# DES GRAINES ET DES SOURIS

**Eugène COMIN**
Professeur Lycée A. Daniel
Riberac (Dordogne)

**Résumé :**
La situation des "**graines et des souris**" a été expérimentée en classe de CM1 à l'école Jules Michelet de Talence . Elle a fait l'objet d'un travail d'ingénierie dans le cadre d'une thèse soutenue à l'université de Bordeaux 1 en octobre 2000 :
**"Proportionnalité et fonction linéaire**
**Caractères causes et effets didactiques des évolutions et des réformes**
**dans la scolarité obligatoire**"[1]
Une description de cette situation a fait l'objet d'un article publié dans Grand N n°72.
Le présent compte rendu résume la communication du 21 mai 2003.

## 1- INTRODUCTION

### 1) Pourquoi s'intéresser à la proportionnalité ?

Rappelons que la proportionnalité est une connaissance ancienne qui a joué un rôle moteur dans la construction des mathématiques. En décrivant des relations de dépendance entre grandeurs à l'aide des rapports, elle est à l'origine de l'étude des relations fonctionnelles. L'arrivée de l'algèbre a rendu caduque l'usage et le vocabulaire des proportions en mathématiques ; mais les structures numériques de la linéarité ignorent les fonctions sociales de la proportionnalité ; le vocabulaire des fonctions n'est pas utilisé pour décrire la proportionnalité des grandeurs : on ne dit pas couramment de « deux quantités proportionnelles » qu'elles sont « linéairement dépendantes ».

Dans l'enseignement élémentaire, l'étude des grandeurs et de la proportionnalité est à la base des différents apprentissages mathématiques mais, dans l'organisation scolaire française actuelle, les connaissances de la proportionnalité n'alimentent pas correctement l'étude algébrique des relations fonctionnelles faite dans le secondaire.

Plus précisément, différentes enquêtes ont fait apparaître principalement deux types de dysfonctionnement :

- Des difficultés à établir un lien entre "proportionnalité" et "fonction linéaire".
- Des usages inappropriés du vocabulaire de la proportionnalité pour décrire des relations numériques et des glissements de sens qui conduisent à des confusions dans les concepts mathématiques.

Nous avons apporté des explications à ces dysfonctionnements grâce à une étude didactique des conditions d'enseignement de la proportionnalité. En particulier, nous avons montré :

- D'une part que le cadre arithmétique de la proportionnalité et le cadre algébrique de la linéarité constituent un cloisonnement culturel de telle sorte que les

[1] DAEST; Université Victor Segalen; Bordeaux 2; 3 ter place de la Victoire; 33000 Bordeaux; tel 05 57 57 19 26

modèles de la proportionnalité issus de l'arithmétique élémentaire et le modèle "fonction linéaire" issu de l'algèbre moderne restent indépendants.

- D'autre part que l'absence d'une culture précise conduit à des usages inappropriés de termes sur certaines questions. Les nouvelles "manières de dire" qui résultent de ce flottement culturel deviennent de nouvelles "manières de penser" en rupture avec une culture mathématique classique.

Si on admet de plus, que la qualité des apprentissages de la proportionnalité pour les élèves dépend des connaissances des professeurs à ce sujet on en déduit facilement des conséquences en chaîne qui entretiennent une rémanence des dysfonctionnements observés.

Ces difficultés sont donc davantage liées à des questions de culture et d'enseignement qu'à des problèmes d'apprentissage.

Si on veut améliorer la qualité de l'enseignement, il faut repenser les curriculums scolaires en tant que processus d'apprentissage à long terme :

La situation "des graines et des souris" s'inscrit modestement dans ce projet.

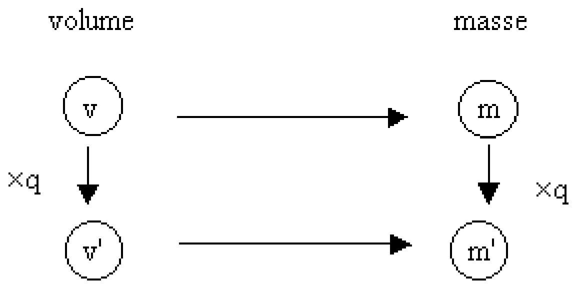
## 2) Pourquoi enseigner la proportionnalité ? Pourquoi ne pas enseigner directement la fonction linéaire en primaire ?

Avant de répondre à cette question, une explicitation succincte de l'objet mathématique "proportionnalité" s'avère nécessaire.

### *Le modèle général*

Nous dirons que deux grandeurs[2] sont proportionnelles si tout rapport entre deux éléments de l'une d'elles est égal au rapport entre les deux éléments correspondants de l'autre. Pour décrire la proportionnalité entre deux grandeurs il faut donc disposer d'un moyen de définir les rapports (multiplicatifs) dans chacune d'elles (rapports internes). Cette condition est réalisée quand les grandeurs sont mesurables[3].

Exemple : Il est connu que sous certaines conditions d'homogénéité la masse d'un corps est proportionnelle à son volume (si le volume est doublé ou triplé … alors la masse est doublée ou triplée …) :




Le « rapport interne »[4] q (2 ou 3 …) est conservé dans le passage d'une grandeur à l'autre.

---

[2] Nous ne considérons que des grandeurs arithmétiques telles que : masse, volume, longueur, température, etc.

[3] Nous dirons qu'une grandeur est mesurable si elle a une structure additive de semi-groupe archimédien. Certaines grandeurs ne sont pas mesurables car elles ne sont pas additives : c'est le cas des échelles (potentiel électrique, température en degrés Celsius, échelle de Richter, …) et des indicateurs (audience médiatique, intelligence, pollution, …).

[4] Le rapport de deux éléments d'une même grandeur est dit interne (ou scalaire) alors que le rapport de deux éléments issus de deux grandeurs distinctes est dit externe (ou fonctionnel). Les anciens ne

Le « rapport externe » entre la masse et le volume est inconnu.

Si on sait de plus que 10 centimètres cube de ce corps pèsent 78 grammes alors le rapport externe est explicitable et la relation de proportionnalité précédente établit une correspondance linéaire de coefficient connu, entre deux grandeurs mesurées : les quantités de centimètres cube et les quantités de grammes.

$$\begin{tikzcd}
\text{Nombre de cm}^3 & \text{Nombre de g} \\
10\ \text{cm}^3 \arrow[r, "\times 7{,}8\ \text{g/cm}^3"] \arrow[d, "\times q"'] & 78\ \text{g} \arrow[d, "\times q"] \\
(10\times q)\ \text{cm}^3 \arrow[r, "\times 7{,}8\ \text{g/cm}^3"] & (78\times q)\ \text{g}
\end{tikzcd}$$

Ce rapport externe : 78 g pour 10 $cm^3$ ou 7,8 $g/cm^3$ est une grandeur quotient connue sous le nom de masse volumique (chacune de ses valeurs est spécifique du corps considéré).

Cette correspondance induit elle-même une fonction linéaire de R dans R de coefficient 7,8 (ce coefficient dépend du choix des unités de masse et de volume) :

$$\begin{tikzcd}
\square & \square \\
10 \arrow[r, "\times 7{,}8"] \arrow[d, "\times q"'] & 78 \arrow[d, "\times q"] \\
10\times q \arrow[r, "\times 7{,}8"] & 78\times q
\end{tikzcd}$$

Dans cette correspondance, le rapport externe 7,8 est devenu un coefficient (un opérateur) sans "dimension". Cette formalisation s'accompagne d'une perte d'information. Le retour à la relation de proportionnalité précédente nécessite la connaissance des grandeurs étudiées et des unités utilisées !

Ces approches successives permettent de passer du cadre des grandeurs à celui des grandeurs mesurées où les quantités sont exprimées par des couples (mesure ; unité), puis au cadre des variables numériques (ou algébriques) où il est possible d'étudier formellement les propriétés de la fonction qui à tout nombre associe le produit de ce nombre par 7,8. Bien sûr, le cadre conditionne la mise en œuvre des moyens pour la reconnaissance d'une situation de linéarité et la détermination des éléments manquants.

Pour montrer que deux grandeurs sont proportionnelles, il faut trouver une raison de décider que tout rapport de deux éléments de l'une est égal au rapport des deux éléments correspondants de l'autre ; la difficulté est la justification de cette universalité. Dans le cadre des grandeurs mesurées, les rapports externes sont explicitables. On dispose alors d'un autre moyen de décider s'il y a proportionnalité entre deux grandeurs : il faut que le rapport externe soit constant. Dans le cadre numérique, il n'y a aucune raison pour que deux variables réelles x et y soient proportionnelles mais on peut construire de manière

considéraient que des rapports de grandeurs homogènes, ce qui créait un obstacle dit « obstacle de l'homogénéité ». On pourra consulter « Sophie René de Cotret ; 1985 ; étude historique de la notion de fonction ».

formelle une relation du type y=kx. On définit ainsi une fonction linéaire dont les propriétés résultent de la structure algébrique de R.

## 2- PROBLÉMATIQUE

### 2 - 1 Questions

#### *2-1-1 Pourquoi enseigner la proportionnalité ?*

Les connaissances mathématiques actuelles permettent de traiter la linéarité indépendamment des grandeurs mais les élèves de l'école primaire ne connaissent pas les nombres abstraits. Pour qu'ils puissent donner du sens aux différents objets mathématiques, il faut qu'ils réalisent des opérations sur des objets matériels connus. Il est donc nécessaire de modéliser la connaissance initiale de la linéarité dans son rapport avec les grandeurs. Par conséquent le milieu de référence pour l'école primaire est le domaine des grandeurs. Le répertoire des élèves s'enrichit progressivement de connaissances par une conversion des structures du milieu des grandeurs (rapport, mesures) en structures numériques (nombres entiers, décimaux, rationnels).

#### *2-1-2 Peut-on enseigner la « fonction linéaire » en primaire ?*

Une quantité est fonction d'une autre si toute variation de l'une entraîne ou accompagne une variation de l'autre, donc les notions de fonctions et de variables sont indissociables.

Pour abstraire la fonction linéaire de la proportionnalité des grandeurs, il est nécessaire d'établir une dialectique entre les notions de grandeurs et de variables numériques d'une part et les notions de rapports et de nombres d'autre part.

L'épistémologie génétique nous enseigne que les opérations formelles nécessitent de 11 à 12 ans d'âge. Il faut donc attendre le collège pour abstraire de la proportionnalité une formalisation telle que la fonction linéaire ; mais on peut, dès l'école primaire, organiser un enseignement qui prépare les élèves au saut de complexité que suppose cette abstraction. Celle-ci nécessite une connaissance même modeste sur les nombres rationnels, une pratique des techniques de la linéarité, une familiarité dans l'usage implicite des fonctions en relation avec l'idée de variable.

La situation "des graines et des souris" s'inscrit dans un **projet** d'apprentissage où la fonction linéaire apparaîtrait à long terme comme une abstraction qui modélise et réfléchit les connaissances de la proportionnalité entre grandeurs.

### 2 - 2 Articulation logique.

L'élaboration d'une situation adaptée au **projet** suppose l'analyse didactique des objets qui constituent l'environnement de la proportionnalité, pour une articulation logique et fonctionnelle qui leur permet d'entrer progressivement dans le répertoire des élèves en suivant une complexité croissante de leurs structures.

L'exploration de ces structures mathématiques en termes de variables, fonctions et rapports (nombres) permet d'ordonner cette complexité. Nous en donnons un bref aperçu.

*Variables*

Différents objets d'étude relatifs aux grandeurs puis aux variables numériques interviennent dans une relation didactique pour une genèse de cette notion. On peut les décrire en termes d'action pour des élèves en situation adidactique, par exemple :

- Comparer, ordonner, additionner plusieurs éléments d'une même grandeur.
- Déterminer l'élément inconnu d'une grandeur (ou une grandeur mesurée) réalisant certaines contraintes matérielles de la situation.
- Proposer des grandeurs mesurées répondant aux contraintes matérielles d'une situation.
- Proposer des mesures virtuelles pour faire fonctionner le modèle de référence.

*Fonctions*

L'idée de « variable » est étroitement liée à celle de « fonction ». Dans les situations d'action, les élèves peuvent, par exemple, être conduits à :

- Considérer plusieurs couples de grandeurs mesurées donnés au « hasard » mais avec une intention didactique.
- Rechercher un couple de grandeurs mesurées répondant à des contraintes matérielles dans une relation entre grandeurs.
- Proposer des couples de mesures de grandeurs hypothétiques (possibles ou imaginaires) faisant fonctionner le modèle de la situation de référence.
- Considérer un couple de grandeurs mesurées comme caractéristique d'une relation entre grandeurs.

*Nombres*

Dans ces tentatives de description des différents objets qui peuvent intervenir dans une relation didactique, il y a toujours la présence des nombres qui est à la base de toute activité mathématique. Les nombres naissent de l'étude des rapports et de leur comparaison.

## 3- DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

### 3 - 1 Articulation fonctionnelle

Nous souhaitons proposer aux élèves des situations propices à l'émergence de raisonnements arithmétiques :

- qui apportent à chaque élève les connaissances nécessaires à son intégration sociale et professionnelle.
- qui soient adaptées aux développements génétique et cognitif du sujet.
- qui s'inscrivent dans un processus d'algébrisation à long terme.

Dans la recherche de situations didactiques, l'action objective est le fondement de la situation de référence. La mise en place d'une heuristique nécessite un milieu matériel qui problématise cette action de telle sorte que les techniques de la proportionnalité apparaissent comme moyens pertinents de résoudre le problème.

La progression, dans les situations envisagées, est contrôlée principalement par trois variables didactiques : la nature des nombres (naturels, décimaux, rationnels), la fonction des rapports (rapport interne, mesure, rapport externe) et le statut des connaissances mises en œuvre (implicites, explicites, formelles). Dans la suite nous ne proposons qu'un bref aperçu de cette organisation fonctionnelle.

### 3-1-1 La proportionnalité à l'école primaire.

Avant la mise en place des leçons sur la proportionnalité à l'école primaire, nous essayons d'adapter la complexité mathématique des concepts de fonction, de variable et de nombre, à ses différents cycles pour une genèse de ces notions du cours préparatoire au cours moyen.

*Qu'est-ce que concevoir la proportionnalité ?*

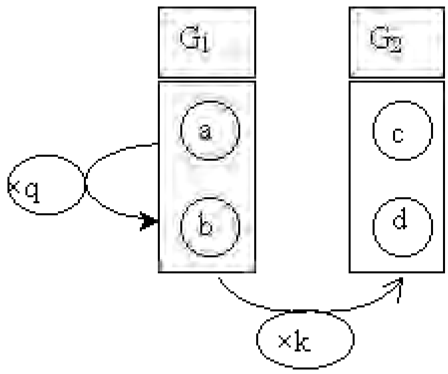
Au C.P.[5], la proportionnalité prend ses racines dans le comptage.

Au C.E., les sources de « relation de proportionnalité » sont la multiplication (éventuellement la division) ; mais les quantités en relation ne sont pas perçues comme des variables où l'une serait fonction de l'autre.

Au C.M., nous souhaitons trouver des situations où il y a obligation de considérer un terme comme une valeur particulière d'une grandeur qui varie en fonction d'une autre grandeur (Le nombre de graines est une fonction du nombre de souris). Il ne suffit pas de donner quelques valeurs particulières à une grandeur mais de faire prendre conscience aux élèves de tous les « possibles » d'une variable.

*Qu'est-ce que résoudre un exercice de proportionnalité ?*

Le modèle de base s'appuie sur la conservation des rapports internes (q). La structure mathématique standard est donc la proportion. La question standard est la détermination de la quatrième proportionnelle (d).




Les stratégies de résolution vont dépendre de la nature du rapport externe (k), de la nature du rapport interne (q) et des répertoires de connaissances des élèves. Réciproquement les techniques résolutoires vont engendrer des connaissances qui vont enrichir ces répertoires.

Au CE la base des calculs est la multiplication et la division ($a = 1$, $k = c$, $q = b$).

Au CM, la base des calculs est la proportion ($a \neq 1$).

La recherche d'une quatrième proportionnelle nécessite l'explicitation soit du rapport interne (q), soit du rapport externe (k).

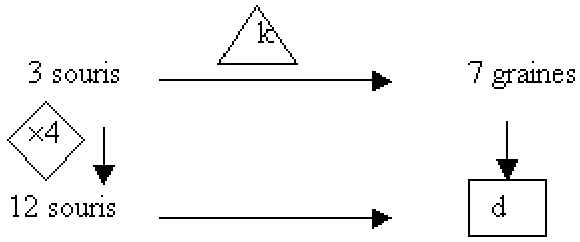
Trois cas peuvent se présenter :

- le rapport interne est calculable ; c'est un entier : $q = \frac{b}{a}$ alors $d = q \times c$.

---

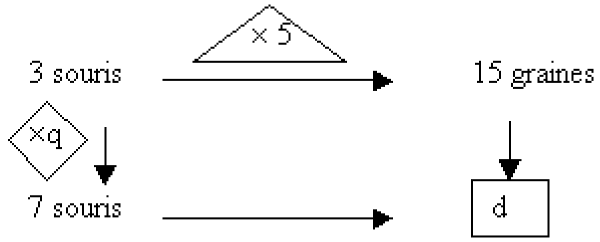
[5] C.P. : cours préparatoire ; enfants de 6 à 7 ans.
C.E. : cours élémentaire ; enfants de 7 à 9 ans.
C.M. : cours moyen ; enfants de 9 à 11 ans.

Exemple :




- le rapport externe est calculable ; c'est un entier : $k = \frac{c}{a}$ alors $d = k \times b$.

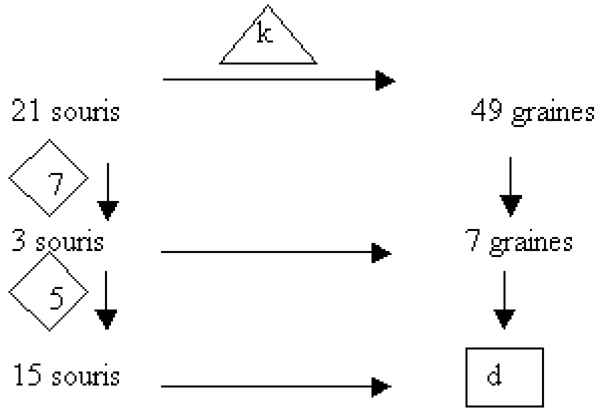
Exemple :




- Aucun de ces deux rapports n'est calculable :

**Si** on peut déterminer un "couple intermédiaire" grâce à la première procédure alors on peut ensuite déterminer le correspondant de b en réitérant cette même procédure :

Exemple :




**Sinon** on ne peut pas aboutir.

### *3-1-2 Choix des caractères pour la situation fondamentale*

*Les raisons d'utiliser la proportionnalité.*

Nous avons repéré trois raisons d'utiliser la proportionnalité : les lois physiques (la proportionnalité entre la masse et le volume exprime que le corps étudié est homogène), les nécessités logiques (l'agrandissement du puzzle est un exemple connu de similitude) et les conventions sociales (les prix, …).

Dans les deux premiers cas, les opérations effectives sur les objets matériels permettent aux élèves des validations perceptives mais ils sont confrontés aux difficultés de mesurages. La dispersion des mesures qu'ils obtiennent les conduit à mettre en doute l'adéquation de leurs stratégies et à en changer. Pour échapper aux contraintes de mesurage nous avons choisi de faire émerger le modèle linéaire de l'idée que les élèves se font de l'équité.

Dans la situation « des graines et des souris », on demande aux élèves de distribuer des paquets de graines à des groupes de souris ; on attend d'eux qu'ils utilisent de manière implicite les propriétés de la proportionnalité pour réaliser l'équité.

*Le concept d'équité.*

L'idée d'utiliser la proportionnalité comme modèle social pour réaliser l'équité nécessite un premier niveau d'abstraction de la part des élèves (qu'est-ce que l'équité ?) avant même l'élaboration du modèle.

Les premières expérimentations de la situation étudiée montrent que chez les enfants l'**équité** c'est « **l'égalisation des parts** », c'est le premier palier d'abstraction.

Pour égaliser les parts, les élèves vont élaborer les techniques de la proportionnalité. C'est en réalisant une distribution « régulière » que naît l'idée de **ration**[6], de part invariante de graine par souris. Le concept de ration nécessite donc un deuxième palier d'abstraction qui doit réfléchir l'idée de régularité, de « quantité de nourriture par souris » même quand cette quantité n'est pas un nombre entier de graines, c'est à dire n'est pas un nombre pour les élèves de cet âge. Il y a une nécessité de relation circulaire et d'étayage entre les idées de ration, d'équité, de distribution régulière.

*Le concept de ration.*

L'équivalence des couples représentant une même ration ne peut pas être validée par un mesurage mais par un raisonnement qui s'appuie sur la notion d'équité préalablement modélisée par « l'égalisation des parts ».

*Comparaison de deux rations.*

L'idée que des souris peuvent manger plus ou moins de graines suggère que la ration soit une grandeur variable. Les stratégies de comparaison dérivent de raisonnements sur ces variations. Les élèves vont construire un pré ordre sur les couples grâce au raisonnement de base suivant : la ration est d'autant plus grande qu'il y a plus de graines ou moins de souris.

*Somme de deux rations.*

On peut imaginer des situations pour engendrer la somme de deux rations, mais ce n'est plus l'équité qui contrôle cette opération. Il faut que les mêmes souris mangent deux fois. Par exemple, comment additionner les rations (3 graines pour 7 souris) et (8 graines pour 13 souris) ? Remarquons que la tentation serait grande chez les élèves de dire que 20 souris mangent 11 graines puisque additionner c'est grouper les objets.

## 3 - 2 Description de la situation « des graines et des souris »

L'objectif général de la situation pour les élèves, est de faire apparaître le modèle proportionnel comme une convention socialement équitable. Pour que les élèves puissent réaliser l'idée qu'ils se font de l'équité on leur demande d'attribuer des paquets de graines à des groupes de souris d'effectifs différents (ou projeter de le faire).

[6] Nous appelons "ration" la quantité de graines qui revient à chaque souris dans une "distribution équitable".

### *Pourquoi des souris ?*

On pourrait impliquer plus directement les élèves en leur demandant par exemple de se répartir des sucreries ; mais ce serait prendre le risque de les entraîner dans des querelles qui même après une issue favorable ne seraient pas sans laisser une certaine amertume. En même temps il est nécessaire de « dramatiser » la situation pour éveiller chez les élèves un sentiment de justice sociale qui fasse naître la nécessité d'élaborer des règles tout en gardant une certaine distance par rapport au milieu de référence qui oblige à objectiver ces règles.

### *Pourquoi des groupes de souris ?*

Si on demande aux élèves de distribuer des graines à l'ensemble des souris, leur tâche se résume à effectuer une division euclidienne. Dans la situation considérée, il y a obligation de faire correspondre une quantité de graines à chaque groupe de souris, la quantité de graines étant fonction du nombre de souris.

### *Pourquoi des paquets de graines ?*

Les paquets de graines et les groupes de souris contribuent à matérialiser les couples de la correspondance entre « grandeurs ». Chaque paquet concrétise la « quantité » de graines que l'élève doit prévoir pour un groupe de souris afin de réaliser l'idée qu'il se fait de l'équité. C'est cette obligation de faire des prévisions sur des quantités qui contribue à construire l'idée de « variable » et de « fonction ». La « dépendance d'origine intellectuelle », dictée par l'équité, entre les deux types de variables « quantité de graines » et « quantité de souris » conduit à considérer la « fonction » comme l'explicitation d'une dépendance entre deux grandeurs.

### *Pourquoi des graines ?*

Pour obliger l'élève à expliciter un nombre rationnel avec un couple d'entiers, il faut que ces entiers soient des mesures de grandeurs discrètes (non fractionnables). Les élèves ont des difficultés à concevoir que 3 souris puissent se partager équitablement 7 graines. Il serait plus confortable pour eux d'imaginer que 3 souris se partagent 7 biscuits car les biscuits sont sécables. Mais sous ces conditions les élèves pourraient expliciter la ration sous la forme « deux biscuits et un tiers de biscuit par souris ». Or ce n'est pas l'écriture standard à laquelle nous voulons aboutir. Nous souhaitons obliger les élèves à expliciter cette ration par un couple d'entiers : 7 graines pour 3 souris.

### *Pourquoi 5 leçons ?*

L'articulation fonctionnelle dans la construction des connaissances de la proportionnalité est dictée par la complexité croissante des différents objets décrits dans les analyses précédentes : variables, fonctions, nombres. L'ordination des différentes tâches de type « relation fonctionnelle » conduisant à la genèse de l'idée de fonction linéaire et de variable fait apparaître 3 degrés de liberté didactique qui permettent une certaine souplesse dans l'ordre des leçons :

1. Le rapport externe peut être entier ou fractionnaire dès les premières leçons.
2. On peut permuter l'apprentissage des différentes techniques avec la recherche de couples hypothétiques (notion de variables).
3. Il n'y a pas d'ordre privilégié dans l'introduction des différentes techniques : rapports interne ou externe, addition ou soustraction.

## 4. LES LEÇONS ET LEURS OBSERVATIONS

La longueur des 3 premières leçons nécessite deux séances d'une heure, les deux autres sont réalisables en une heure chacune. Pour chaque leçon, nous donnons une description succincte des différentes phases puis quelques résultats d'observation. (Les fiches didactiques figurent dans leur intégralité en annexe du mémoire de la thèse citée en préambule).

### 4 – 1 La proportionnalité comme élément de justice ; coefficient de proportionnalité (entier).

#### *4-1-1 Description de la leçon 1*

Dans cette leçon on attend des élèves qu'ils choisissent à la suite d'un débat la « proportionnalité » comme modèle d'équité. Dans une première approche les élèves cherchent à égaliser les parts. On pourrait créer la nécessité d'utiliser les rapports internes dès la première leçon en imposant une ration non entière. La complexité de la situation nous a conduit à choisir une progression où les élèves découvrent en premier lieu l'efficacité du coefficient de proportionnalité (la ration est entière) pour réaliser ce modèle.

Dans la première phase de cette leçon on provoque un débat entre élèves qui les conduit à produire des arguments pour rejeter une répartition inéquitable.

Le maître :

*Des bandes de souris à la recherche de nourriture, se sont emparé de paquets de graines et les ramènent au village sans les ouvrir, pour pouvoir les transporter. De retour au camp une dispute s'est élevée entre les souris de la bande bleue et celles de la bande jaune.* (Le maître montre les bandes).

***Dans la république des souris on aime que toutes les souris soient égales et reçoivent la même chose.*** *Pourquoi croyez-vous qu'elles se sont disputées ?*

(réponse espérée : « parce que les unes avaient plus de graines que les autres »).

*Appelé à la rescousse Sourissot blâme sévèrement la bande bleue qui a 10 graines et la bande jaune qui a, elle aussi, 10 graines, le même nombre. Mais Sourissage continue à prétendre que la distribution entre les bleus et les jaunes n'est pas équitable.*

*Pourquoi ?* (réponse espérée : « Les bandes n'ont pas le même nombre de souris »).

*Alors la tribu de souris décide de comparer toutes les parts. Nous allons les aider et dire si la distribution des graines est équitable ou s'il faut la refaire.*

Consigne :

Chaque groupe d'élèves reçoit un dessin qui représente les souris d'une bande et le paquet de graines qu'elles sont supposées avoir ramené. Chaque groupe d'élèves doit comparer l'"attribution" qui lui est confiée à celle d'un autre groupe puis dire si la "répartition" est équitable ou non et proposer une justification.

La recevabilité de chaque argument doit faire l'objet d'un débat général.

<u>Exemples :</u>

| | | | |
|---|---|---|---|
| Nombre de souris dans la bande | 3 | 4 | Pour un même nombre de graines il faut un même nombre de souris. |
| Nombre de graines dans le paquet | 10 | 10 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Nombre de souris dans la bande | 5 | 7 | S'il y a plus de souris il faut plus de graines. |
| Nombre de graines dans le paquet | 16 | 13 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Nombre de souris dans la bande | 3 | 6 | S'il y a le double de souris, il faut le double de graines. |
| Nombre de graines dans le paquet | 11 | 15 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Nombre de souris dans la bande | 4 | 7 | $7 \times 3 = 21$ mais $4 \times 3 = 12$. Les souris n'ont pas la même part. |
| Nombre de graines dans le paquet | 17 | 21 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Nombre de souris dans la bande | 2 | 2 | Un même nombre de souris doit avoir un même nombre de graines. |
| Nombre de graines dans le paquet | 11 | 13 | |

### *4-1-2 Commentaires*

*<u>a) Sur le fonctionnement de la relation didactique.</u>*

Le débat scientifique dans une classe ne s'improvise pas, il suppose une culture :

Dans cette leçon, nous avons choisi de faire travailler les élèves par paires de groupes. Chaque groupe compare les quantités de graines et de souris qui lui sont confiées à celles de l'autre groupe et élabore un argument qui explique pourquoi un groupe de souris est désavantagé par rapport à l'autre. Puis les deux groupes confrontent leurs arguments pour en débattre avant la phase collective où seul un rapporteur présentera un argument à la classe entière.

Pourquoi faire travailler les élèves en groupes ?

Il y a des raisons d'ordre didactique, pédagogique et idéologique.

La situation doit permettre l'élaboration d'arguments et l'organisation d'une plaidoirie.

Par ailleurs, la difficulté à gérer un débat avec la classe entière contribue à choisir une organisation démocratique où chaque individu peut participer à la recherche de l'équité en confrontant ses arguments à ceux des camarades du groupe avant de les soumettre au jugement du savoir scientifique de la classe. Le travail en groupe joue un rôle de tri et de mise au point en obligeant les élèves à écrire les arguments qui entreront dans le débat collectif. Cette procédure a en outre l'avantage de limiter le nombre de propositions à traiter par le maître face à la classe entière.

Pourquoi faire travailler les groupes d'élèves par paires ?

Dans une première expérimentation nous avions demandé aux élèves de comparer « les graines et les souris » qui leur étaient confiées à toutes les autres attributions de la classe. Cette situation avait deux défauts : il faut beaucoup de temps aux élèves pour se familiariser avec l'ensemble des attributions ; le débat collectif sur les arguments proposés par les élèves est entièrement à la charge du professeur or il est très lourd à gérer.

*b) Sur les arguments des élèves :*

Les arguments des élèves sont très contextualisés et formulés avec les mesures qui sont à leur disposition. Il est plus facile pour eux de faire référence à des règles de calcul que de rechercher des « raisons sociales » pour leur argumentation. Les arguments issus de la première phase doivent être des prétextes pour l'élaboration d'une distribution équitable et non des techniques de calcul pour construire cette distribution.

*c) Sur l'institutionnalisation :*

L'institutionnalisation est un phénomène complexe et un moment sensible pour le maître. Au cours de la situation, le rôle de l'élève évolue : « d'avocat de la défense » il va devoir se poser en « législateur » en construisant progressivement les « règles de l'équité » qui ne sont autres que les techniques de la proportionnalité. Mais les activités ne sont pas auto institutionnalisantes et c'est au professeur de dire ce qu'est l'équité (dans la situation étudiée…) pour créer les moyens collectifs de construction de ces techniques. Or le constructeur d'une leçon ne peut pas projeter dans le détail son déroulement ; le maître est donc obligé de prendre des décisions en situation didactique pour fermer la porte à des aventures, à des évolutions non désirées du système.

Dans la deuxième phase les élèves doivent réaliser une distribution équitable en utilisant le plus possible de ces graines. La « ration » est entière.

> Le maître :
>
> *Puisque la distribution des graines avec les paquets n'est pas équitable, on va ouvrir les paquets pour les refaire. (On ne change pas la constitution des groupes de souris)*
>
> *Nous voulons distribuer le plus de graines possible, toutes si nous pouvons. Comment faut-il **refaire les paquets** pour que la distribution soit équitable et utilise le plus de graines possible ?.*

### 4-1-3 Résultats

Trois procédures sont prépondérantes :

- Certains élèves attribuent une quantité de graines arbitraire au groupe de souris de plus petit effectif puis ajoutent un nombre fixe de graines à chaque souris supplémentaire. Cette procédure additive va réapparaître de manière prégnante chez certains élèves dans les leçons suivantes. *Illustration produite par un groupe d'élèves :*

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Souris* | *3* | *3* | *4* | *4* | *5* | *6* | *6* | *7* | *7* | *8* | |
| *Graines* | *6* | *6* | *7* | *7* | *8* | *10* | *10* | *11* | *11* | *13* | *Proposition 1* |
| *Graines* | *6* | *6* | *8* | *8* | *10* | *15* | *15* | *19* | *19* | *23* | *Proposition 2* |

- D'autres essaient d'utiliser une part invariante arbitraire de graines par souris puis ajustent cette ration pour essayer d'utiliser le maximum de graines possible.
- Enfin d'autres encore divisent le nombre total de graines par le nombre total de souris pour déterminer la ration.

Dans la séance suivante on fait varier les grandeurs « nombre de souris », « nombre de graines », « ration ». L'une des trois grandeurs étant fixée, la variation d'une autre grandeur détermine la variation de la troisième grandeur. Exemples :

Le maître :

*On a attribué 28 graines à 7 souris. Combien faut-il attribuer de graines à 6 souris pour que la distribution soit équitable ?*

***

*On attribue toujours 4 graines à chaque souris. Trouver combien il faut de graines pour 20, 40, 15, 60 souris ?*

***

*En attribuant 4 graines par souris, on a distribué 480 graines. Combien a-t-on nourri de souris ?*

## 4 – 2 La conservation des structures pour réaliser l'équité : les rapports internes.

### *4-2-1 Description de la leçon 2*

On veut obliger les élèves à transporter les rapports d'une grandeur sur une autre grandeur. Les élèves n'ont pas la possibilité d'utiliser le coefficient de proportionnalité car il n'est pas entier.

Dans une première phase on leur demande d'ajuster une distribution pour qu'elle respecte la croissance.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| nombre de souris à nourrir | 3 | 6 | 15 | 21 |
| nombre de graines dans le paquet | 8 | 20 | 31 | 54 |

Dans la phase suivante, les élèves doivent répartir un maximum de graines entre les lots de souris en respectant les rapports internes.

Le maître :

*On peut maintenant ouvrir les paquets. Trouvez une distribution équitable qui utilise le plus possible de ces graines et écrivez la sur votre feuille. ****

Recueil des distributions proposées :

Les élèves essaient de construire une distribution avec une ration entière (2 ou 3 graines par souris)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| nombre de souris à nourrir | 3 | 6 | 15 | 21 |
| nombre de graines dans le paquet | 9 | 18 | 45 | 63 |

Le maître :

*Est-ce que cette répartition est équitable ? Est-ce qu'il y a assez de graines pour la réaliser ?*

Commentaire :

Le maître peut compter effectivement les graines ou simuler de le faire.

On est dans le paradoxe de la dévolution. Pour aider les élèves le maître peut faire des dessins faisant apparaître les groupes de souris avec leurs graines mais en aucun cas, il ne peut donner la solution :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| nombre de souris à nourrir | 3 | 6 | 15 | 21 |
| nombre de graines dans le paquet | 7 | 14 | 35 | 49 |

Le maître fait expliciter la méthode ; on attend la technique suivante : envisager pour le plus petit lot de souris un certain nombre de graines puis utiliser les rapports internes pour les autres lots de souris. On compte alors le total des graines :

- s'il y en a trop on enlève une graine au plus petit lot et on complète le tableau comme précédemment.
- s'il reste des graines on en ajoute une au plus petit lot de souris et on complète le tableau.

Commentaires :

Il faut faire valider la distribution voulue par un raisonnement sur la conservation des rapports. C'est au maître d'organiser le débat pour obtenir une validation raisonnée :

Le maître :

*Est-ce que toutes les souris mangent la même quantité de graines ?*

*Est-ce que 14 graines pour 6 souris c'est la même chose que 7 graines pour 3 souris ou que 35 graines pour 15 souris ou que 49 graines pour 21 souris ?*

### *4-2-2 Commentaires*

Le paradoxe de la ration non entière :

Un des objectifs de la première leçon était de valider l'idée que l'équité passe par l'égalisation des parts. Les élèves avaient découvert à cet effet l'efficacité du coefficient de proportionnalité quand il est entier.

On veut maintenant obliger les élèves à réaliser une distribution équitable en utilisant les rapports internes. La difficulté est la suivante : si on accepte les restes de graines, il est toujours possible de réaliser une distribution équitable en utilisant une ration entière.

Nous savions que cette ration entière allait s'ériger en obstacle pour les rations non entières d'autant plus qu'il est difficile pour des enfants de concevoir que 3 souris puissent se partager équitablement 7 graines. C'est un paradoxe de la situation : nous souhaitons créer l'obligation d'expliciter une ration (non entière) par un couple d'entiers, ce qui explique le choix des paquets de graines et des lots de souris mais la réalisation de l'équité suppose qu'il est possible de fabriquer des parts égales. Pour permettre aux élèves d'imaginer que c'est possible, le maître leur demandera d'accepter qu'au sein de chaque groupe les souris se débrouillent entre elles parce que les graines sont écrasées avant la distribution effective.

La possibilité de faire des distributions équitables entre lots de souris sans que la ration soit un entier est un saut informationnel incontournable dans la situation envisagée. La contrainte « attribuer des paquets de graines à des lots de souris » et non à des souris est l'instrument ad hoc pour nécessiter les propriétés de la linéarité et construire les rationnels.

Dans la deuxième séance, le "jeu du contrôleur" fait fonctionner les acquis précédents.

## 4 – 3 La conservation des structures pour réaliser l'équité : additions et soustractions.

### *4-3-1 Description de la leçon 3*

Dans la phase 1 de cette leçon on veut obliger les élèves à transporter l'addition et la soustraction d'une grandeur sur une autre grandeur. Les regroupements de grandeurs se traduisent numériquement par des sommes ou des différences de mesures.

Exemple 1 :

Le maître :

*Nous avons 3 lots de souris à nourrir.*

*Dans chaque groupe vous complétez la distribution suivante pour qu'elle soit équitable. Je vous demanderai comment vous avez fait.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| nombre de souris à nourrir | 4 | 8 | 16 |
| nombre de graines | 10 | | |

Le maître :

*On doit transporter ces souris et ces graines avec 3 cages qui contiennent au plus 10 souris chacune. On veut que pendant le transport la distribution reste équitable. Ecrivez sur vos feuilles une distribution équitable qui permet ce transport.*

***

La contrainte matérielle conduit à imaginer deux étapes :

1. Enlever 6 souris au lot de 16 souris et les graines correspondantes. Le passage par le couple intermédiaire (2 ; 5) est incontournable pour déterminer combien de graines mangent 6 souris.
2. Rajouter les 6 souris et les graines correspondantes au lot de 4 souris.

| | | | |
|---|---|---|---|
| nombre de souris | 10 | 8 | 10 |
| nombre de graines | 25 | 20 | 25 |

Exemple 2 :

Même activité avec la distribution suivante et un transport avec 4 cages d'au plus 15 souris chacune :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| nombre de souris | 6 | 15 | 21 | 9 |
| nombre de graines | 14 | 35 | | |

### *4-3-2 Commentaires*

Des nécessités contradictoires :

Dans cette première phase, les élèves doivent compléter des distributions, sous certaines contraintes, qui les obligent à additionner ou soustraire terme à terme des couples équivalents de graines et de souris. Mais on ne peut pas exiger des élèves qu'ils complètent la deuxième distribution sans leur demander au préalable de vérifier l'équivalence des couples qui y figurent. Or pour effectuer cette vérification, ils utilisent le « couple intermédiaire » (3 ; 7) dont les termes sont diviseurs ou multiples communs des termes homologues de deux autres couples à comparer. La connaissance de ce couple intermédiaire permet alors de construire les couples cherchés avec des rapports multiples, ce qui rend inutile l'addition et la soustraction. Pour pallier cette contradiction, nous avons imaginé des « contraintes matérielles » qui conduisent les élèves à faire des manipulations de graines et de souris qui nécessitent l'addition ou la soustraction de couples équivalents. Pour modifier la distribution afin de permettre le transport, les élèves peuvent utiliser le couple (3 ; 7) puis les rapports internes ; mais la réalisation effective sur les graines et les souris nécessite des manipulations qui infèrent une soustraction puis une addition de souris et de graines :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| nombre de souris | 6+6 | 15 | 21-6 | 9 |
| nombre de graines | 14+14 | 35 | 49-14 | 21 |

Dans la phase 2 les élèves doivent comparer les rations des deux distributions équitables qu'ils viennent de construire ; mais ces rations ne sont pas calculables pour des élèves de CM1. Ils vont devoir chercher des mesures communes aux deux distributions.

Le maître :
*Nous avons fabriqué deux distributions équitables* :

| | | | |
|---|---|---|---|
| nombre de souris à nourrir | 4 | 8 | 16 |
| nombre de graines | 10 | 20 | 40 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| nombre de souris à nourrir | 6 | 15 | 21 | 9 |
| nombre de graines | 14 | 35 | 49 | 21 |

Le maître : *Dans quelle distribution la ration est-elle la plus grande ?* ***
*Laquelle de ces deux distributions donne le plus à manger à chaque souri.* ***

### *4-3-3 Observations*

*L'importance de la consigne :*
La deuxième phase a pour projet de faire comparer les rations des deux distributions précédentes. Or ces rations non entières ne sont pas calculables par des élèves de CM1. Les élèves sont donc obligés de chercher dans chacune des distributions, des couples où figurent des mesures communes de graines ou de souris qui permettent des procédés de comparaison.

Mais la formulation de la consigne a beaucoup d'importance : pour comparer les rations de deux distributions, certains élèves comparent les quantités totales de graines des deux distributions sans se soucier des nombres de souris. Il faut donc choisir des nombres qui ne permettent pas de répondre juste avec un argument faux : le nombre total de graines de la distribution qui utilise la plus grande ration doit être inférieur au nombre total de graines de la distribution qui utilise la plus petite ration.

*L'usage d'un « couple intermédiaire » n'est pas spontané chez les élèves.*
Les différentes situations étudiées ont fait apparaître des distributions avec un nombre fini de couples. Les contraintes matérielles s'opposent à l'idée que l'ensemble des couples possibles est infini. La recherche d'un « couple intermédiaire » suppose que les élèves ont compris que l'équité ne dépend pas du nombre de souris ou du nombre de graines mais de l'invariance du rapport entre ces deux grandeurs, l'une d'elles pouvant être choisie arbitrairement.

Dans la deuxième séance, pour familiariser les élèves avec l'idée que ces grandeurs peuvent varier arbitrairement pourvu que ce rapport soit conservé, on leur demande de proposer des couples imaginaires qui font fonctionner le modèle indépendamment des contraintes matérielles qui ont donné naissance à la situation.

## 4 – 4 L'équité pour la genèse des rationnels : comparer des rations.

### *4-4-1 Description de la leçon 4*

L'équité va servir de prétexte pour construire des rationnels. L'idée de ration est présente tout au long du processus. Les élèves se sont familiarisés avec cette notion et ont appris à la désigner avec différents couples équivalents. Ils ont aussi comparé les rations de deux distributions équitables (leçon 3) et découvert deux techniques : comparer les quantités de graines attribuées à deux lots de souris de même effectif ou comparer les effectifs de deux lots de souris à qui on a attribué la même quantité de graines.

Ces comparaisons nécessitent la recherche de couples intermédiaires donc de faire varier les nombres de souris et de graines avec la contrainte de respecter l'équité, c'est à dire les rapports externes. Il y a là l'idée de variable et de fonction. On essaie d'habituer les élèves à considérer des quantités arbitraires de graines ou de souris pour pouvoir faire des comparaisons de rations en utilisant les stratégies décrites précédemment.

Dans la première phase, les élèves "complètent" deux distributions avant de comparer les deux rations :

Organisation :

On partage la classe en deux. Chaque moitié de classe complète un des deux tableaux suivants.

BLEU

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| nombre de souris | | | 12 | | | | | | |
| nombre de graines | | | 28 | | | | | | |

VERT

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| nombre de souris | | | | | | 20 | | | |
| nombre de graines | | | | | | 45 | | | |

Le maître :

*Dans quelle distribution la ration est-elle la plus grande ? Est-ce qu'il vaut mieux être souris dans la distribution bleue ou dans la distribution verte ?*

Dans la phase suivante, chaque "distribution" est représentée par un seul couple, les élèves doivent trouver les distributions qui utilisent la même ration.

Dans une première étape, la ration est entière ; dans la deuxième étape le rapport interne est entier ; la troisième étape nécessite l'usage d'un couple intermédiaire.

## 4 – 5 Institutionnalisation de la proportionnalité.

### *4-5-1 Description de la leçon 5*

On souhaite maintenant abstraire de la situation « des graines et des souris » le « concept de proportionnalité », on veut construire une connaissance sur des connaissances.

Pour permettre aux élèves d'avoir une activité réflexive sur la « situation des graines et des souris » on leur propose d'autres milieux objectifs qui nécessitent ou non l'usage des techniques déjà rencontrées dans cette situation. C'est une nécessité d'origine logique, physique ou sociale qui permet de décider s'il y a lieu ou non de conserver les rapports internes. C'est en référence à l'égalité de ces rapports que les élèves comparent des situations et donnent un sens au concept de proportionnalité.

La première phase fournit un exemple puis un contre exemple : "La fabrication de tartelettes".

Le maître :

*Pour faire 15 tartelettes toutes pareilles un restaurateur a employé 6 œufs. Combien doit-il prévoir d'œufs pour fabriquer 45 tartelettes ? Faites les calculs sur vos feuilles. ****

Le maître :

*En fait le restaurateur s'est trompé, il doit fabriquer 50 tartelettes. Combien doit-il prévoir d'œufs ? Faites les recherches sur vos feuilles. ****

Le maître :

*Ce restaurateur fait cuire les tartelettes dans un grand four de boulanger. Pour faire cuire 15 tartelettes il a fallu 30 minutes. Le restaurateur met les 50 tartelettes dans le four en même temps. Combien de minutes de cuisson doit-il prévoir ?*

Commentaires :

Il faut un peu de mise en scène pour faire comprendre aux élèves que toutes les tartelettes cuisent en même temps.

Institutionnalisation :

*Quand une distribution de graines à des souris est équitable, on dit que les quantités de graines sont proportionnelles aux nombres de souris.*

*Dans la fabrication des tartelettes les quantités d'œufs sont proportionnelles aux nombres de tartelettes mais les temps de cuisson ne sont pas proportionnels aux nombres de tartelettes.*

Dans la deuxième phase, les élèves doivent reconnaître les conditions d'usage de la proportionnalité : "grandeurs proportionnelles ou non" dans différentes situations.

### *4-5-2 Observations sur l'institutionnalisation*

C'est en essayant d'utiliser les techniques de la linéarité que les élèves décident d'accepter ou de rejeter le modèle proportionnel. Par conséquent le maître ne peut faire qu'une institutionnalisation « locale » contextualisée aux grandeurs étudiées dans chaque exemple.

L'institutionnalisation est une activité réflexive sur les connaissances qui contribue à fermer la situation d'apprentissage. Elle ne peut réussir que si les élèves ont conscience de leurs connaissances. En construisant une connaissance sur les connaissances, elle libère les élèves de l'environnement didactique des apprentissages antérieurs et leur permet de concentrer leur effort sur le nouvel objet d'apprentissage.

## 5. PERSPECTIVES

L'originalité de la situation "des graines et des souris" ne réside pas dans son milieu matériel mais dans son fondement qui rend opératoire les techniques de la proportionnalité pour réaliser l'équité. Cette notion apparaît comme une raison sociale de construire le modèle proportionnel dont la validation raisonnée échappe aux contraintes et aléas du mesurage. En même temps, la situation "des graines et des souris" réunit toutes les conditions pour construire les rationnels et apporter des connaissances sur les notions de variable et de fonction qui préparent la formalisation différée de ces concepts et leur institutionnalisation au collège. Les idées de variable et de fonction ne peuvent pas apparaître pertinentes sur une seule situation ; ces concepts prennent de la consistance sur des processus d'apprentissage qui à long terme les font apparaître comme des objets "algébriques" qui réfléchissent et synthétisent les relations entre grandeurs.