# PROCESSUS DE FORMATION DE PE1 ET ANAMNÈSE[1] GÉOMÉTRIQUE.

**Alain Kuzniak**
**Jean-Claude Rauscher**
IUFM d'Alsace, IREM de Strasbourg

**Résumé :**

Que reste-t-il de l'enseignement de la géométrie lorsqu'on a presque tout oublié et qu'on doit à son tour enseigner cette discipline ?

Lors du colloque Copirelem 2002, nous avons présenté un dispositif de formation qui sur un temps bref tente de sensibiliser les étudiants à la diversité des approches de la géométrie.

Dans cet atelier, nous revenons sur ce dispositif mais nous essayons aussi d'envisager les informations que nous apportent les réactions des étudiants sur l'état de l'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire

## PRÉSENTATION DE L'ATELIER.

Lors du colloque Copirelem de La Roche sur Yon, nous avons présenté aux participants puis discuté avec eux un dispositif de formation expérimenté lors de l'année 2001/2002. Sur un temps bref, il tente de sensibiliser les étudiants à la diversité des approches de la géométrie. Les étudiants doivent résoudre des problèmes puis effectuer un retour réflexif sur leurs productions.

Cette année, nous avons à nouveau présenté, mais plus succinctement, notre action de formation légèrement modifiée par rapport à l'année 2001/2002 pour mieux tenir compte des contraintes institutionnelles.

Plus succinctement car c'est en fait une autre question que celle du dispositif de formation que nous avons mis plus particulièrement au centre de notre atelier cette année : c'est la question des connaissances acquises par les étudiants et des conceptions de la géométrie qu'ils gardent de leur scolarité. Les réactions des étudiants peuvent donner des indications sur l'état de l'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire .

Quelques productions et réactions d'élèves de troisième à propos des mêmes supports ont contribué à notre exploration.

L'examen de l'évolution de deux étudiants PE montre enfin les possibilités et les limites de notre procédure de formation.

[1] Anamnèse : renseignements fournis par le sujet ou son entourage sur l'histoire de sa maladie.

## PRÉSENTATION DU PROCESSUS DE FORMATION.

Le processus de formation comporte deux grandes phases pour les étudiants. Il se déroule sur trois séances d'environ trois heures.

1. La **première phase** repose entièrement sur un questionnaire écrit et individuel dont certains éléments servent ensuite à la deuxième phase gérée plus collectivement.

Trois exercices (Annexe 1) :

Deux exercices de mathématiques de fin de Collège que les étudiants doivent résoudre et sur lesquels ils sont invités à exprimer « les incertitudes ou les difficultés qu'ils y ont rencontrées ».

Un exercice de début de Collège où, cette fois, les étudiants doivent s'interroger sur « les incertitudes ou les difficultés que les élèves peuvent rencontrer dans cet exercice ». Cette formulation les invite à dépasser leur posture d'étudiant pour adopter celle de leur futur métier.

**Tableau résumé de la phase 1.**

| | Tâche principale à effectuer dans l'exercice. | Tâche à effectuer par l'étudiant après avoir résolu l'exercice. | Fonction de cette deuxième tâche. |
|---|---|---|---|
| Exercice 1<br>Niveau 4ème | Prendre position sur des affirmations au sujet de la nature d'un quadrilatère et la justifier. | Évoquer les incertitudes ou les difficultés rencontrées par l'étudiant lui-même | Regard de l'étudiant sur ses connaissances. |
| Exercice 2<br>Niveau 4ème | Prendre position au sujet de la nature d'un quadrilatère et la justifier.<br>Modifiez l'énoncé et justifier cette modification | | |
| Exercice 3<br>Évaluation nationale 6ème. | Trouver la longueur d'un segment dans une figure et expliquer sa réponse. | Imaginer les incertitudes ou les difficultés rencontrées par les élèves | Se représenter les conceptions et connaissances des élèves. |

2. La **deuxième phase** propose aux étudiants :

- Une activité pouvant mettre en jeu la Géométrie I aussi bien que la Géométrie II (voir plus loin le cadre théorique évoqué à ce propos).
- Deux reprises concernant des productions liées au questionnaire précédent. Ceci permet aux étudiants un retour réflexif sur leur propre rapport aux contenus mathématiques mis en jeu dans les exercices.
- Une institutionnalisation des repères utilisés pour situer les activités en géométrie et les enjeux des apprentissages à l'école.

L'activité consiste à compléter des arcs de cercle dont on ne connaît pas les centres. Les étudiants sont libres du choix des instruments et les méthodes utilisées. Des justifications sont sollicitées a posteriori.

La première reprise s'intitule *"Géométrie : Charlotte et Marie, qui a raison et pourquoi ? Les étudiants ne sont pas d'accord…"*. (Annexe 2). Les étudiants ont à lire puis à analyser et à caractériser quatre réponses données à l'exercice 1 de la phase 1. Ils doivent aussi dire de quelle réponse leur production initiale était proche et pourquoi, avant de signaler s'ils modifieraient maintenant leur réponse et dans quel sens.

La semaine suivante, il est proposé aux étudiants une feuille avec les résultats codés de leurs productions et de leurs évolutions. Le travail consiste à mettre en parallèle les exercices, les réponses, les codages pour saisir la signification de ces derniers et ainsi prendre connaissance du cadre théorique qui sous-tend l'analyse. GI et GII sont ainsi présentés. Les discussions qui s'engagent permettent de situer la relativité de la pertinence de l'une ou l'autre réponse.

Enfin, le dernier travail porte sur l'exercice 3, des productions d'élèves de sixième sont données et doivent être analysées par écrits individuels. La synthèse à l'oral des réponses permet de faire un point sur les enjeux des apprentissages en géométrie à l'école et au début du collège.

**Tableau résumé de la phase 2.**

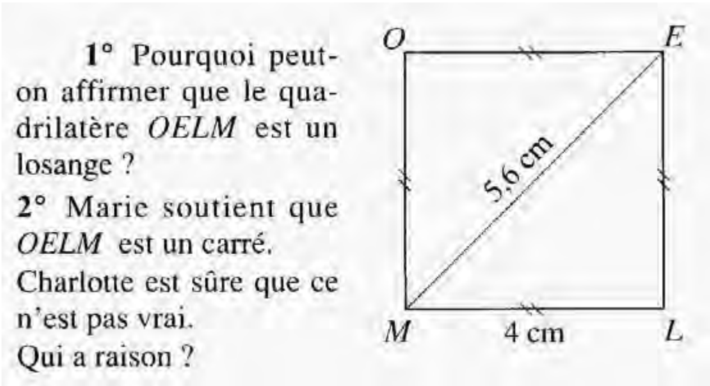
| Corpus pris en compte dans la deuxième phase | Tâches à effectuer par les étudiants | Fonction de la tâche et effets recherchés. |
|---|---|---|
| | Compléter des arcs de cercles dont le centre n'est pas connu. | Mise en œuvre d'une géométrie instrumentée se situe dans une géométrie I mais qui peut faire appel à la géométrie II pour déterminer ou justifier les constructions. (références aux géométries Iet II non explicitées par l'enseignant) |
| Quatre réponses d'étudiants à l'exercice 1 produites lors de la première phase. | - Analyser les réponses.<br>- Situer sa propre production par rapport aux quatre proposées.<br>- Signaler de quelle production on se rapprocherait si c'était à refaire. | Regard comparatif sur les connaissances et conceptions des étudiants.<br>Effet : retour réflexif sur ses propres conceptions. |
| Feuille avec les résultats codés du groupe | Chaque étudiant doit se repérer. Commentaires en parallèle de la feuille de codage et des exercices. | Prise de conscience de la signification du codage. Discussions autour de la pertinence des réponses.<br>Effet : remise en cause de points de vue initiaux. Initiation au cadre théorique GI et GII |
| Quatre productions d'élèves issues de l'évaluation nationale. | Analyser les productions des élèves. | Comparer les conceptions des élèves à ce qu'on en imaginait a priori.<br>Effet : repérage d'enjeux d'apprentissage à l'école primaire.<br>Synthèse à ce sujet |

## ANALYSE DES EXERCICES DONNÉS AUX ÉTUDIANTS LORS DE LA PREMIÈRE PHASE.

Les exercices sont choisis pour mettre les difficultés des étudiants en perspective avec celles que rencontrent les élèves de l'école primaire ou du collège.

Dans tous les exercices proposés, une figure est présente. Les données du problème sont indiquées soit sur la figure elle-même (angles droits codés, mesure de longueurs en cm…), soit dans un texte accompagnant la figure (ABCD est un rectangle, ABCD est un carré de côté 5 cm). Ces données permettent de répondre aux questions sans recours à l'apparence de la figure ou à des mesures supplémentaires. Il est donc possible de traiter ces exercices en Géométrie II. Dans les deux premiers exercices, la conclusion donnée par le calcul est en contradiction avec l'appréhension perceptive. Détaillons ce point sur le problème de Charlotte et Marie (Exercice 1).

L'exercice choisi (Hachette Cinq sur Cinq 4ème 1998, page 164) entre dans cette catégorie d'exercices de géométrie où se pose clairement la question de l'existence d'un espace de travail idoine pour résoudre le problème.




Le dessin proposé à l'étude ressemble à un carré mais son statut dans le problème n'est pas clair. Il possède certaines particularités d'un dessin coté : les côtés du quadrilatère sont codés et indiquent leur égalité, des mesures figurent sur le dessin. Mais quelle est l'origine de ces mesures ? S'agit-il de mesure effectuées sur une figure préexistante ou sont-elles, notamment pour la diagonale, le fruit d'un calcul ? La longueur de la diagonale [ME] est donnée au dixième de cm près (5,6 cm), ce qui peut incliner à penser qu'il s'agit d'une mesure réelle. Mais, comme d'autre part le problème est issu d'un livre de fin de collège, on peut penser à une mesure théorique plus conforme au contrat didactique usuel dans ce type de classe.

Ainsi, le dessin est-il une donnée première, un objet réel, que le problème se propose d'étudier ou résulte-t-il d'une construction à partir d'un cahier des charges précisé dans un texte ? Dans ce cas la réalisation pratique est-elle importante ou n'est-elle qu'un support pour aider le raisonnement ?

Le texte du problème doit normalement permettre de répondre à ces questions et déterminer le statut de l'objet figuré et ainsi orienter vers un paradigme géométrique précis. Mais de fait l'énoncé ne donne aucune indication sur ce point car comme le signale un étudiant : *il n'y a pas de textes pour l'énoncé, il n'y a qu'un dessin qui peut tromper.* Seul semble acquis le fait que le quadrilatère est un losange, savoir s'il s'agit d'un carré ou non est laissé à la charge de l'élève.

Finalement, est-ce Charlotte ou Marie qui a raison ? Une façon classique de traiter ce type d'exercice consiste à utiliser le théorème de Pythagore qui évite le recours à une mesure effective de l'angle. Mais là encore, nous allons voir resurgir l'ambiguïté sur le choix de l'espace de travail. Pour notre propos, nous introduirons deux formes du théorème de Pythagore, une forme abstraite classique portant sur des nombres réels et sur des égalités

*Si le triangle ABC est rectangle alors* $AB^2+BC^2=AC^2$

et une forme concrète pratique qui utilise des nombres approchés et, de façon moins courante, des figures approchées

*Si le triangle ABC est « à peu-près » rectangle alors* $AB^2+BC^2 \approx AC^2$

La première forme permet de basculer simplement dans une Géométrie qui s'écarte des données de l'expérience en raisonnant ici de manière élémentaire dans le cadre numérique. Quant à la seconde formulation, elle apparaît plutôt comme une forme avancée de Géométrie I.

Si l'on se place en Géométrie II, en utilisant la forme abstraite du théorème de Pythagore, alors on peut raisonner comme le propose un étudiant et donner raison à Charlotte :

*On sait que si OEM est rectangle en O alors on a* $OE^2+OM^2=ME^2$
*On vérifie* $4^2+4^2=5,6^2$ *et* $32 \neq 31,26$*. Donc OEM n'est pas un triangle rectangle.*

Si on utilise le théorème de Pythagore **pratique** dans un cadre mesuré alors on suivra plutôt le raisonnement proposé par un autre étudiant :

*C'est un carré si un angle au moins est droit entre deux côtés.*
*L'angle MLE est droit si et seulement si :*
$ML^2+LE^2=ME^2$ *d'après le théorème de Pythagore*
$16+16=32$ *or* $\sqrt{,32} \approx 5,6$
*Marie a raison OELM est un carré.*

En fait, il faudrait conclure qu'OELM est « presque » un carré mais comme on le sait, faute d'un langage adapté, il n'est pas possible aux élèves et aux étudiants de jouer sur ces différentes distinctions. Ils vont être de fait confrontés à un malentendu à la fois épistémologique et didactique sur lequel va s'appuyer notre séance de formation. En effet, ce problème très ambiguë en situation ordinaire de classe devient très riche pour une situation de formation et permet de travailler sur le jeu entre la Géométrie I et la Géométrie II.

## LES OUTILS THÉORIQUES SUR LEQUEL S'APPUIE LE DISPOSITIF

Pour élaborer ce dispositif de formation, nous utilisons les paradigmes géométriques. Toutes les productions des étudiants sont analysées grâce à une double approche qui croise paradigmes géométriques et niveaux de Van Hiele. Nous renvoyons à notre compte-rendu de la Roche sur Yon (Kuzniak-Rauscher (2003)) pour tous les détails.

Rappelons simplement le tableau général que nous avons élaboré pour rendre compte des résultats d'un étudiant qui a déjà parcouru tout le cursus scolaire.

**Tableau de Synthèse**

| | **Géométrie I** | **Géométrie II** | **Géométrie III** | |
|---|---|---|---|---|
| *Niveau 0* **Visualisation** | | | | pôle empirique (Intuition et expérience) |
| *Niveau 1* **Analyse** | | | *Outil heuristique* | |
| *Niveau 2* **Déduction informelle** | Transition | | | |
| *Niveau 3* **Déduction démonstration** | | Transition | | pôle théorique (raisonnement déductif) |
| *Niveau 4* **Abstrait Structure** | | | | |
| | **Horizon technologique** | **Horizon axiomatique** | **Horizon formel** | |

Nous donnons à titre d'illustration de notre méthode d'approche du travail géométrique l'analyse des réponses données par les étudiants et les collégiens. Signalons qu'un peu plus de la moitié des étudiants de cette cohorte avait choisi Marie (le carré) plutôt que Charlotte. Les problèmes avaient été donnés avant toute révision de géométrie.

En ce qui concerne les paradigmes géométriques nous avons pris en considération le fait que les étudiants ou élèves prennent en compte (Géométrie I) ou non (Géométrie II) des indices visuels ou des indices repérés par des instruments (règle graduée et équerre en l'occurrence). Nous classons aussi en GI les cas qui réfèrent au *théorème de Pythagore* ***pratique*** dans un cadre mesuré (voir plus haut).

Pour les niveaux de Van Hiele nous avons classé en niveau 1 les productions qui énumèrent une liste non minimales de propriétés des quadrilatères particuliers en jeu pour justifier les affirmations. En niveau 2, nous mettons en particulier les productions qui évoquent une relation d'inclusion correcte entre l'ensemble des carrés et l'ensemble des losanges. En niveau 3 figurent les productions qui utilisent des informations minimales et suffisantes pour justifier les affirmations.

## UN REGARD SUR DES PRODUCTIONS D'ÉTUDIANTS ET D'ÉLÈVES DE TROISIÈME.

Voici le corpus qui a été présenté aux participants de l'atelier et nos éléments d'analyse.

**Rep A** (C'est une étudiante de PE1, préparation du CAPE)

> *1°) Le quadrilatère OELM est un losange. Celui-ci répond aux caractéristiques d'une telle figure : les 4 côtés sont égaux ; les diagonales se coupent en leur milieu et forment un angle droit..*
>
> *2°) Les deux filles ont raison, OELM est un carré car il a 4 côtés égaux et 4 angles droits. Il est aussi un losange, même si cette figure qu'est le losange ne se construit pas forcément avec des angles droits.*

Elle justifie sa première réponse en énumérant une liste de propriétés des losanges. Nous classons donc sa production au niveau 1 de Van Hiele.

Les propriétés repérées sont justifiées en partie par des prises d'indices visuels ou instrumentés. Cette étudiante considère donc la figure dans sa réalité matérielle et nous la situons dans une Géométrie 1.

Il est à remarquer que la réponse à la 2$^{\text{ème}}$ question *"Les deux filles ont raison"* se rencontre assez fréquemment. Sa justification montre alors que l'énoncé "Charlotte est sûre que ce n'est pas vrai" est interprété à tort comme "Charlotte affirme que c'est un losange" occultant en fait l'affirmation "Ce n'est pas un carré". L'étudiante se focalise alors sur la question du lien entre l'ensemble des carrés et l'ensemble des losanges. C'est une question classique (mais qui n'est pas celle qui est posée) à laquelle l'étudiante sait répondre et qui montre qu'elle est entrée dans le classement des figures (niveau 2 de Van Hiele).

**Rep B.** Il s'agit d'une étudiante.

> *1 ) OELM est un losange car ses côtés successifs sont égaux deux à deux.*
>
> *2 ) Si OELM est un carré, alors MEL est un triangle rectangle en L. Selon le théorème de Pythagore on aurait alors,* $ME^2 = ML^2 + LE^2$ $\quad ML^2 + LE^2 = 16 + 16 = 32$
>
> $ME^2 = 5{,}6^2 = 31{,}36$
>
> *L'angle ELM n'est donc pas un angle droit.*
>
> *Par conséquent, OELM n'est pas un carré et c'est Charlotte qui a raison.*

Les seules informations qui sont utilisées sont celles qui sont données par l'énoncé (codage de segments de même longueur, indication sur les mesures des longueurs) et le théorème de Pythagore est utilisé dans toute sa rigueur formelle. Cette production réfère donc à la Géométrie 2.

Les propriétés utilisées pour démontrer qu'il s'agit d'un losange (4 côtés de même longueur) et qu'il ne s'agit pas d'un carré (contraposée du théorème de Pythagore) sont minimales et suffisantes. Nous référons donc cette production au niveau 3 de Van Hiele.

**Rep C.** Elève de 3$^{\text{ème}}$.

> *1°) Nous pouvons affirmer que c'est un losange car le quadrilatère OELM a ses quatre côtés de même longueur alors c'est un losange.*
>
> *2°) D'après la réciproque du théorème de Pythagore appliqué au triangle OME*
>
> $ME^2 = 5{,}6^2 = 31{,}36$ $\qquad ME^2 \neq OE^2 + OM^2$ *donc le triangle n'est pas rectangle*
>
> $OE^2 + OM^2 = 4^2+4^2=16+16=32$

*Le quadrilatère n'ayant pas d'angle droit est un losange donc Charlotte a raison.*

Cette production d'un élève de troisième se rapproche beaucoup de la production de l'étudiante précédente. On y repère un ancrage convaincu (répétition des affirmations "c'est un losange", "alors c'est un losange") dans une géométrie hypothético-déductive (G2, VH3). Le théorème de Pythagore (même s'il y a confusion entre "réciproque" et "contraposée") est utilisé dans toute sa rigueur.

**Rep D.** Etudiante PE1.

*1°) OELM est un losange car OE=OM=ML=LE et un losange a ses 4 côtés de même longueur.*
*2°) Marie a raison car tous les côtés du quadrilatère ont la même longueur et il y a au moins un angle droit. On peut le vérifier par le théorème de Pythagore .* $ML^2+LE^2=ME^2$

$$4^2+4^2=16+16=32$$
$$ME=\sqrt{,32} = 4\sqrt{2} \approx 5{,}6 \text{ donc } MLE=90°$$

Cette étudiante n'a pas tout oublié, bien au contraire…. Elle maîtrise bien les connaissances nécessaires pour justifier ses réponses. Mais elle utilise Pythagore dans sa forme pratique dans un cadre de mesures, forme que l'on rencontre quasiment jamais en 3$^{ème}$ mais qui apparaît après plusieurs années …quand on a tout oublié.…Elle utilise les propriétés de G2 pour travailler en G1.

**Rep E.** Élève de 3$^{ème}$

*1°) On peut dire que le quadrilatère OELM est un losange car : par hypothèse les quatre côtés du quadrilatère ont la même longueur or : un quadrilatère ayant quatre côtés de même longueur est un losange. Donc OELM est un losange.*
*2°) Marie a raison car le triangle OME est isocèle en O donc OEM=45° et OME=45°. Donc MOE=180°-45°x2=90°. Par hypothèse OM=OE. Le quadrilatère ayant deux côtés consécutifs perpendiculaires et de même longueur est un carré. Donc OELM est un carré.*

Nous avons un élève qui sait visiblement "raisonner" dans un niveau 3 de Van Hiele mais prend partiellement la figure dans sa réalité matérielle comme base de sa prise d'informations (angles droits) et se situe donc dans un paradigme G1 où les propriétés de G2 sont utilisées comme des outils pour produire de nouvelles informations.

**Rep F.** Étudiante PE1.

*1°) Les 4 côtés du quadrilatère sont parallèles entre eux et de même longueur OE=ML et OM=EL*
*Définition même du losange, de ce fait on peut dire que les diagonales ont même milieu et sont perpendiculaires entre elles.*
*2°) Marie a raison, OELM est aussi un carré car les côtés sont tous de même longueur : OE=ML=EL=OM=4cm.*
*<u>Rappelons</u> que le carré est aussi un losange mais qui a comme particularité d'avoir tous ses côtés de même longueur (<u>donc</u> forment des angles droits) et d'avoir ses diagonales de même longueur.*

Avec cette étudiante, nous avons un profil assez fréquent. La syntaxe utilisée pourrait référer à un niveau 3 de Van Hiele : quelques implications en partie correctes sont évoquées. Mais le corps de connaissance est peu fiable. En particulier nous retrouvons là un "théorème étudiant ou élève" assez fréquent qui témoigne de cette instabilité : tout quadrilatère qui aurait 4 côtés égaux serait un carré. Par ailleurs nous sommes clairement dans une Géométrie 1 car des indices visuels sont utilisés pour étayer les "raisonnements".

**Rep G.** Élève de 3ème

Remarque : la diagonale OL a été tracé et un angle droit avec ME a été marqué
*1°)On peut dire que OELM est un losange si :*
*-par hypothèse tous les côtés ont même longueur*
*-par hypothèse les diagonales (EM)* $\perp$ *(OL)*
*2°) Marie a raison en disant que OELM est un carré car :*
*- les diagonales ont même longueur*
*- les diagonales sont perpendiculaires*
*- les diagonales se coupent en leurs milieux*
*- OM=ML=LE=EO=4cm.*

Nous plaçons cette production en Géométrie I. En ce qui concerne le niveau de raisonnement, nous évoquerons le niveau 2 de Van Hiele car le lien entre certaines propriétés de quadrilatères et leurs natures est évoqué. Mais comme pour la production F, le corpus de connaissances en jeu n'est pas fiable.

### Comparaison étudiants-élèves de troisième :

En troisième, quand il est utilisé, le théorème de Pythagore l'est dans toute sa rigueur formelle qui semble résulter du contrat didactique fort mis en place dans cette classe d'examen. Les PE, quand ils l'utilisent, en proposent des interprétations différentes. Le contrat didactique est moins fort.

Au delà de cette différence on peut noter beaucoup de similitudes. Dans les deux populations on rencontre une variété importante quant au paradigme de géométrie utilisé. La différence entre dessin et figure (au sens de Parzysz) n'est pas faite, loin de là, ni pour les élèves de troisième ni pour les étudiants.

La forme de raisonnement est très variable également : tantôt on se base sur une accumulation d'arguments relatifs aux propriétés des figures, tantôt on utilise à bon escient les relations entre les propriétés des figures.

Le socle de connaissance des propriétés des figures est aussi variable en 3ème qu'en PE1. En particulier, dans les deux populations se rencontre l'idée que le fait d'avoir quatre côtés de même longueur suffit pour dire qu'il s'agit d'un carré. S'agit-il de la prégnance de l'aspect visuel de la figure ici proposée ou de la méconnaissance d'un degré de liberté ? Un test plus fin permettrait de voir ça de plus près. Mais surtout cette observation montre que tant pour certains étudiants que pour certains élèves de 3ème, un socle solide d'expérience de Géométrie I reste à construire : ce que nous appelions une géométrie de traitement ou une géométrie construite (Pluvinage-Rauscher 1986)

## ÉVOLUTION ET STABILITÉ DES ÉTUDIANTS

Nous avons donné aux participants de l'atelier les réponses complètes à l'exercice Charlotte et Marie de deux étudiants PE1, Cyril et Aurélie. Nous avons aussi donné leurs réponses à une partie de la dernière phase (voir annexe 2) où ils doivent revenir sur leurs réponses et les comparer avec celles d'autres étudiants.

<table>
<tr><th>Cas de Cyril</th><th>Cas d'Aurélie</th></tr>
<tr><td colspan="2">1ère phase (résolution de l'exercice 1 et évocation des incertitudes et difficultés rencontrées) :</td></tr>
<tr><td>Il a dessiné la diagonale OL et écrit 5,8 le long de cette diagonale. On voit aussi des traces de construction au compas de la perpendiculaire à(ML) passant par L.</td><td>Elle a dessiné la diagonale OL et a désigné le point d'intersection des diagonales par la lettre A.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Réponse à la question 1 :</td></tr>
<tr><td>OELM est un losange car tous les côtés sont égaux, chacun des côtés opposés est parallèle à l'autre et les diagonales se coupent chacune en leur milieu.</td><td>Un losange est un quadrilatère dont les 4 côtés sont égaux et dont les diagonales sont perpendiculaires. Or, dans le quadrilatère OELM, OE=EL=LM=MO. De plus [OL] est perpendiculaire à [ME].</td></tr>
<tr><td colspan="2">Réponse à la question 2 :</td></tr>
<tr><td>Je pense que c'est Charlotte car ses diagonales ne sont pas de même longueur. De plus en prolongeant la demi-droite [ML ) et en traçant (au compas) une médiatrice passant par L, cette dernière ne correspond pas exactement à EL.</td><td>OELM est un carré car il est formé de 4 angles droits. Marie a donc raison.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Quelles sont les incertitudes ou les difficultés que vous venez de rencontrer dans cet exercice ?</td></tr>
<tr><td>Au niveau visuel, on voit effectivement un carré. Incertitude quant aux réelles propriétés du carré et du losange.</td><td>Peut-on dire que les diagonales sont vraiment perpendiculaires ? Peut-on dire que le quadrilatère possède 4 angles droits ? En plaçant son équerre, oui. En calculant avec Pythagore, ce n'est pas exact, mais approximatif. 5,62 = 31,36 ≠ 32</td></tr>
<tr><td colspan="2">2ème phase (retour réflexif sur ses connaissances à partir du corpus de 4 productions d'étudiants dans la phase 1 )</td></tr>
<tr><td colspan="2">De quelle production, votre réponse initiale était-elle la plus proche ? Pourquoi ?</td></tr>
<tr><td>La A : j'ai aussi travaillé avec les diagonales en traçant la deuxième.</td><td>Je pense que ma production initiale est plus proche de celle de l'étudiant C, mais je crois n'avoir pas eu le temps de développer mon calcul. De plus j'ai hésité entre la démonstration avec Pythagore et l'observation de la figure. J'ai préféré (malheureusement) l'approximation et j'ai répondu que Marie avait raison.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Et si c'était à refaire maintenant, de quelle production votre réponse serait-elle la plus proche ?</td></tr>
<tr><td>La C : je pense que c'est la plus juste en raison de sa précision.</td><td>Je répondrais comme l'étudiant C, mais complètement cette fois.</td></tr>
</table>

Aurélie et Cyril n'appartiennent pas aux mêmes populations initiales que notre étude permet de dégager à partir des réponses au problème de Charlotte et Marie.

Cyril se rattache à un groupe très attaché au travail expérimental sur le dessin et à la notion de précision. Ces étudiants se situent en Géométrie I avec un appui net sur l'expérience. Cyril semble évoluer grâce à l'analyse des productions vers un groupe qui raisonne toujours en Géométrie I mais en se basant sur des propriétés qui peuvent dispenser de l'usage direct des instruments de mesure (dans notre cas le théorème de Pythagore pratique).

Aurélie est un cas particulièrement complexe que l'on ne peut analyser que grâce aux questions qui lui ont permis d'exprimer les difficultés qu'elle a rencontrées. Dans un premier temps, elle se situe plutôt dans une Géométrie I axée sur les propriétés. Mais ensuite, elle s'inscrit dans une perspective de Géométrie II qui s'éloigne du dessin pour raisonner au sein du cadre théorique. Elle fait partie des étudiants en transition qui semble profiter au mieux de notre dispositif.

## CONCLUSION

Nous terminons par quelques considérations sur la formation à assurer auprès des futurs PE et sur l'enseignement de la géométrie dans le cadre du collège et du lycée.

Nos observations permettent d'esquisser une première typologie des étudiants qui préparent le concours du professorat d'école. Elle donne des indications sur leurs besoins de formation dans le domaine de la géométrie.

**Un premier type** d'étudiants dont la situation initiale se caractérise par des connaissances solides en Géométrie II. L'étudiante B (Rep B) en est, à nos yeux, une représentante. Très souvent, il s'agit d'étudiants qui ont suivi préalablement des filières scientifiques. A priori ces étudiants sont bien armés, en tout cas pour réussir le volet 1 de l'épreuve du concours qui permet souvent d'évaluer la maîtrise par les candidats de ce type de géométrie. Mais le chemin qui reste à parcourir pour situer les enjeux de l'enseignement de la géométrie à l'école pour aller vers le collège n'est pas négligeable : il s'agit de concevoir que la Géométrie II n'est pas la seule vérité et qu'elle n'est pas transmissible d'emblée aux enfants. C'est là que notre dispositif de formation confrontant les étudiants à des productions d'élèves de début de collège (voir dernière ligne tableau résumé de la phase 2) permet parfois une prise de conscience. C'est le cas si l'on en croit cette étudiante qui déclare au sujet de réponses d'élèves de sixième à propos de l'exercice 3 (voir annexe 1) : *"J'ai été très surprise par le fait que les élèves mesurent le segment ."* Et une autre qui dit : *"Ces productions d'élèves me montrent que je ne réfléchis plus comme les enfants, au lieu de chercher plus simplement, je cherche toujours des propriétés, des théorèmes etc.* Un troisième se rend compte du fait que *"pour les élèves géométrie signifie, mesure et outil et donc règle"*

La réponse D est représentative d'**un deuxième type** d'étudiants. Ces étudiants n'ont pas tout oublié, bien au contraire. Ils maîtrisent assez bien les connaissances nécessaires pour justifier leurs réponses. Ils gardent de leurs études un bon souvenir des propriétés qu'ils utilisent pour travailler en Géométrie I, par exemple en utilisant le théorème de Pythagore dans sa forme pratique dans un cadre de mesures. Ces étudiants possèdent a priori les outils pour discerner les différents paradigmes en géométrie et comprendre certains enjeux de l'enseignement de la géométrie dans le cadre de la scolarité obligatoire. Le coup de pouce constitué par le retour réflexif sur des productions variées peut s'avérer suffisant : le cas d'Aurélie que nous avons considéré précédemment est éloquent à ce sujet.

Dans notre typologie, il reste **un troisième type,** très hétérogène**,** à considérer, le plus épineux pour les formateurs ! L'étudiante qui donne la réponse A en est un exemple. Avant de discerner certains enjeux de l'enseignement de la géométrie dans le cadre de la scolarité obligatoire, il faudra que ces étudiants puissent trouver ou retrouver une géométrie où les propriétés des figures s'ordonnent, puis s'organisent en un corpus de propriétés cohérentes. Le chemin est certainement encore paradoxalement plus long lorsqu'il faut revenir (comme pour l'étudiant qui donne la réponse F) sur un "vernis" de connaissances de Géométrie II. Il s'agit alors de reconstruire un corpus de connaissances et d'expériences de la Géométrie I pour entrer ensuite dans une Géométrie II avec un bagage plus assuré. Vaste programme, pour une formation au temps très mesuré.

Pour finir, une dernière et importante considération en forme de **question à propos de l'enseignement de la géométrie dans le cadre de la scolarité obligatoire**. Le fait que les types 2 et 3 soient massivement représentés chez nos étudiants permet de s'interroger sur la réussite du passage d'une Géométrie I à une Géométrie II dans le cadre des efforts d'enseignement au collège et au lycée. En effet, pour ces étudiants, "que reste-t-il quand ils ont tout oublié" ? Le dessin en géométrie semble finalement plus ou moins considéré comme l'objet réel de leurs investigations et questionnements ! Cela semble paradoxal, quand on sait la "rigueur" que les enseignants de collège et de lycée déclarent essayer de transmettre à leurs élèves. Mais sur les causes possibles d'un tel phénomène une enquête et une réflexion complémentaires sont nécessaires. Bien qu'ayant quelques hypothèses à ce sujet, nous ne les développons pas ici, nous contentant de renvoyer nos lecteurs et les participants à l'atelier à leurs réflexions et en leur donnant, espérons nous un rendez vous prochain à ce sujet.

## BIBLIOGRAPHIE


Fischbein E.(1987) *Intuition in Science and Mathematics*. An educational Approach. Reidel

Gonseth F. (1945-1954) *La géométrie et le problème de l'espace*. Ed du Griffon Lausanne.

Houdement C. et Kuzniak A. (1999) Quelques éléments de réflexion sur l'enseignement de la géométrie : de l'école primaire à la formation des maîtres *Revue Petit X n°51* Article repris dans la revue *Grand N n°58.*

Houdement, C. and Kuzniak, A. (2002). Pretty (good) didactical provocation as a tool for teachers' training in geometry. *Proceedings of CERME 2*. 292-304. Prague: Charles University. (Disponible sur le Web).

Houdement, C. and Kuzniak, A. (2002). Approximations géométriques *Revue l'Ouvert n°105.* Irem de Strasbourg. Université Louis Pasteur. Strasbourg.

Kuzniak A. et Rauscher JC, (2003) Autour de quelques situations de formation en géométrie pour les professeurs d'école, in *Actes du XXIXème colloque COPIRELEM, La Roche sur Yon, mai 2002,* IREM des Pays de la Loire.

Parzysz (2001) Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1. Actes du Colloque inter Irem des formateurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres. Université de Tours.

Pluvinage F., Rauscher J-C, (1986). La géométrie construite mise à l'essai, in *Petit x n°11*, IREM de Grenoble, 5-36

Rauscher J.C. (1993) L'hétérogénéité des professeurs face à des élèves hétérogènes : cas de l'enseignement de la géométrie au début du collège. Université de Strasbourg.

Rauscher J-C (1998), Quelques repères pour enseigner la géométrie au début du collège, in *Des Mathématiques en sixième,* Bulletin Inter-Irem Premier Cycle, p 115 à 127

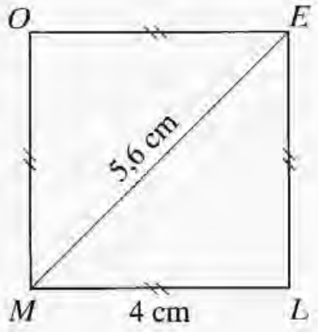
Van Hiele P.M. (1986) Structure and Insight. A theory of Mathematics Education. Academic Presss Orlando.

# Annexe 1: Documents de la Phase 1

## EXERCICE 1

**1°** Pourquoi peut-on affirmer que le quadrilatère *OELM* est un losange ?

**2°** Marie soutient que *OELM* est un carré.
Charlotte est sûre que ce n'est pas vrai.
Qui a raison ?




Pourquoi ?

**Réponse à la question 1 :**

**Réponse à la question 2 :**

**Quelles sont les incertitudes ou les difficultés que vous venez de rencontrer dans cet exercice ?**

## EXERCICE 2

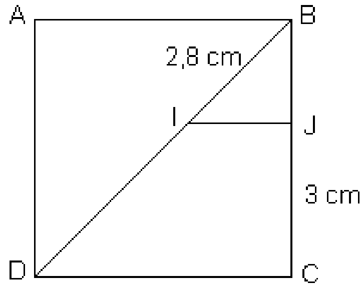
| | |
|---|---|
| Construire un carré ABCD de côté 5 cm.<br>1) Calculer BD.<br>2) Placer le point I de [BD] tel que BI=2,8 cm puis le point J de [BC] tel que JC=3 cm.<br>La droite (IJ) est-elle parallèle à la droite (DC) ? |  |

**Figure :**

**Réponse à la question 1 :**

**Réponse à la question 2 :**

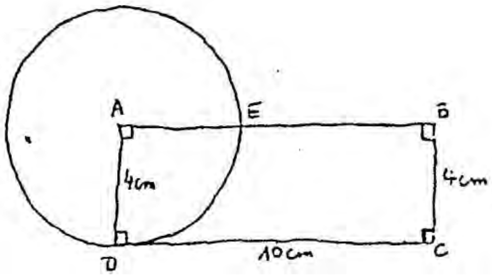
**Quelles sont les incertitudes ou les difficultés que vous venez de rencontrer dans cet exercice ?**

## EXERCICE 3

Voici un exercice posé en évaluation en début de sixième.
Répondre sur la feuille à la question posée.

**Exercice 14**

Sur ce dessin à main levée, on a représenté un rectangle ABCD et un cercle de centre A qui passe par D. Les mesures réelles sont en centimètres.
Ce cercle coupe le segment [AB] au point E.




Trouve la longueur du segment [EB]. ……………………………………………

Explique ta réponse : ……………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

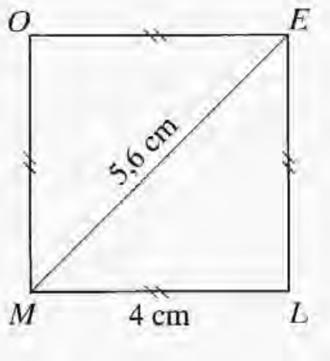
| |
|---|
| 2) Quelles sont les incertitudes et les difficultés que les élèves peuvent rencontrer dans cet exercice. |

## Annexe 2:
## Géométrie : Charlotte et Marie, qui a raison et pourquoi ?
## Les étudiants ne sont pas d'accord…

**Rappel de l'exercice 1 :**

**1°** Pourquoi peut-on affirmer que le quadrilatère *OELM* est un losange ?

**2°** Marie soutient que *OELM* est un carré.
Charlotte est sûre que ce n'est pas vrai.
Qui a raison ?




Pourquoi ?

Ci-dessous vous avez 4 réponses d'étudiants. Vous allez lire ces réponses et répondre ensuite aux questions qui figurent sur la deuxième page.

Réponses de l'étudiant A

> **1 )** *OELM est un losange car : ses quatre côtés sont égaux*
> *ses angles sont droits*
> *ses diagonales se coupent en formant des angles droits*
> Remarque : l'étudiant a construit la deuxième diagonale sur la figure
> **2 )** *Marie a raison c'est un carré, puisque en plus d'être un losange, OELM a ses diagonales de même longueur, OELM est un losange particulier.*

Réponses de l'étudiant B

> *1°) Les 4 côtés du quadrilatère sont parallèles entre eux et de même longueur OE=ML et OM=EL*
> *Définition même du losange, de ce fait on peut dire que les diagonales ont même milieu et sont perpendiculaires entre elles.*
> *2°) Marie a raison, OELM est aussi un carré car les côtés sont tous de même longueur : OE=ML=EL=OM=4cm.*
> *Rappelons que le carré est aussi un losange mais qui a comme particularité d'avoir tous ses côtés de même longueur (donc forment des angles droits) et d'avoir ses diagonales de même longueur.*

Réponses de l'étudiant C

> *1 ) OELM est un losange car ses côtés successifs sont égaux deux à deux.*
> *2 ) Si OELM est un carré, alors MEL est un triangle rectangle en L. Selon le théorème de Pythagore on aurait alors,* $ME^2 = ML^2 + LE^2$ $\quad ML^2 + LE^2 = 16 + 16 = 32$
> $ME^2 = 5{,}6^2 = 31{,}36$
> *L'angle ELM n'est donc pas un angle droit.*
> *Par conséquent, OELM n'est pas un carré et c'est Charlotte qui a raison.*

Réponses de l'étudiant D

> *1°) OELM est un losange car OE=OM=ML=LE et un losange a ses 4 côtés de même longueur.*
> *2°) Marie a raison car tous les côtés du quadrilatère ont la même longueur et il y a au moins un angle droit. On peut le vérifier par le théorème de Pythagore .* $ML^2+LE^2=ME^2$
> $4^2+4^2=16+16=32$
> $ME=\sqrt{,32} = 4\sqrt{2} \approx 5{,}6$ *donc MLE=90°*

**Nom :** **Prénom :**

***1ère question :Indiquez dans chaque production ce qui est <u>principalement</u> à remarquer et ce qui vous semble caractériser cette production.***

***Réponses de l'étudiant A :***

***Réponses de l'étudiant B :***

***Réponses de l'étudiant C :***

***Réponses de l'étudiant D :***

***2ème question : De quelle production, votre production initiale était elle la plus proche ? Pourquoi ?***

***3ème question : Et si c'était à refaire maintenant, de quelle production votre réponse serait elle la plus proche et pourquoi ?***

***4ème question : Finalement de Charlotte ou de Marie qui a raison et pourquoi ?***