiers a été appréhendée comme un jeu : « Ah oui, 6 est un facteur de 72 parce que l'on a… *(recherche visuelle)* 72 = 6 x 12 (…) ».

2) **Utilisation et exploration de la T.A.N.** dans le but d'une appropriation assez rapide : (calculs, fonctionnalités : quotient et reste etc.) et si possible de réinvestissements de l'outil.

3) **Activités basées sur la décomposition maximale des entiers naturels**
   - <u>Stratégie de la poupée russe</u>, dont le principe a été « présenté » par le maître et poursuivi individuellement lors de quelques séances de travail personnel *(où une individualisation du travail est rendue possible : chacun travaille à son rythme sur des fichiers diversifiés en fonction de son contrat de travail) ;*

<u>Principe</u> : les élèves ont ouvert de façon itérative les entiers pour voir ce qu'ils contenaient et se ramener à un nombre déjà « épluché ». Par exemple, 24 = 2 x 12 et comme 12 avait déjà été décrit (non pas comme $12 = 2^2 \times 3$ mais plutôt comme 12 contient deux traits jaunes et un trait bleu), les élèves se sont servi de son écriture en couleurs pour trouver celle de 24. Ce principe itératif supposait donc à chaque étape de trouver au moins un facteur du nombre considéré, ce qui sollicitait complètement l'attention des élèves.

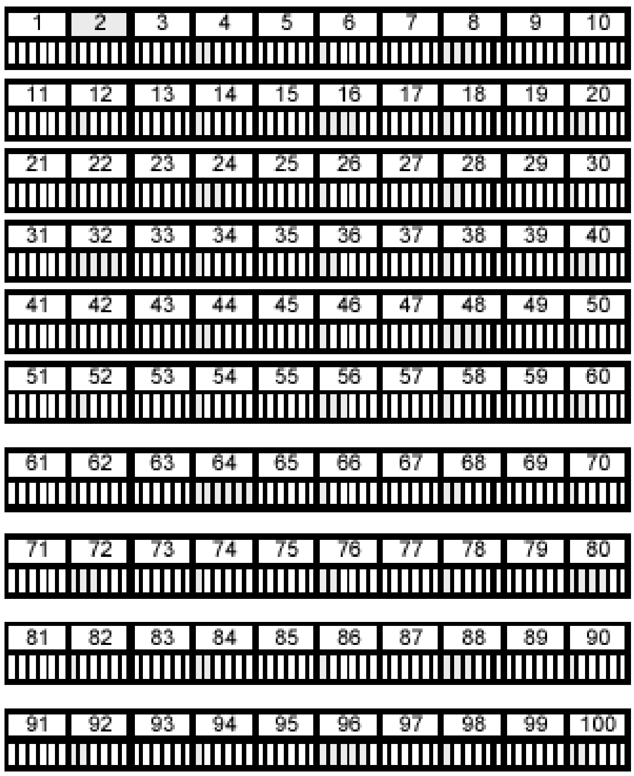


Les entiers naturels de 1 à 16 (de haut en bas puis de gauche à droite) révélant les nombres en couleur qui les composent : 1 trait jaune pour 2, 1 trait bleu pour 3, 2 traits jaunes pour 4, 1 trait rouge pour 5, 1 trait jaune et 1 trait bleu pour 6, …

- <u>Stratégie de la reconstruction</u> : construction collective de la **Table Arithmétique des Décompositions** ou **T.A.D.**

L'algorithme de coloriage de la T.A.D. a été le suivant : Colorier une barre jaune à tous les multiples de 2. Or d'autres nombres contiennent plusieurs fois 2 ! 4 par exemple contient deux 2 et comme il a déjà une barre jaune, on lui en rajoute une seconde ainsi qu'à tous ses multiples puisqu'ils contiennent également 4. Et ainsi de suite : 8, 16, 24 etc. ont le droit à une troisième barre jaune etc.

Les facteurs de 2 présents
dans les 100 premiers entiers naturels

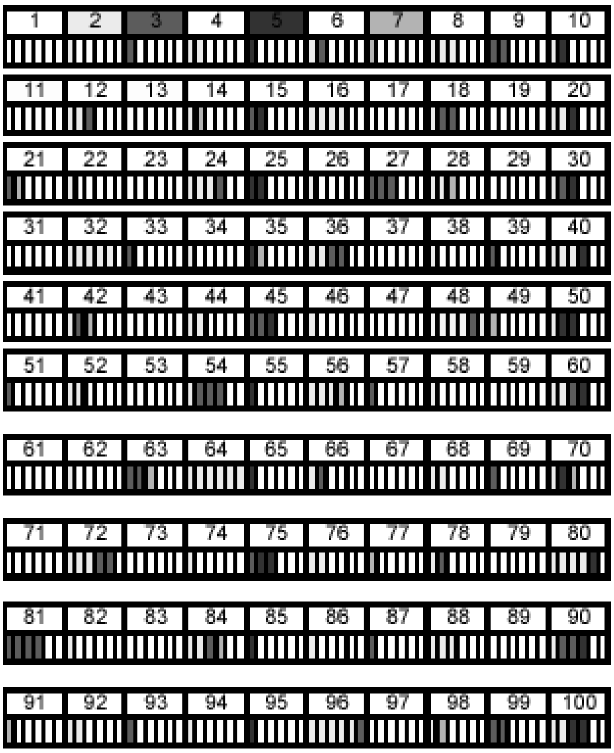


On procède de même en bleu pour tous les multiples de 3 (deux barres pour les multiples de 9…) etc. 5 n'a pas de barre ? On lui en colorie donc une en rouge (comme à ses multiples). Et 6 ? Il a déjà été inventé (1 barre jaune et 1 bleue). Et 7 ? Une barre grise (…). 10 a déjà été inventé etc.

Les élèves ont donc construit sur le mode du jeu tous les nombres de 1 à 100 ce qui a permis par la suite d'observer leurs propriétés très étroitement liées aux particularités de cette décomposition. Ce coloriage a été fait à plusieurs occasions sans perte d'intérêt bien au contraire ! Chacun découvrait de nouvelles stratégies de coloriage, stratégies liées à la structure des tables de multiples en base 10. Lorsque l'on ajoute 13 à 26, il suffit d'ajouter 3 (3 cases vers la droite) puis 10 (une ligne vers le bas) : la procédure est structurante pour le calcul réfléchi et ne nécessite pas la T.A.D.

C'est de fait comme un crible d'Érathostène amélioré où les nombres premiers apparaissent mais aussi leurs multiples et les multiples de leurs puissances (cf. ordres de multiplicité). À l'élimination on préférera la valorisation !

Les facteurs premiers de 2 à 13 présents
dans les 100 premiers entiers naturels



L'outil constitué par la T.A.D. a été peu discuté mais a été décrit par une participante comme étant très intéressant pour donner du pouvoir aux élèves quant à leur compréhension des nombres (en vue de la structuration arithmétique nécessaire à leur arrivée au collège où le formalisme arrive très vite).

Quelques utilisations ont été abordées comme la simplification de fractions, la factorisation ou encore la caractérisation univoque des multiples d'un entier donné. En effet, remarquons que les multiples de 18 (3 fois 6) pouvaient grâce à la T.A.N. être vus comme également des multiples de 3 et 6 (réciproque fausse). Grâce à la T.A.D. on les « voit » comme étant les multiples de 2 et 3^2, ce qui les caractérise de façon non équivoque dans la mesure où {a et b premiers entre eux} implique {a^n et b^p premiers entre eux}, ce qui est donc a fortiori vrai pour des nombres premiers. Il est par ailleurs possible et souhaitable de leur faire retrouver tous les facteurs des entiers (à suivre).

Un autre exemple d'utilisation au collège évoqué lors de l'atelier :

La recherche sur la T.A.D. des multiples des carrés peut être mise à profit dans le calcul des racines carrées. Par exemple, la racine carrée de 72, serait celle de 36x2 où 36 serait clairement le carré de 6 (2 barres jaunes et deux barres bleues). Ainsi, on cesserait d'attendre passivement que les élèves « voient » derrière 72, 128 etc. des multiples de carré, en leur permettant de découvrir, de manipuler, voire d' « éplucher » les nombres eux-mêmes et à travers eux la structure qui les anime.

Enfin, des fiches d'identité des nombres (affichées en classe) ont été conçues à l'égard des trente premiers entiers dont la décomposition devait être retenue.

4) **L'introduction des fractions** a suivi par une approche classique, entre autres basée sur des pliages par 2, 4 et 8 de bandes de papier.

La T.A.P.2 (Table Arithmétique Primitive de 2) issue de la mise en cascade des tables des puissances de 2 : 1, 2, 4, 8 et 16 a alors servi de départ aux T.A.F. (Table Arithmétique Fractionnaire) et notamment au début à celle de base ½. (T.A.F.P. 1/2).

Les fractions multiples des 1/16èmes de 0 à 4

Table de 1/16	1/16	2/16	3/16	4/16	5/16	6/16	7/16	8/16	9/16	10/16	11/16	12/16	13/16	14/16	15/16	16/16
Table de 1/8		1/8		2/8		3/8		4/8		5/8		6/8		7/8		8/8
Table de 1/4				1/4				2/4				3/4				4/4
Table de 1/2								1/2								2/2
Table de 1																1

Table de 1/16	17/16	18/16	19/16	20/16	21/16	22/16	23/16	24/16	25/16	26/16	27/16	28/16	29/16	30/16	31/16	32/16
Table de 1/8		9/8		10/8		11/8		12/8		13/8		14/8		15/8		16/8
Table de 1/4				5/4				6/4				7/4				8/4
Table de 1/2								3/2								4/2
Table de 1																2

La T.A.F. de 1/30 a été également construite et a permis de conclure quant à la comparaison de 2 fractions : 3/5 et 2/3 comparées auparavant de façon approximative sur un cercle (en atelier).

Table de 1/30	1/30	2/30	3/30	4/30	5/30	6/30	7/30	8/30	9/30	10/30	11/30	12/30	13/30	14/30	15/30
Table de 1/15		1/15		2/15		3/15		4/15		5/15		6/15		7/15	
Table de 1/10			1/10			2/10			3/10			4/10			5/10
Table de 1/6					1/6					2/6					3/6
Table de 1/5						1/5						2/5			
Table de 1/3										1/3					
Table de 1/2															1/2
Table de 1															

Table de 1/30	16/30	17/30	18/30	19/30	20/30	21/30	22/30	23/30	24/30	25/30	26/30	27/30	28/30	29/30	30/30
Table de 1/15	8/15		9/15		10/15		11/15		12/15		13/15		14/15		15/15
Table de 1/10			6/10			7/10			8/10			9/10			10/10
Table de 1/6					4/6					5/6					6/6
Table de 1/5			3/5						4/5						5/5
Table de 1/3					2/3										3/3
Table de 1/2															2/2
Table de 1															1

<u>Remarque</u> : ces tableaux de fractions basés sur l'approche multiplicative de la T.A.N. mettent en exergue des fractions irréductibles (la plus basse de chaque colonne), la suite de fractions de base (par exemple 1/30, où 30 est le PPCM des dénominateurs des autres fractions) et permettent de comparer voire d'ajouter directement des fractions en exerçant un certain plaisir de l'œil : « Mais c'est facile, quand on regarde à quoi est égal la fraction 1/ 3 on trouve aussi 10 / 30 tandis que 2 / 5 égal 12 / 30 … Et même avec des 15$^{\text{ièmes}}$ on peut le voir car… ».

Et grâce à l'observation, les élèves manipulent les fractions et peu à peu se les approprient.

Ces tables, sans systématiser en aucune façon la mise au même dénominateur, ont donc permis de trouver « des » dénominateurs communs propices à la comparaison. De même, les liens entre les pliages correspondants aux mesures de 1/2 + 1/4 + 1/8 (exemple) et la T.A.F. ½ ont été mis en évidence.

D'autres T.A.F. ont alors été distribuées, remplies (avec un certain tâtonnement) et explorées (égalités de fractions, comparaisons). La Table des Centièmes a été très utile pour la compréhension de l'écriture décimale (et grâce aussi au travail sur la T.A.F. 1/2).

5) **Passage de brevets sur l'utilisation/ dépassement de la T.A.N. et de la T.A.F. 1/2 et 1/100** (multiples, quotient et reste, fractions, décompositions, écriture décimale).

Table de 1/100	1/100	2/100	3/100	4/100	5/100	6/100	7/100	8/100	9/100	10/100	11/100	12/100	13/100	14/100	15/100	16/100	17/100	18/100	19/100	20/100
Table de 1/50		1/50		2/50		3/50		4/50		5/50		6/50		7/50		8/50		9/50		10/50
Table de 1/25				1/25				2/25				3/25				4/25				5/25
Table de 1/20					1/20					2/20					3/20					4/20
Table de 1/10										1/10										2/10
Table de 1/5																				1/5
Table de 1/4																				
Table de 1/2																				
Table de 1																				

<u>Remarque :</u> Les fonctionnalités plus fines des tables ont été laissées à la charge éventuelle de leur enseignant de 6$^{\text{ème}}$.

II - 2 Une Arithmétique naturelle en couleurs : un milieu didactique ?

Principes :

- Redonner aux nombres entiers (et fractionnaires) leurs proportions et espaces « naturels », tout en permettant d'unifier visuellement les concepts de multiplication/ division.
- Réhabiliter ainsi les concepts de facteur et multiple à travers une approche globale des nombres (tables ouvertes) en introduisant simultanément la variable (didactique ?) : couleur/ facteur.
- Aller jusqu'à la décomposition des entiers naturels en produit de facteurs premiers sans effort et sans formalisme, le tout pour favoriser le sens et la fonctionnalité et non juste la « technique ».

Trois champs abordés

La T.A.N. et les tables de facteurs entiers

Elles permettent d'obtenir tous **les facteurs des nombres** (la T.A.D. le permet également), les quotients et restes.

Toutes les propriétés opératoires y sont révélées (commutativité, distributivité …, distinction entre division-partage et division-groupement). PGCD & PPCM deviennent très accessibles.

Les Tables Arithmétiques Fractionnaires

Construction, comparaisons et calculs y sont un jeu d'élève (basé sur les mêmes principes) et permettent d'accompagner l'élève dans ses représentations successives autour des fractions et notamment la « nécessaire » recherche d'un dénominateur commun.

La Table Arithmétique des Décompositions

Elle fournit la décomposition des entiers en **produit de facteurs premiers** avec leur ordre de multiplicité. Les fonctionnalités sont très diverses et structurantes : pour préparer la conceptualisation autour du nombre (requise au collège) ou pour accompagner le formalisme propre au collège. Les nombres premiers sont mis à la portée des élèves pour leur plus grand bonheur en arithmétique.

III - BILAN DE L'ATELIER

Les outils ont donc été largement appréciés et ce, d'autant plus que les participants les ont réellement investis pendant cette recherche d'abord individuelle puis en petits groupes et enfin discutée collectivement.

Au niveau de l'adéquation avec les programmes scolaires notamment de l'élémentaire et donc de la formation, des mises en garde ont cependant été formulées : peut-on demander ou suggérer aux P.E. stagiaires de s'éloigner du programme sous prétexte d'une structuration arithmétique pertinente alors que le discours type est de partir du programme et des objectifs assignés pour en déduire des activités ciblées ?

D'autres participants ont souligné la profondeur des concepts disciplinaires présents dans ces tables (T.A.N. et T.A.D.) comparées au « négatif du crible d'Eratosthène », suggérant l'intérêt d'utilisations directes dans un contexte restant à déterminer.

Le potentiel des outils notamment au niveau des recherches possibles en élémentaire mais aussi au collège et au lycée a donc été reconnu comme pouvant être extrêmement structurant et révélateur de la nature des nombres dans toutes leurs dimensions arithmétiques et opératoires.

Annexe

Extrait de « Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire » (ERMEL INRP 1978, Tome 2, pages 128 à 130)

III.3.2. ***Organisation du répertoire multiplicatif***

III.3.2.1. **Activité**

But

Travail sur l'ordre.

Déroulement

- les enfants travaillent par deux.

- chaque enfant reçoit une bande numérotée de 1 à environ 100 (80 à 120) de la forme suivante :

1	2	3	4	5	6	....	98	99

A chaque paire d'enfants est attribué un nombre de 3 à 15 (par exemple 8).

Premier temps

Les enfants doivent colorier les cases de a en a (8 pour notre exemple).

Deuxième temps

Une des bandes va être découpée à droite des cases coloriées.

Troisième temps

L'un des enfants fabrique une suite de rectangles emboîtés, èt à chaque fois il note le nombre de cases du rectangle obtenu sous la forme 8 ×.

Pendant ce temps l'autre enfant note également sur sa bande intacte le produit correspondant à la place convenable.

1	2	3	4	5	6	7	8

puis

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16 8×2

puis

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16 8×2
17	18	19	20	21	22	23	24 8×3

Quatrième temps

On compare les différentes productions des groupes : comparaisons des bandes intactes d'une part, comparaison des rectangles successifs obtenus d'autre part.

Remarque : Certaines équipes, par suite par exemple d'une erreur dans le découpage, pourront ne pas avoir obtenu de rectangles. Il sera alors fort utile de leur faire rechercher la cause de leur erreur.

On pourra ici décider, par continuité de signification sur la bande, que $n \times 1 = n$.

III.3.2.2. Prolongements possibles

Activité

Le prolongement de l'activité 3.2.1 pourra amener à deux modes de représentation.

Premier mode de représentation

La simple juxtaposition dans l'ordre croissant des bandes intactes de 2 en 2, de 3 en 3, de 4 en 4, etc., offrira aux élèves un outil appréciable se prêtant à de nombreuses utilisations :

2	1	2	3	4 2x2	5	6 2x3	7	8 2x4	9	10 2x5	11	12 2x6	13	14 2x7	15	16 2x8
3	1	2	3	4	5	6 3x2	7	8	9 3x3	10	11	12 3x4	13	14	15 3x5	16
4	1	2	3	4	5	6	7	8 4x2	9	10	11	12 4x3	13	14	15	16 4x8
5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 5x2	11	12	13	14	15 5x3	16

Utilisations possibles

- trouver 4 X 5 : 5ème étape sur la 4ème ligne ou 4ème étape sur la 5ème ligne
- trouver pour un nombre donné sous forme usuelle, des écritures avec + et X : $11 = (5 \times 2) + 1 = (3 \times 3) + 2 = (4 \times 2) + 3$

Deuxième mode de représentation

Si l'on recopie les bandes déjà étudiées lors du 4ème temps de l'activité 2, on peut par pliages (ou découpage et recollage) supprimer les cases non colorées.

On obtient ainsi des bandes plus courtes du genre :

8 8 X 1	16 8 X 2	24 8 X 3	32 8 X 4	etc.

Leur juxtaposition, sur un tableau préparé à cet effet, amène à la table de Pythagore de la multiplication :

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81