RATIONNELS, PROPORTIONNALITÉ ET DOUBLE ÉCHELLE DANS UN ENVIRONNEMENT INFORMATIQUE

ADJIAGE Robert,
IUFM d'Alsace[1], Strasbourg

Résumé :
Cet article présente les travaux de l'atelier A2 intitulé « Proportionnalité et double échelle dans un environnement informatique ». J'y décrirai un aperçu de mon projet théorique d'approche des rationnels et de la proportionnalité à la charnière école / collège, j'exposerai les temps forts d'un protocole d'enseignement en 6ème et en 5ème sur le même sujet, je présenterai les logiciels de la série NovOra[2], spécialement conçus et développés pour cette ingénierie. Cet article est une réécriture de la communication initiale, enrichie d'idées et d'éclaircissements que le débat et le TP d'exploration des logiciels qui s'en est suivi ont contribué à faire émerger.

COMPLEXITÉ DE LA NOTION DE RATIONNEL

Je distingue quatre variables pour une étude didactique des rationnels et de la proportionnalité à la charnière école / collège :

1. Registre d'expression (langue naturelle, nombres entiers, écritures fractionnaires, écritures décimales, droites graduées, surfaces fractionnées…) des données et / ou du traitement.
2. Nature de l'expérience physico-empirique à laquelle renvoie le problème posé (Transparent Cop/03-1).
3. Nature mathématique de la question du problème posé (recherche d'une quatrième proportionnelle, comparaison de rapports..).
4. Nature du rapport, externe ou interne (Comin ; 2000, pp. 100-101), utilisé pour fournir les données et / ou pour un traitement.

Tout en tenant compte des variables 3 et 4, je me suis particulièrement penché sur les variables 1et 2, moins étudiées que les précédentes, et pourtant pertinentes ainsi que je vais l'établir ici de façon essentiellement qualitative.[3]

[1] Centre de Recherche sur la Formation/ CeRF-EA 2182 /IUFM d Alsace
Nouvelles modalités d'action(s) didactique(s) en mathématiques, enjeux d'enseignement et de formation.

[2] NovORa est une suite à la série des logiciels ORATIO, supports d'un protocole d'enseignement des rationnels en fin de cycle 3, réalisé de mars 1997 à juin 1998. ORATIO et le protocole ont été présentés au colloque de la COPIRELEM en mai 2000.

[3] Des données statistiques quantitatives sont en cours de traitement. Les premiers résultats font apparaître des différences significatives dans les résultats. Par exemple : un problème de comparaison de mélanges lait / chocolat (3 choc ; 2 lait vs 2 choc ; 1 lait), un problème de comparaison de fréquences réussite/échec (3R ; 2E) vs (2R ; 1E) ont engendré, avant

PERTINENCE DE LA VARIABLE 1

Ma première expérience d'enseignement des rationnels au cycle 3 (Adjiage ; 2001a) reposait sur un constat, une hypothèse et une première série de logiciels. Elle a débouché sur une première approche de la complexité d'un rationnel à ce stade de la scolarité et sur des résultats plus que satisfaisants en ce qui concerne les acquisitions.

Un constat

La difficulté d'acquisition de la notion de rationnel est au moins autant sémiotique : expressions et traitements fractionnaires, articulation de ce mode d'expression avec d'autres modes d'expression : langue naturelle, droites graduées, écritures décimales…. ; que conceptuelle : concevoir un objet rationnel à partir de la résolution de problèmes liés aux grandeurs, sur lesquels Brousseau (1986 et 1987) et Douady (1986) notamment ont construit leur ingénierie. Or, j'ai pour ma part pu constater, lors d'observations de classes, que nombre d'élèves traitent un type de problème comme celui évoqué par le transparent Cop/03-2 avec une certaine habileté rhétorique, alors que les mêmes élèves, s'ils sont amenés, en raison d'un coût de traitement trop élevé ou d'une contrainte pédagogique, à remplacer les mots de la langue naturelle par le symbolisme des fractions, éprouvent de la difficulté à décrire, interpréter et résoudre le même type de problème. Certains d'entre eux semblent même désapprendre, lors de ce passage, les acquisitions pourtant non négligeables de la phase rhétorique : recherche de référents communs (60 feuilles partout), encadrements entiers (plus de 8 feuilles par mm contre 3 feuilles par mm), comparaison à des pivots fractionnaires simples comme un tiers (7 c'est moins que 60 divisé par trois). Une rupture dans le mode d'expression débouche donc sur une rupture de compétences. Ceci me semble être un phénomène didactique d'importance qui, à ce titre, mérite d'être étudié et pris en compte dans les ingénieries. Ce qui n'est généralement pas le cas (Adjiage ; 1999, p. 68).

Or, si les élèves ont beaucoup de mal à changer de registre, selon Duval (2001, p.91) les mathématiciens professionnels passent continuellement du rhétorique au formel, c'est même ce qui distingue le fonctionnement cognitif du mathématicien du fonctionnement commun. «L'activité mathématique…. nécessite des changements de direction de la pensée qui apparaissent comme des ruptures…. Tout se passe comme s'il fallait brusquement changer la manière de représenter les données, ou penser à autre chose, à l'encontre du déroulement spontané du jeu d'associations qui a été induit par la première compréhension du problème ou les premiers traitements engagés. » (Duval ; 2001, p.85). Ceci tient à la nature des objets mathématiques : on n'y a accès, et donc on ne peut les concevoir, que par une médiation sémiotique (c'est ce qui distingue essentiellement l'accès à un objet mathématique de l'accès à un objet physique, qui peut être multi-sensoriel et / ou instrumenté) ; cette médiation sémiotique est multiforme, « des représentations de registres différents ne présentant pas les mêmes aspects d'un même contenu conceptuel » (Duval : 1995, p. 69). D'où la nécessité de disposer de plusieurs registres pour l'acquisition d'une notion ou pour un traitement mathématique. Ceci m'a amené à formuler une hypothèse.

---

enseignement, l'erreur des écarts (comparer la différence au lieu du rapport) dans des proportions très différentes : 1/24 pour le premier, 13/24 pour le deuxième (et 0/24 pour un troisième problème de comparaison de rapports de grandeurs hétérogènes).

Hypothèse :

L'acquisition de la notion de rationnel passe par la découverte d'invariants entre trois registres d'expression (Duval ; 1995, p. 21) parmi lesquels celui des droites graduées (Adjiage & Pluvinage ; 2000) joue un rôle prépondérant, tant pour l'expression initiale des rationnels que pour le contrôle des résultats obtenus dans les autres registres (transparentCop/03-3).

Les apprentissages, quant à eux, reposaient sur un travail systématique de séparation et d'articulation des trois registres (droites graduées, écritures fractionnaires, écritures décimales) mobilisés dans l'environnement des logiciels de la série ORATIO (Adjiage & Heideier ; 1998), spécialement conçus et développés dans ce but.

La série ORATIO

Composée de vingt logiciels répartis en deux ensembles et d'une base de données. Le premier ensemble est formé de quatorze logiciels dits de traitement. Il donne aux élèves l'occasion d'une investigation séparée de trois registres d'expression des rationnels, à savoir en respectant l'ordre de leur introduction en classe : les droites graduées (six logiciels) ; les écritures fractionnaires (cinq logiciels) ; les écritures décimales (trois logiciels). Lors de l'investigation de chacun de ces systèmes les liens avec les systèmes précédents ne sont l'objet d'aucun travail spécifique, même si nombre d'élèves les évoquent spontanément. Ce n'est qu'avec l'étude du deuxième ensemble (six logiciels dits de conversion) que les élèves sont invités à un travail de mise en correspondance systématique des trois registres pris deux à deux.

Chaque logiciel propose plusieurs tâches, souvent à partir d'une consigne de comparaison de deux rationnels exprimés dans un des trois registres. Les prérequis sont minimes : droite numérique des entiers, fréquentation de fractions usuelles ou d'écritures à virgules. Le logiciel ne cherche pas à expliquer, il ouvre un accès aux objets mathématiques non par une définition formelle et / ou illustrée, mais par des mises à l'épreuve de leur mode d'expression, de traitement, puis de conversion. L'élève est censé agir en testant des hypothèses : 3,14 est-il supérieur à 3,5 puisque 14 est supérieur à 5 ; $\frac{3}{4}$ est-il inférieur à $\frac{7}{10}$ puisque 3 et 4 sont respectivement inférieurs à 7 et 10 ? Le milieu (le logiciel) rétroagit alors, donne à observer des phénomènes qui invitent à engager une nouvelle action puis à échafauder des règles qu'on remet à l'épreuve. Le questionnement que l'on cherche à provoquer, d'essais en erreurs, serait : quels objets mathématiques méritent une telle expression, un tel mode de traitement ?

La complexité d'un nombre rationnel en tant qu'objet mathématique (transparent Cop/03-4 « Complexité d'un rationnel »)

Le principal obstacle pour construire et mobiliser un objet fractionnaire réside dans la contradiction entre unité (du lien) et pluralité de sa représentation (deux entiers, deux ensembles d'entiers). D'autant que ce risque continue à être renforcé par un enseignement qui privilégie de manière quasi exclusive la représentation en "parts de tarte", alimentant l'illusion que : "c'est facile, il suffit de compter les parts", et ce malgré les études multiples concluant toutes au faible potentiel de cette illustration à rendre compte du concept : Hart & Sinkinson, 1989 ; Streefland, 1993, p. 114 ; Adjiage, 1999, p. 204…

Résultats de cette expérience

Cette expérience a connu des succès, pointés notamment lors de l'évaluation nationale à l'entrée en 6ème (Adjiage ; 1999, pp. 294-369, – pp. 299 et 312 en particulier), mais elle n'a pas permis de départager la population observée de l'échantillon national en résolution de problèmes rationnels liés aux grandeur. C'est pour tenter d'améliorer ces résultats que j'ai conçu un nouveau protocole d'enseignement en 6ème et 5ème[4].

PERTINENCE DE LA VARIABLE 2

Afin de rendre les résultats recueillis opposables, j'ai mis en place un dispositif classe expérimentale vs classe témoin. Les deux classes ont été prises en charge par le même professeur, sur les mêmes objectifs très précisément écrits[5]. En outre, les mêmes problèmes liés aux grandeurs ont été proposés dans les deux classes. La démarche d'enseignement dans la classe expérimentale reposait sur un protocole décrit par le transparent Cop/03-6 (un exemple est fourni par le transparent Cop/03-7). Elle intégrait des passations régulières sur les logiciels ORATIO et NovOra. Dans la classe témoin, la démarche d'enseignement était laissée à l'initiative du professeur titulaire avec une restriction majeure : pas de passation sur les logiciels.

Au-delà des objectifs, forcément différents de la première expérience en cycle 3 puisque se rapportant à un autre niveau d'enseignement, l'intégration forte de problèmes liés aux grandeurs est la nouveauté essentielle de ce nouveau dispositif. Elle résulte de la prise en compte de la variable 2 que nous allons à présent aborder.

Séparation et intégration des composantes de la complexité des problèmes de rapports de grandeurs

L'examen des transparents Cop/03-7 et Cop/03-8 permettra de mieux comprendre le champ couvert par la variable 2. Cette dernière devrait permettre d'étudier l'impact de la nature de l'expérience physico-empirique décrite par l'énoncé d'un problème sur les productions des élèves. On s'intéressera ici à la partie basse du transparent Cop/03-7 qui présente un énoncé de problème de mélange[6], proposé aux deux classes à leur entrée en 6ème, donc avant toute reprise d'enseignement des rationnels au collège. Le transparent Cop/03-8 propose des procédures d'élèves illustrant les six modalités de traitement de ce problème que j'ai pu dégager à partir de l'intégration plus ou moins réussie des deux composants du mélange en une nouvelle entité qui préfigure le rapport de l'un à l'autre (Adjiage ; 2003 ?).

[4] Classes de Michel Barthelet, collège de Herrlisheim, 67850

[5] Une version très abrégée de ces objectifs est proposée par le transparent Cop/03-5

[6] Un problème de mélange permet de bien repérer la prise en compte séparée des deux constituants du futur rapport (volume de lait, volume de chocolat) avant de les intégrer dans une nouvelle entité désignable par un mot, le goût, qui préfigure l'entité mathématique du rapport.

On y observe pêle-mêle et imbriquées les unes dans les autres, des remarques, des analyses, des appréciations, des opinions, des argumentations se rapportant à : une expérience physico-empirique avec des manipulations, réelles ou imaginées, de substances (lait, chocolat) et de grandeurs non précisées (masse, volume), un test sensible (une mesure ?), le goût, dont le protocole n'est pas explicité (comment comparer les goûts, faut-il tout boire, un extrait suffit-il, le goût dépend-il de la quantité absorbé ?…). On remarquera aussi l'ébauche d'un traitement mathématique, avec des entiers, des schémas, des fractions. Bref, peu de séparation et beaucoup de dispersion voire de confusion, ce qui témoigne de la réelle complexité de la notion, dans sa dimension physico-empirique.

Par opposition, le transparent Cop/03-9 montre une argumentation bien disciplinée après enseignement, en fin de 5ème, beaucoup plus centrée sur le traitement mathématique, à partir d'une numérisation fractionnaire assortie parfois d'un changement de registre opportun (recherche d'approximations décimales, pour les comparer, des deux fractions représentant chacun des deux mélanges). Cette tendance est plus nette dans la classe expérimentale que dans la classe témoin, où des procédures privées, justes ou fausses, subsistent (par exemple la recherche d'une référence commune – « pour 35 litres partout »), assorties de commentaires rhétoriques pratiquement absents dans la classe expérimentale.

Je note enfin que, lors d'un test effectué sur un ensemble de 159 PE1 à l'automne 2002 portant sur le problème de comparaison des mélanges : (3 ; 2) vs (2 ; 1) (Partie bas du transparent Cop/03-7), 128, soit 80%, utilisent une procédure fractionnaire (91 comparent $\frac{3}{5}$ et $\frac{2}{3}$; 37 comparent $\frac{3}{2}$ et $\frac{2}{1}$), 26, soit 16%, utilisent une procédure privée (essentiellement basée sur une linéarité en acte ou plus achevée), 7 enfin donnent une réponse fausse (erreur des écarts surtout).

Je constate donc un mouvement au cours du temps, qui va d'une difficulté à démêler la complexité de la notion, faite de composantes physico-empiriques et mathématiques, à une intégration de ces composantes en un objet mathématique fractionnaire. Et encore n'ai-je étudié ici qu'un seul type de problème de rapport de grandeurs. Cette complexité s'accroît lorsqu'on prend en compte la diversité de ces problèmes (transparent Cop/03-1). Mon hypothèse est que là où un débutant ne verra que de la dispersion : d'un problème de mélange à un problème de dilatation, d'un problème de mesure à un problème de rapport de grandeurs hétérogènes ; de manipulation, de mesures et de tests physiques à une numérisation mathématique ; d'un traitement fractionnaire à un traitement décimal où à une représentation au moyen d'une surface fractionnée, l'expert verra de l'unité autour de la notion de rationnel. La partie visible et donc le témoin de la reconnaissance de ce modèle rationnel intégrateur est l'usage d'un unique objet fractionnaire pour traiter cette diversité de problèmes (voir le public des PE1). C'est pourquoi j'ai attaché tant d'importance à son émergence dans les deux classes observées et que j'ai mis en place, dans la classe expérimentale, un protocole d'enseignement basé sur la séparation et l'articulation des deux ordres de complexité repérés par les variables 1 et 2 résumé par les transparents Cop/03-6, et Cop/03-10.

Ce projet se devait d'avoir un outil privilégié d'intégration. C'est le rôle dévolu à la droite graduée.

Confirmation de la droite graduée

Parmi les logiciels relatifs au registre des droites graduées d'ORATIO, un peut paraître surprenant, Gradu5, dont le transparent Cop/03-11 expose la visée tout en présentant un cheminement typique d'élève en situation apprentissage.

Il peut sembler compliquer inutilement un enseignement déjà suffisamment compliqué : pourquoi un repère [5 ; 9] subdivisé en 3 et pas en 4 ? J'ai en fait conçu ce logiciel parce que je suis tombé naturellement sur ce type de complexité en essayant de représenter sur droite graduée le problème de l'agrandissement du puzzle de Brousseau (1987 ; p.137-144) : transparent Cop/03-12. Par ailleurs, ce type de représentation permettait de résoudre le problème mathématique de la division exacte : transparent Cop/03-13.

C'est à partir de ces deux considérations que j'ai pu mettre au point NovOra et résoudre les problèmes à la fois d'articulation des problèmes physiques entre eux (transparent Cop/03-10, § 4a) et d'articulation des univers physiques et mathématiques (transparent Cop/03-10, § 4b).

La droite graduée de NovOra

Munie d'une double échelle, (transparents Cop/03-12) elle propose aux utilisateurs la recherche d'image et d'antécédent, par une application linéaire rationnelle $y = ax$, en huit logiciels : 4 pour la recherche d'image (deux possibilités selon que x entier ou pas, fois 2 possibilités selon que a entier ou pas), 4 (deux possibilités selon que y entier ou pas, fois 2 possibilités selon que a entier ou pas) pour la recherche d'antécédents. Notons que le produit d'un rationnel r_1 par un rationnel r_2 peut être défini, à l'issue des activités proposées par ces logiciels, comme l'image de r_1 par l'application linéaire définie $y = r_2x$, ainsi que Brousseau (1987, pp. 199-206) le proposait déjà.

La principale ressource est la possibilité de resubdiviser chaque intervalle initial et de déposer les entiers, sur l'échelle du bas ou du haut, à condition de cliquer sur les graduations correspondantes (pénalité autrement).

Munie d'une échelle simple, elle permet, avec les mêmes ressources, de fournir une écriture fractionnaire d'un rationnel x pointé par une flèche dans un repère $[a ; b]$ quelconque avec une subdivision initiale indépendante de l'amplitude $b - a$ (voir transparent Cop/03-13) ; x peut pointer sur la première graduation (on énoncera alors pour un repère [0 ; 7] fractionné en 4 : $x = 7 \div 4 = \frac{7}{4}$) ou pas (on énoncera alors pour x pointant vers la troisième graduation d'un repère [0 ; 7] fractionné en 4 : $x = \frac{3}{4}7 = \frac{3 \times 7}{4} = \frac{21}{4}$ qu'on lira « trois quarts de 7 est égal à $\frac{21}{4}$ ») ; enfin, l'origine visible de la droite peut être 0 ou pas.

Nous avons déjà établi (Adjiage ; 1999, pp. 157-231) le rôle fédérateur de la droite graduée pour l'expression et le traitement des rationnels. Il nous reste à esquisser ici son rôle de registre de transition et d'articulation entre les univers physique et mathématique, ce qui est résumé par le transparent Cop/03-14. Bien entendu, la fonction de traitement, en l'absence d'un ordinateur, n'est guère conviviale. L'usage de fractions, en revanche, une fois ce mode d'expression maîtrisé, l'est beaucoup plus. D'où l'importance de la fonction d'annonce du registre des écritures fractionnaires par le registre des droites graduées, et le soin tout particulier à apporter à l'opération de conversion entre ces deux registres (logiciels Frac2gra et Grad2fra de ORATIO).

Mais quels sont les types de problèmes liés aux grandeurs susceptibles d'être traités par la recherche d'une quatrième proportionnelle ou d'une comparaison de fractions ? C'est ce que nous allons examiner à présent.

Classification des problèmes de rapport de grandeurs

On se reportera au transparent Cop/03-1.

Traditionnellement, les didacticiens distinguent diverses acceptions d'une fraction à ce stade de la scolarité, en fonction des problèmes liés aux grandeurs, donc des problèmes physiques qu'ils permettent de résoudre. Brousseau (1986 ; pp. 90-94, pp.98-100 et 1987 ; pp.2-18 et pp. 136-151) distingue ainsi le rationnel-mesure, accompagné d'une unité ($\frac{3}{4}km$) du rationnel-dilatation sans unité (agrandir par un coefficient de $\frac{7}{4}$), là où les anglo-saxons (Kieren ; 1980) se réfèrent à cinq sous-constructions (relation partie/tout, quotients, ratios, opérateurs et mesures).

En ce qui me concerne j'ai opté, pour les raisons exposées en 0, pour une classification qui se réfère à la fois au lien entre les grandeurs rapportées, aux objets physiques sous-jacents aux grandeurs et à la nature de l'expérience physique à laquelle renvoie le problème.

J'ai déjà dit (voir 0) que certains résultats empiriques dont je dispose permettent une justification pour le moment partielle de cette classification. Il reste à tester de façon systématique l'impact de cette variable sur les élèves, en termes de procédures et / ou de réussite.

Il est à présent possible de vérifier que le registre des droites graduées permet une représentation et un traitement pour chacun de ces problèmes.

La droite graduée permet d'interpréter et de traiter les problèmes étudiés relatifs aux rapports de deux grandeurs

C'est ce qu'établit le transparent Cop/03-15. Seule la représentation de problèmes est proposée sur ce transparent. Pour le traitement, on se reportera aux ressources des logiciels ORATIO ou NovOra. On se convaincra aisément que la droite graduée à double échelle permet d'interpréter et de traiter les problèmes de type 0 de notre classification (rapport de deux grandeurs susceptibles de varier), soit pour la recherche d'une quatrième proportionnelle, soit pour la comparaison de deux rapports. On notera cependant que certains problèmes (mesures et comparaison de mélanges ou de fréquences) peuvent aussi être représentés et traités au moyen d'une droite graduée à simple échelle. Dans tous les cas, ainsi que nous allons le préciser au paragraphe suivant, l'élève n'est pas censé, en tout cas en phase d'apprentissage, mobiliser spontanément de telles représentations, mais mener des expériences sur leur potentiel purement numérique (calcul d'images, d'antécédents…) avant d'être invités à mettre en relation ces représentations avec les divers problèmes liés aux grandeurs étudiés par ailleurs. Nous faisons l'hypothèse que ce travail de séparation et d'articulation des divers éléments de la complexité d'un rationnel donne aux élèves un mode d'accès au concept. Les expressions numériques usuelles (écritures fractionnaires et décimales), plus conviviales, sont censées relayer, sans la rendre pour autant caduque, la représentation sur droite graduée. Cette dernière est à considérer comme : un registre qui permet d'annoncer puis de contrôler les traitements fractionnaires ; un registre de transition entre l'univers mathématique et physique ; un objet autour duquel se construit l'unité de la notion ; un objet pérenne au-delà de la phase d'apprentissage grâce à son potentiel interprétatif.

LE PROTOCOLE D'ENSEIGNEMENT

Dans un processus d'acquisition de la notion de rationnel, nous distinguerons :

- l'activité physique liée à la réalisation effective ou mentale d'une expérience, de mesurages, de reformulations, d'émissions de conjectures, relatifs à des phénomènes de mesures ou de rapports de grandeurs ;
- l'activité mathématique liée à la mobilisation de divers registres sémiotiques, aux traitements et conversions de représentations exprimant des nombres, des fonctions (opérateurs), ou des points.

Le transparent Cop/03-6 présente les quatre moments d'enseignement du protocole, répétés systématiquement lors de l'étude de chaque logiciel (avec certains regroupements). Le transparent Cop/03-7 donne un exemple de mise en œuvre des quatre moments. On gagnera à rapprocher le transparent Cop/03-6 (moments 1 à 4) du transparent Cop/03-10 (auquel renvoient les points 1, 2, 3, 4a, 4b, 4b ci-dessous) :

- Le moment 1 correspond aux points 3 et 4b (séparation et articulation des registres) ;
- le moment 2 prolonge le moment 1 et réalise, associé au moment 3, le point 1 (séparation des univers) ;
- le moment 3 met en œuvre le point 2 (séparation des divers problèmes de rapport de grandeurs) ;
- le moment 4 réalise les points 4b (articulation des univers physique et mathématique) et 4a (articulation des problèmes de rapports de grandeurs autour de la notion de rationnel, soit de ce qui fait l'unité de ces problèmes au-delà de leur diversité).

CONCLUSION

Afin de disposer d'un « état des lieux initial », chacune des classes de notre expérience a été évaluée en début de 6ème à partir d'exercices portant sur l'ensemble des compétences à acquérir au cours des deux années scolaires à venir, notamment en ce qui concerne la résolution des six types de problèmes liés aux grandeurs. La plupart des contenus sur les rationnels au programme de 6ème et de 5ème ayant déjà été abordés au cycle 3, aucun item de cette évaluation initiale n'était censé rester totalement étranger au champ de compréhension des élèves. Deux évaluations portant sur les mêmes compétences, l'une d'étape en fin de 6ème, l'autre finale en mars 2003 vont permettre d'apprécier les évolutions respectives, notamment en ce qui concerne les points 4a et 4b et 4b du transparent Cop/03-10. J'évaluerai mon expérience en fonction des productions des élèves de la classe expérimentale, comparés à celles de la clase témoin, notamment selon le degré atteint dans le processus d'unification :

- dans le champ mathématique, la capacité à changer de registre (4b) afin de minimiser les coûts de traitement (ce qui témoignera de la conception d'un objet unique rationnel au-delà de la diversité des représentations) ;

- dans le champ physique, la capacité à mobiliser des traitements rationnels (4b) , et notamment des fractions, quelle que soit la nature du problème physique abordé (4a). C'est l'usage d'un seul objet de traitement mathématique qui attestera de la mise au jour du lien, au-delà de la diversité, entre les différents problèmes physiques étudiés.

La droite graduée, outil transversal d'expression et de traitement de n'importe lequel de ces problèmes devrait fortement contribuer à l'unification de la notion.

Transparent Cop/03-1: Quels problèmes sont susceptibles de mobiliser un rapport rationnel de deux grandeurs ?

UNE AU MOINS DES DEUX GRANDEURS RAPPORTÉES EST FIXE : PROBLÈMES DE MESURE

Ce sont des problèmes de rapport d'une grandeur, continue ou discrète, à une grandeur unité fixée.

- $5V = 41\,u$, ou $V = \frac{41}{5}u$; u est l'unité et V la grandeur à mesurer
- 5 jeux de roues contiennent 20 roues. Soit R la quantité de roues. Si on choisit une roue comme unité r, on a : R = 20r ; Si on choisit le jeu comme unité j, R = 5 j

LES DEUX GRANDEURS RAPPORTÉES SONT SUSCEPTIBLES DE VARIER

Les deux grandeurs rapportées sont différentes : Problèmes définissant une grandeur quotient

Problèmes de vitesses, de débit, de masse spécifique, de prix au poids…

Les deux grandeurs rapportées sont les mêmes

Un seul objet sous-jacent

Les unités sont différentes : *problèmes de changement d'unité*

Mesure au moyen d'une unité U d'une grandeur V variable, connaissant sa mesure au moyen d'une unité u et connaissant $\frac{u}{U}$

Les unités sont les mêmes : *problèmes de dilatation*

L'objet sous-jacent (un côté, un prix, une distance, un achat…), variable, subit donc une transformation.

- Agrandissement : $4 \longrightarrow 7$
- Pourcentages, échelles
- Vous payez 2 tablettes, vous en emportez 3

Deux objets sous-jacents

Les objets, a priori séparés, sont réunis : *problèmes de mélanges*

5 verres de cacao pour 41 verres de lait

Les objets, a priori réunis, sont séparés par l'introduction de modalités : *problèmes de fréquences*

Sur 46 réponses, 5 échecs et 41 réussites

Transparent Cop/03-2

Les élèves comparent l'épaisseur de deux feuilles de papier, chacune issue d'un tas différent, connaissant l'épaisseur et le nombre de feuilles de chaque tas (dans un tas donné, les feuilles sont de même épaisseur). Ce problème est destiné à la construction de la notion de rationnel-mesure (Brousseau, 1986, p. 141)

Un traitement rhétorique du problème de la comparaison des épaisseurs de deux feuilles de papier

« 60 f[euilles] ; 7 mm, c'est du (papier) fin, c'est pas du A [un des types de papier étudiés auparavant], on avait trouvé pour A (3f ; 1 mm) » – sous-entendu 60 f de A feraient bien plus de 7 mm".

Un traitement fractionnaire du problème de la comparaison des épaisseurs de deux feuilles de papier

$$\frac{1}{3}=\frac{20}{60} \quad \text{or} \quad \frac{20}{60}>\frac{7}{60} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{3}>\frac{7}{60}$$

Transparent Cop/03-3

Pourquoi la droite graduée, dans un environnement logiciel, comme système d'expression privilégié des rationnels ?

1. Traite d'entrée de jeu les rationnels comme des **nombres** parmi les premiers nombres rencontrés (les entiers).

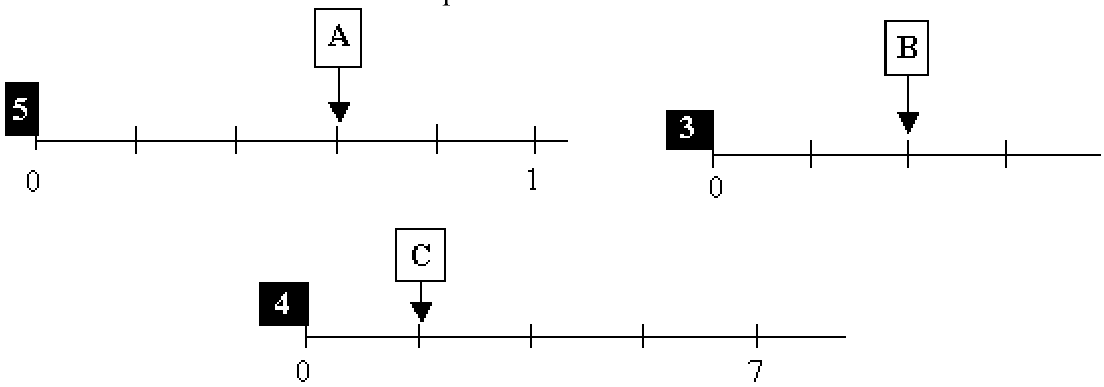
2. Séquentialise la prise en compte du couple d'entiers (a ; b) nécessaire à l'expression d'un rationnel.

3. Met en avant le lien de a à b (**position** d'un point relativement à un repère**,** invariante sous changement d'échelle) plutôt que les entiers a et b.

4. Fonctionne comme un outil de transition entre un univers mathématique (droite des nombres) et un univers physique (tout problème de rapport est représentable sur droite graduée).

5. fonctionne comme un outil d'expérimentation et de contrôle

- Permet la visualisation des opérations de report et de subdivision, fondatrices des rationnels ;
- annonce et contrôle les futurs traitements fractionnaires ;
- permet une démarche essai / erreur à coût acceptable grâce à l'environnement informatique.



Transparent Cop/03-4
Complexité d'un nombre rationnel

1. Un objet à double détente

- **un lien** numérique entre deux entiers, ce qui fait d'un rationnel **un** nombre exprimé par **deux** nombres ;
- un **lien linéaire** entre **deux séries** de couples d'entiers, ce qui fait d'un rationnel un nombre exprimable par un **ensemble** de couples "réputés" équivalents.

Par exemple, dans l'écriture $\frac{3}{4}$:

L'expert voit le lien de 3 à 4 pouvant exprimer aussi le lien de 75 à 100 ou de 15 à 20… ; l'élève ne voit souvent que 3 et 4, ou 3 parmi 4.

2. Un objet exprimable dans des registres hétérogènes

droites graduées, écritures fractionnaires, écritures décimales, écritures scientifiques…. dont la séparation et l'articulation demande un enseignement spécifique.

Transparent Cop/03-5
Les objectifs généraux visés

1. Exprimer un rationnel dans un des trois registres étudiés (les droites graduées, les écritures fractionnaires et décimales) ; convertir l'expression d'un rationnel, d'un de ces registres vers un autre ;
2. interpréter les données numériques d'un problème au moyen de rationnels exprimés dans l'un des trois registres ;
3. comparer et encadrer des rationnels, intercaler un rationnel entre deux autres rationnels ;
4. utiliser un critère permettant de décider qu'un rationnel est entier ;
5. conjecturer et utiliser un critère permettant de décider qu'un rationnel est décimal.

Transparent Cop/03-6
Quatre moments forts d'une séquence d'enseignement

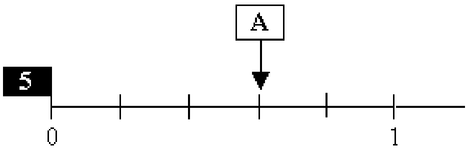
Moment 1. Passation sur un logiciel de la série ORATIO.

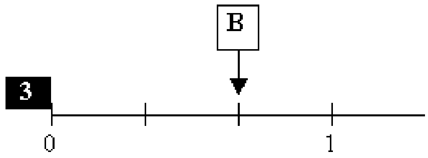
Moment 2. Un problème de type ORATIO est posé aux élèves dans un environnement papier /crayon.

Moment 3. Un problème **lié aux grandeurs**, structurellement et numériquement analogue à celui Moment 2 est posé aux élèves. Les élèves résolvent le problème par les moyens de leur choix. Certains d'entre eux identifient spontanément dans ce nouvel énoncé une **expression différente du même problème** que celui du Moment 2.

Moment 4. La convergence provoquée : le professeur rappelle en début de séance les enjeux du débat scientifique : "en quoi ces deux problèmes sont-ils différents et en quoi sont-ils analogues".

Transparent Cop/03-7
Deux expressions différentes du même problème

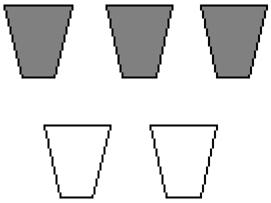




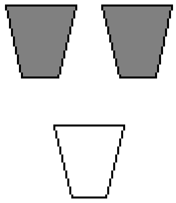
Un nombre fractionnaire est représenté sur chacune des droites graduées ci-dessus. Lequel de ces nombres est le plus grand ?

TransparentCop/03-8

On prépare une boisson chocolatée en mélangeant du chocolat et du lait. La recette A mélange 3 parts de chocolat pour 2 parts de lait. La recette B mélange 2 parts de chocolat pour 1 part de lait. Quel est le mélange qui a le plus le goût du chocolat



Mélange A



Mélange B

TransparentCop/03-8bis

(Les productions ci-dessous se rapportent au problème de mélange du transparent Cop/03-8)

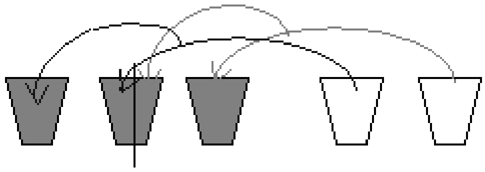
LINDA : "le mélange **A**, parce que dans la recette A, il y a 3 parts de chocolat qu'on mélange et dans la recette B, il y a 2 parts de chocolat, alors dans la recette A il y a plus de goût."
GEOFFREY : "le mélange **B**, la recette B a le plus le goût du chocolat parce qu'il y a moins de lait que dans A."

FLORIAN : "Recette **A**, parce que dans la recette A il y a 3 bols de chocolat, 2 bols

---

LOÏC : "Recette **A**, [*parce que dans la recette A*] il y a **plus** de tasses de chocolat **que** de tasses de lait. Le B a **moins** de tasses de chocolat et 1 tasse de lait"
EMMANUEL : "La recette **A** parce qu'il y aura **plus** de lait, mais ça laissera **plus de goût** vu qu'il y a **plus** de chocolat."

NATHALIE : "C'est la **B** car si le A serait égale, il y aurait 4 parts de chocolat."
JENNIFER : "La recette **B**. Dans la recette A, il y aura 1 entière et 1 demi part de chocolat dans chaque bol [*de lait*] et dans la recette B il y aura 2 parts entière dans le bol [*de lait*]."
ÉRIC : "Recette **B**, parce qu'on met 1 verre noir dans le blanc et après il reste encore 1 noir. Alors que dans la recette A le dernier verre [*après avoir fait le mélange 2 verres de chocolat pour 2 verres de lait, implicitement reconnu équivalent au 1 pour 1*], il faut le partager en 2.
MARJORIE : "Recette **B**, parce qu'il n'y a qu'un verre de lait et deux au chocolat. Parce que dans le A il y a trois verres au chocoat.



ANTOINE : "le mélange **B**, parce que dans la recette A il y a que $1 + \frac{1}{2}$ de chocolat, et dans la recette B il y a 2 parts de chocolat."

CÉLIA : "Les deux ont le même goût. Si pour 2 parts de chocolat, il y a 1 part de lait [*recette B*]et que pour la recette A on rajoute 1 part de chaque, les deux auront le même goût."

Transparent Cop/03-9
Un problème de mélange en fin de 5ème

5 litres du liquide A pèsent 3 kg. 7 litres du liquide B pèsent 4 kg. On remplit deux récipients identiques, l'un avec le liquide A, l'autre avec le liquide B. Lequel des deux récipients ainsi remplis est le plus lourd ?

Classe expérimentale **procédures majoritaires** (> 10%)
LOÏC : $\frac{5}{3}=1,6666666667.$; $\frac{7}{4}=1,75$. Le liquide B est le plus lourd. **PERRINE** : Liquide A : $\frac{5}{3}\times\frac{4}{4}=\frac{20}{12}$; liquide B : $\frac{7}{4}\times\frac{3}{3}=\frac{21}{12}$. On constate qu'en ayant le même dénominateur, le numérateur de B est plus grand. Donc : B > A (**Modalité 9eFrac** : **33%**)
JENNIFER : 1 litre de A : $\frac{3}{5}$ de kilo ; 1 litre du liquide B : $\frac{4}{7}$ de kilo. $\frac{3}{5}\times 10=\frac{30}{5}=6$; $\frac{4}{7}\times 10=\frac{40}{7}$. Or : $5<\frac{40}{7}<6$. Donc A est le plus lourd. (**Modalité 1eFrac** : **13%**)
Absence de réponse ou réponse lapidaire : « Même poids » ; « B » ; « A » …. (**Modalité 0** : **33%**)
Classe témoin **procédures majoritaires** (> 10%)
ALEXANDRA : 5l = 3kg ; 7l = 4kg. Le récipient avec le liquide B sera plus lourd, car le liquide B est plus lourd que le liquide A (**Modalité 9a** : **23%**)
ESTELLE : liquide A : 5 ÷ 3 = 1,6; liquide B : 7 ÷ 4 = 1,75. Le récipient B est le plus lourd parce que si on divise la quantité avec le poids c'est le récipient B le plus lourd (**Modalité 9eDiv** : **18%**)
YANNICK : Liquide A est le plus lourd. Car au début il y a 2 litres de différence entre A et B mais que 1 kg de différence . Donc si on remplit un récipient de même taille avec les deux liquides, A est le plus lourd. (**Modalité 9f** : **14%**)
CLAIRE : Pour 35 l : liquide A = 21 kg (3 x 7) ; liquide B = 20 kg (4 x 5). c'est le liquide A qui pèse le plus lourd car pour 35 litres, il pèse 21 kg. (**Modalité 1d ou 9d** : **14%**)

Transparent Cop/03-10
Cahier des charges pour une ingéniérie d'enseignement des rationnels

1. Séparer l'univers physico-empirique des grandeurs de l'univers mathématique des rationnels qui diffèrent sur le **projet** (étude d'objets du monde sensible vs étude de nombres), sur la **méthode** (expérimentale vs hypothético-déductive), les **moyens d'investigation** (mesures vs mobilisation de registres).
2. Dans l'univers physico-empirique, séparer les différents types de problèmes de rapports de grandeurs.
3. Dans l'univers mathématique, séparer les divers registres mobilisés afin de repérer la complexité et la spécificité de chacun.
4. Articuler :
   a. dans l'univers physico-empirique, les problèmes physiques entre eux ;
   b. l'univers physique / l'univers mathématique ;
   c. dans l'univers mathématique, les divers registres entre eux, afin de concevoir des objets, les rationnels, au-delà de leurs représentations hétérogènes.

Transparent Cop/03-11
Gradu5 et la démarche expérimentale

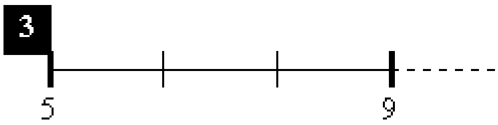


Figure 1 : déposer 8 dans un contexte peu favorable

Ressource principale : saisir un nombre par lequel on souhaite subdiviser chaque intervalle initial (ci-dessous par 3).

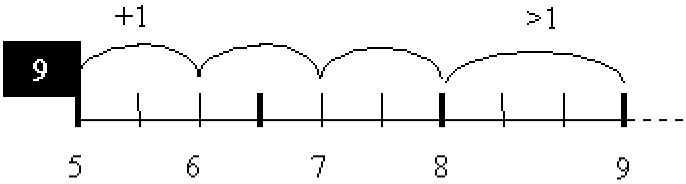


Figure 2 : une tentative qui échoue mais ouvre la voie d'un nouvel essai : modifier soit le regroupement unitaire, soit la resubdivision

Possibilité ouverte d'une évolution vers un constat du type : ce serait plus simple d'attraper le pas unitaire si le nombre total de sous-intervalles était un multiple de **4** (4 = 9 – 5)

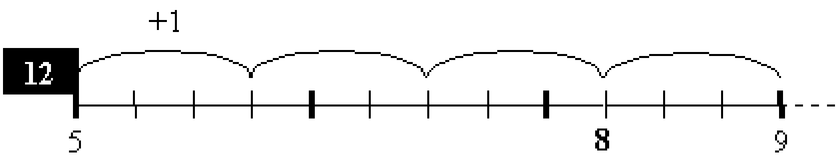
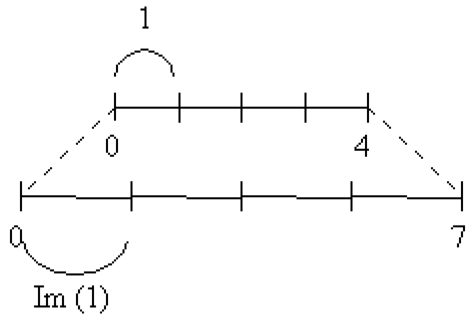


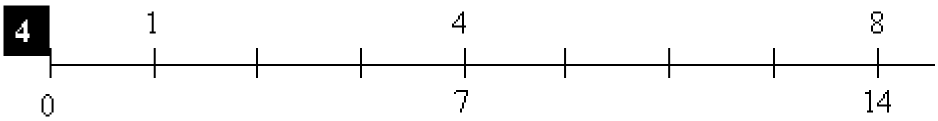
Figure 3 : la procédure experte pour déposer 8

Transparent Cop/03-12

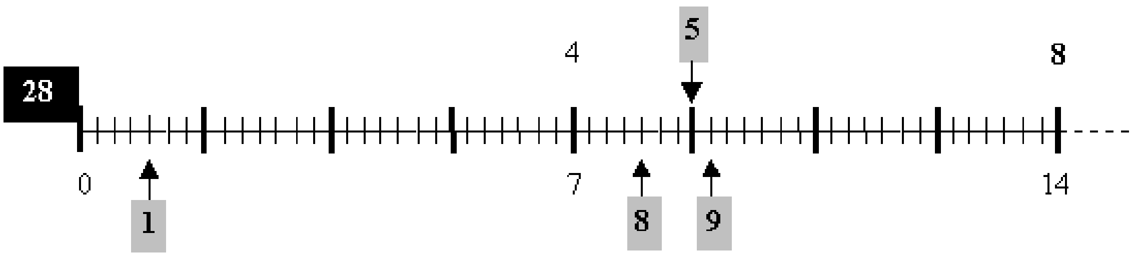
Produit par un rationnel



Dilatation *x définie par x* (4) = 7



Le rationnel-dilatation *x*, exprimé au moyen d'une double échelle



La dilatation $\times\frac{7}{4}$: recherche de l'image de 5
puis de l'antécédent de 8

Transparent Cop/03-13
Fraction d'un nombre

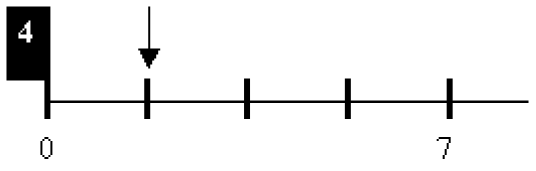


Figure 4 : un quart de sept ou sept divisé par quatre

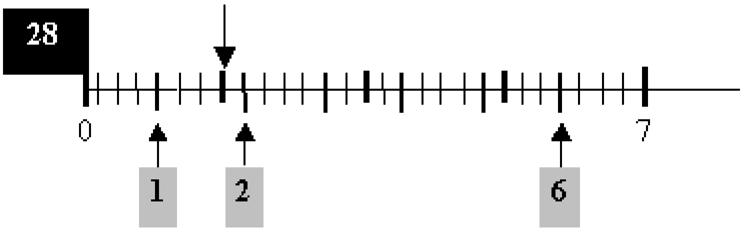


Figure 5 : sept fois un quart

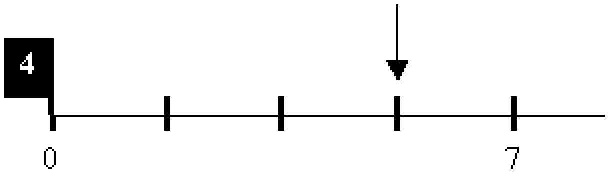


Figure 6 : trois quarts de sept

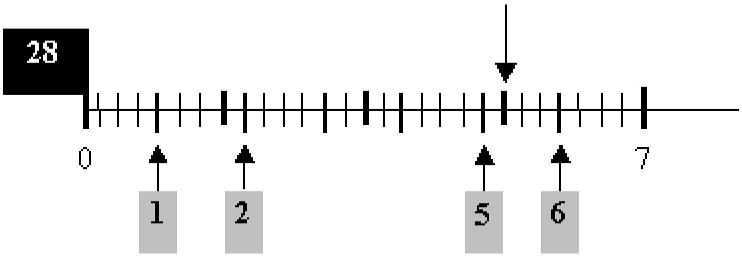


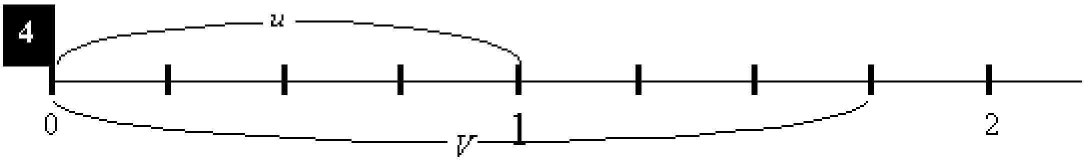
Figure 7 : trois fois sept…quarts ou vingt-et-un quarts

TransparentCop/03-14
Le registre des droites graduées (suite)

1. La droite graduée n'est pas qu'un mode d'expression et de traitement des rationnels, c'est une interface entre les univers physico-empirique et mathématique.
2. Munie d'une simple ou d'une double échelle, elle permet d'interpréter et de traiter l'ensemble des problèmes physiques et mathématiques abordables à ce stade de la scolarité.
3. Elle mérite donc sa place de registre central pour prendre en charge les articulations annoncées dans le programme de recherche.
4. Sa mobilisation spontanée par des lèves n'est pas envisageable. Il faudra donc la provoquer.

Transparent Cop/03-15
La droite graduée et les problèmes étudiés de rapports de deux grandeurs

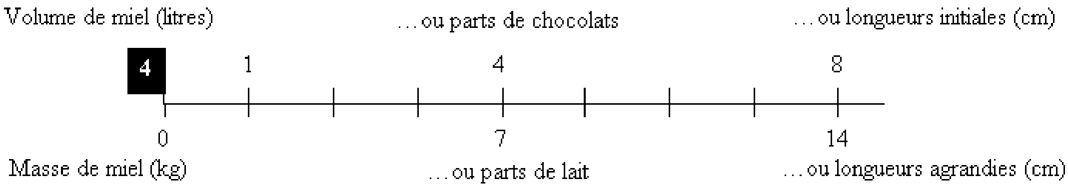
Problèmes de mesure



$$V = \frac{7}{4}u$$

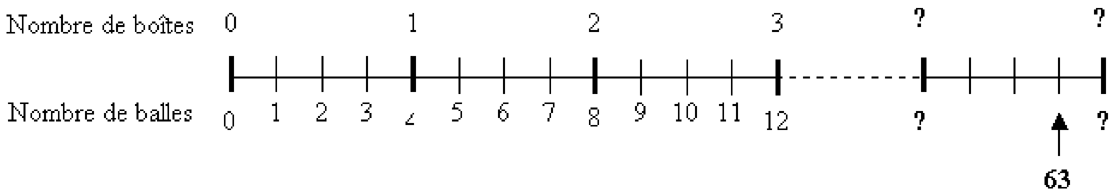
Rapport de deux grandeurs différentes ; mélanges ou fréquences ; dilatations.

Exemple étudié : 4 pour 7 (respectivement 4 devient 7)

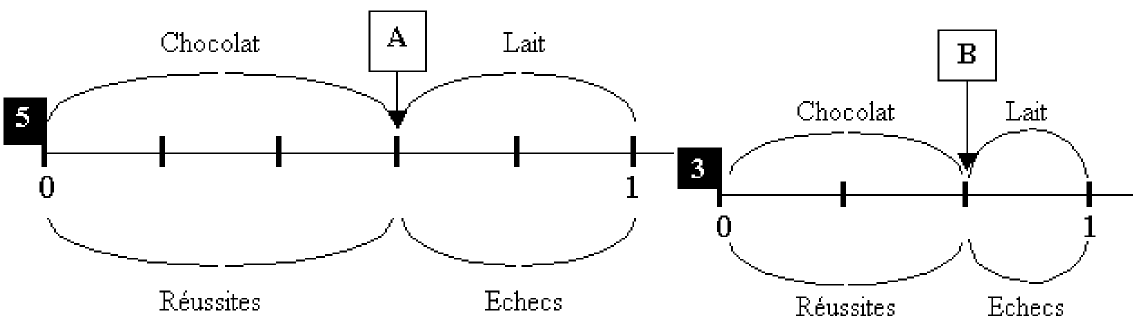


Changement d'unité :

Quantité de balles de tennis, mesurée balle par balle, en fonction de la quantité de balles mesurée en nombre de boîtes (de 4 balles).



Comparaison de mélanges ou de fréquences (3 contre 2 vs 2 contre 1)



BIBLIOGRAPHIE

Adjiage R. & Heideier A. (1998), *didacticiels de la série Oratio*, éditions Pierron, 57206 Sarreguemines.
Adjiage R. (1999), *L'expression des nombres rationnels et leur enseignement initial*, thèse, IREM, ULP Strasbourg 1.
Adjiage R. et Pluvinage F. (2000), *Un registre géométrique unidimensionnel pour l'expression des rationnels*, RDM, La Pensée Sauvage (éd), Grenoble, Vol.20.1, pp.41-88.
Adjiage R. (2001a), *Fondements théoriques et présentation des logiciels de la série ORATIO,* Actes du XXVII[e] colloque Inter-IREM, pp 309-317, IREM de Grenoble, 100 rue des Mathématiques BP-41, 38402 Saint Martin d'Heres cedex.
Adjiage R.(2001b) *Maturations du fonctionnement rationnel. Fractions et décimaux : acquisitions d'une classe, projets de* ***programme 2000*** *pour l'école élémentaire*, Annales de didactique et de sciences cognitives, IREM de Strasbourg, Vol 7, pp. 7-48.
Adjiage R. (2003 ?), *Registres, grandeurs, proportions et fractions*, Actes du colloque Argentoratum 2002, Annales de didactique et de sciences cognitives, IREM de Strasbourg, Vol 8 – à paraître.
Alarcon J. (1982), *L'appréhension des situations probabilistes chez des élèves de 12-14 ans : résultats d'une enquête proposée à des élèves de 4ème et de 5ème*, thèse de 3ème cycle, IRMA, ULP Strasbourg 1.
Brousseau G. (1981), *Problèmes de didactique des décimaux*, RDM, Vol 2.1, pp. 37-128, La Pensée Sauvage (éd), Grenoble.
Brousseau G. (1986), *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, thèse, Bordeaux.
Brousseau G. et N. (1987), *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, IREM de Bordeaux.
Brousseau G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, La Pensée sauvage, éditions,Grenoble.
Comin E. (2000), *Proportionnalité et fonction linéaire. Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire*, thèse, Université de Bordeaux 1.
Carraher D. W. & Dias Schliemann A. L. (1991), *Children's Understanding of Fractions as Expressions of Relative Magnitude*, PME XV, pp. 184-193, Assisi.
Douady R. et Perrin M.J., (1986), *Nombres décimaux*, liaison école-collège, IREM, Université de Paris VII, Paris.
Dupuis et Pluvinage, (1981), *La proportionnalité et son utilisation*, RDM Vol. 2, pp. 166-212, La Pensée Sauvage (éd.), Grenoble.
Duval R. (1993), *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vol. 5, pp. 37-65, IREM de Strasbourg.
Duval R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Bern.
Duval R. (1996), *Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ?* RDM, Volume 16-3, pp. 349-382, La Pensée Sauvage (éd), Grenoble.
Duval R. (1998-1), *Signe et objet, trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vol. 6, pp. 139-163, IREM de Strasbourg.

Duval R. (1998-2), *Signe et objet, questions relatives à l'analyse de la connaissance*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vol. 6, pp. 165-196, IREM de Strasbourg.

Duval R. (2001), *Comment décrire et analyser l'activité mathématique ? Cadres et registres*, Actes du colloque « Journée en hommage à Régine Douady », pp. 83-105, IREM Paris 7.

Figueras O. ; Filloy E. ; Valdemoros M. (1987), *Some Difficulties which Obscure the Appropriation of the Fraction Concept*, PME XI, vol..1, pp. 366- , Montréal.

Hart K. & Sinkinson A. (1989), *They're useful - Children's view of Concrete Materials*, PME XIII vol. 2, pp. 60- 66, Paris.

Julo J. (1995), *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*, Presses Universitaire de Rennes.

Julo J. (2000), *Aider à résoudre des problèmes, Pourquo ? comment ? quand* ? Actes du XXVIIe Colloque Inter-IREM des formateurs chargés de la formation des maîtres, pp. 9-28, IREM de Grenoble.

Kieren T.E., (1980), *The rational number construct - its elements and mechanism*, in T.E. Kieren (ed), Recent Research on Number Learning, ERIC/SMEAC, pp. 125-150, Columbus.

Klein Étienne, (2000), *L'atome au pied du mur*, Éditions Le Pommier-Fayard.

Legrand Marc, (2000), *Sciences, Enseignement, Démocratie et Humanisme*, Actes du XXVIIe Colloque Inter-IREM des formateurs chargés de la formation des maîtres, pp. 9-28, IREM de Grenoble.

Noelting G., (1980), *The development of proportional reasoning and the ratio concept*, Educational Studies in mathematics, Vol. 11, pp. 217-253, Cambridge.

Pitkethly A. & Hunting R., (1996), *A Review of Recent Research in the Area of Initial Fraction Concepts*, ESM vol. 30 N° 1, pp. 5-37 , Cambridge.

Pluvinage F., (1998), *La nature des objets mathématiques dans le raisonnement*, Annales de didactique des mathématiques, volume 6, pp. 125 - 138, IREM de Strasbourg.

Ratsimba-Rajohn H. (1982), *Eléments d'étude de deux méthodes de mesure rationnelle*, RDM vol.3.1., pp. 66 - 113, La Pensée Sauvage (éd), Grenoble.

Streefland L. (1993), *The Design of a Mathematics Course, a Theoretical Reflection*, Educational Studies in Mathematics, Vol. 25, pp. 109-135, Dordrecht, Holland.

Vergnaud G. et Laborde C. (1994), *Apprentissages et didactiques, où en est-on ?*, Hachette Education (ed), pp. 57-93, Paris.