Exposé à plusieurs voix

Exemples d'approches en formation de certains concepts de didactique des mathématiques

Introduction

L'objectif de cet exposé à plusieurs voix est double : d'une part montrer l'utilité des concepts didactiques pour l'enseignement des mathématiques et pour la formation à l'enseignement des mathématiques ; d'autre part questionner des « allant-de-soi » concernant l'enseignement et la formation. Quatre interventions se succèdent :

Alain DESCAVES (IUFM d'Aquitaine) se centre sur la relation entre cognitif et didactique, pour pointer l'insuffisance d'une entrée uniquement psycho-cognitive pour l'enseignement et le rôle de la didactique. Il choisit des exemples dans le champ numérique, notamment une histoire de soustractions.

Joël BRIAND (IUFM d'Aquitaine) souligne la dialectique entre manipulation et anticipation et la pertinence du concept de milieu. Son exemple, une histoire de boîtes, touche aussi le champ numérique.

Isabelle BLOCH (IUFM d'Aquitaine) précise les moyens d'action du professeur sur le milieu, en choisissant un exemple en géométrie : une histoire de distance.

Marie-Lise PELTIER (IUFM de Haute-Normandie) montre le rôle de certains concepts didactiques pour penser la formation des professeurs des écoles en mathématiques et en didactique des mathématiques. Son exemple sera aussi géométrique : une histoire de fleur.

Des rapports entre le cognitif et le didactique et de quelques idées naïves les concernant

Alain DESCAVES, IUFM d'Aquitaine

En réfléchissant à l'organisation d'apprentissages visant l'accession progressive des élèves aux objets mathématiques et à leur applicabilité au monde, les pédagogues cherchent à faire vivre aux élèves des expériences en les confrontant à certaines réalités et dans un certain ordre. C'est une telle démarche que proposent en général les manuels scolaires.
L'organisation didactique est bâtie pour agir sur la pensée et l'action de l'élève, et les faire progresser.
Si penser l'articulation didactique-cognitif est bien sûr nécessaire, leurs rapports n'est pas si simple à établir, et bien des idées naïves sous-tendent les choix d'activités proposées.

Idée naïve n°1 : le didactique au service du cognitif.

L'idée naïve la plus répandue consiste à imaginer une juxtaposition d'activités dont l'objectif est de faire parcourir à l'élève , souvent sur un très court terme, un chemin cognitif déterminé.

L'analyse des documents décrits ci dessous (joints pages 58 à 60 de cette brochure), provenant du livre du maître et du fichier de l'élève CE1 de la collection « Pour comprendre les Mathématiques – Hachette Education», est un exemple de la démarche qu'un concepteur pédagogue a tendance parfois à réaliser, lorsqu'il conçoit une organisation didactique en vue d'une évolution cognitive de l'élève, souhaitée et fixée a priori.

Les auteurs proposent une séquence d'activités autour de problèmes conduisant à la soustraction.
Les objectifs déclarés sont les suivants :

- Découvrir le sens de la soustraction par l'analyse de la situation soustractive la plus simple.
- Être capable de définir clairement les parties et le tout, de rechercher une partie inconnue, de lui attribuer son étiquette, puis de la calculer.

Activité collective

Première phase

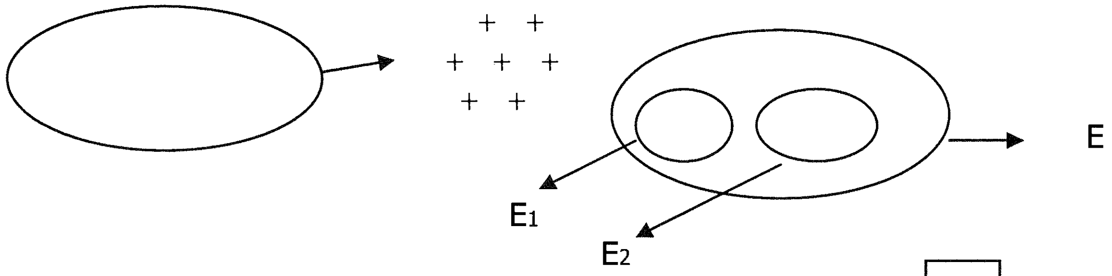
Le problème à résoudre est un problème de type **Etat initial – Transformation - Etat final (ETE)** : *« Patrick a apporté 35 images à l'école ; il en donne 17 à Daniel. Combien lui en reste-t-il ? »*.

Le déroulement proposé consiste à faire dessiner « l'histoire » par les élèves, mais le livre du maître recommande de privilégier le découpage de l'ensemble de départ (les images de Patrick avant le don), en deux parties (les images données à Daniel et les images restantes).
L'institutionnalisation proposée est une bande dessinée qui visualise la situation dynamique **état-transformation-état** en trois temps sous forme ensembliste. L'ensemble des images de Patrick est partagé en deux sous-ensembles : celui des images gardées par Patrick qui reste inclus dans l'ensemble de départ et celui des images données à Daniel qui quitte l'ensemble de départ tout en en gardant la trace.

Deuxième phase

Les élèves sont chargés de relier les ensembles aux étiquettes-nombres, 35 et 17. Le sous-ensemble des images restantes n'a pas d'étiquette-nombre ; les auteurs du livre du maître proposent d'appeler différence ce nombre inconnu **d** (nombre d'images restantes) et de l'écrire 35 – 17.
Les élèves sont alors chargés de calculer ce nombre à partir du schéma, d'une manipulation concrète ou de la calculatrice, afin de « raccourcir » l'écriture.
Dans les faits, il ne s'agit pas de construire une procédure de calcul (les nombres 35 et 17 semblent choisis pour empêcher un calcul simple), mais de dénombrer ou d'utiliser un instrument.
Une fois trouvé le nombre inconnu il est proposé au maître de faire remarquer aux élèves que 17+18=35.

La visée didactique des concepteurs de ces activités est claire : il s'agit de faire assimiler une situation dynamique de retrait de type ETE, à une situation statique de composition de mesures d'états. Les représentations cognitives (images mentales) associées à ces deux situations sont en effet différentes : un « tout » qui diminue suite au départ d'éléments ou deux « touts » réunis dans un autre « tout ».



Situation E_i T E_f Situation $\boxed{E_1 \; E_2}$

En mettant en parallèle le schéma dynamique et le schéma statique, les auteurs du manuel espèrent que les élèves pourront interpréter le schéma ensembliste statique (un tout, deux parties) de manière dynamique : les éléments de E_2 quittent E, il reste les éléments de E_1 dans E ; E était constitué des éléments de E_1 et des éléments de E_2.

Dans le problème proposé card(E) = 35 et card (E_2) = 17. La solution cherchée est card (E_1), que les auteurs proposent d'appeler **d**.

Les hypothèses épistémologiques, cognitives et didactiques des auteurs sont les suivantes : la soustraction est définie dans le cadre de la théorie des ensembles :
si $A \subset E$, la différence entre le cardinal de l'ensemble E et le cardinal de l'ensemble A est le cardinal du complémentaire de A dans E ;

- il s'agit de modéliser les situations de retrait dans le cadre de cette théorie ;
- l'apprentissage du sens de la soustraction consiste à unifier les situations soustractives dans le cadre d'une même structure mathématique (le « général » unifie les « particuliers ») , et ce avant même l'apprentissage des procédures de calcul ; la compréhension de la structure mathématique doit précéder la maîtrise des procédures de calcul ;
- le moyen proposé est de tenter d'assurer une compatibilité des images mentales sous-jacentes aux différentes situations soustractives par le biais de schémas (iconiques et abstraits, les schémas sont supposés être des représentations intermédiaires) ;
- le maître apporte les schémas, institutionnalise le lexique et les écritures mathématiques au cours d'une même et première séance.

L'introduction du terme « différence » pose évidemment question, puisque l'image mentale qui lui est associée est plutôt celle d'un écart. Conscients de ce problème, les auteurs proposent un nouveau schéma dans l'activité individuelle.

Activité individuelle

Une nouvelle situation de type ETE est proposée aux élèves (perte au jeu de billes).
Les élèves sont chargés de représenter la situation de retrait dans le cadre du schéma ensembliste statique en complétant les étiquettes. Les nombres du problème sont choisis pour que les élèves ne soient pas confrontés à la construction d'une procédure de calcul : 50 billes au départ et une perte de 30 billes.
Un schéma de type droite numérique est d'ailleurs proposé pour effectuer le calcul.
Le nombre inconnu **d** est présenté comme la distance séparant 30 de 50.
Le contrôle s'effectue par une addition à trou en colonnes.

Sans développer une analyse didactique fine de cette suite d'activités, la naïveté du point de vue apparaît facilement.

1) L'organisation didactique proposée vise une accélération de la construction du sens, mais elle nie la temporalité nécessaire à tout apprentissage.
En fait, au début de l'apprentissage, les différentes situations soustractives sont traitées cognitivement par des représentations mentales différentes. L'élève doit se construire progressivement des systèmes cognitifs de représentation et de traitement pour les situations de retrait, de recherche d'un complément ou d'écart, ces

systèmes étant dans un premier temps relativement étanches. Des significations structurales et procédurales différentes sont donc attachées à ces situations.
La construction du sens de la soustraction, c'est-à-dire de la cohérence entre toutes ces significations, est un processus de longue haleine, qui ne peut bien sûr aboutir en une seule séance.

2) Les schémas sont les supports proposés pour assurer la cohérence des différentes situations soustractives. Or le propre des représentations iconiques est de déclencher des significations immédiates figées (que l'on peut appeler des figures, non déformables).
Le domaine iconique n'est donc pas celui qui permet de faire apparaître les compatibilités des situations, et les schémas n'échappent pas à cet état de fait.
Le sens provient de la cohérence de règles de transformation, de correspondance et d'inférence agissant sur des représentations, et c'est la maîtrise du domaine arithmétique et de son langage (oral et surtout écrit) qui y conduit . Cette maîtrise nécessite celle des règles du système mais aussi des relations que le système entretient avec le traitement des situations concrètes.
La durée est un facteur essentiel qui autorise la constitution de réseaux de significations et leur mise en cohérence dans des structures de sens.
La structure est un aboutissement de l'apprentissage et non un préalable.

Si l'analyse des rapports entre le cognitif et le didactique doit être pris en compte dans la mise au point d'ingénieries didactiques, l'idée de contrôler didactiquement le parcours cognitif des élèves est illusoire.

Idée naïve n°2 : « Didactiser » le cognitif.

Une autre idée naïve consiste à l'inverse à catégoriser certains faits observés dans les classes en leur donnant une dimension didactique qu'ils n'ont pas.

Si l'on prend l'exemple souvent cité de la somme des décimaux, on constate que nombreux sont les élèves qui ajoutent les parties entières et les parties décimales séparément : 34,7 + 25,54 = 59,61.
Mais peut-on parler pour autant de théorèmes-élèves ? Et ces faits ont-ils une réelle dimension didactique ?
Un élève confronté à cette activité de calcul, et qui n'attache pas de significations pertinentes aux écritures décimales, appliquera une règle possible. Mis dans l'obligation d'agir, il observera les écritures et regroupera les chiffres selon une possibilité, plausible pour lui, donc devenue probable. La virgule étant perçue comme une séparation, une interprétation plus prégnante que d'autres est d'ajouter les nombres avant la virgule et après la virgule. Peu d'élèves appliquant cette règle d'action sont convaincus d'ailleurs avec certitude de sa justesse.
Probable n'est pas certain, et il n'est donc pas pertinent de parler de théorème-élève.

Pour les élèves, le calcul est souvent perçu comme un jeu de regroupement des chiffres des nombres présents. Cette connaissance est bien un effet de l'habitude dans le cadre scolaire. Il s'agit d'un fait didactique. Le choix de regrouper les chiffres avant la virgule et les chiffres après la virgule est un fait essentiellement cognitif (possibilités de traitement des écritures et choix d'une possibilité plus prégnante).

Confrontés au calcul de la somme 7 + 52 + 186, les élèves d'un cours élémentaire fournissent les réponses suivantes : 938, 29, 245, 200.
Les calculs effectués sont les suivants :
752+186=938 ; 7+5+2+1+8+6=29 ;7+5+2+186=200 ;7+52+186=245.
Les erreurs ne proviennent toujours pas de l'application de théorèmes-élève, mais d'une interprétation des écritures effectuée dans ce cadre pragmatique de regroupement des chiffres des nombres donnés, mais peut-être également d'une mauvaise lecture des écritures.
La part du didactique dans ces erreurs est donc difficile à déterminer. L'erreur consistant à ajouter deux nombres de trois chiffres peut être due à l'habitude si les exercices proposés par le maître consistent à calculer très fréquemment sur des nombres écrits avec le même nombre de chiffres, mais cette cause n'est pas certaine.

Attribuer une signification didactique à des faits de nature essentiellement cognitive n'aide pas à la compréhension des relations entre cognitif et didactique.

Amener les élèves d'une pensée naturelle vers une pensée mathématique, de la production de registres d'écriture plus ou moins spontanés vers la compréhension de registres d'écritures mathématiques, de l'application de règles personnelles d'action vers l'utilisation raisonnée de règles mathématiques, tels sont les objectifs que visent de nombreux pédagogues et les didacticiens.
Mais comment penser l'articulation entre le cognitif et le didactique ? En intervenant directement sur la cognition ou en jouant sur la situation (le milieu) ? Et comment les modifications du milieu peuvent-elles produire des apports cognitifs, ainsi que des modifications et des restructurations ?

La liberté cognitive épistémique de l'élève déjoue et déjouera toujours l'organisation didactique, pragmatique et déontique mise en œuvre par l'enseignant.
Alors comment articuler un vouloir faire et un pouvoir faire de l'élève sur un devoir faire institutionnel (celui imposé par le maître et l'institution)? Et quelles expériences faire vivre aux élèves sur la durée en déjouant les idées naïves ?
Tels sont les enjeux de la recherche en didactique des mathématiques.

Dialectique entre manipulation et anticipation. Pertinence du concept de milieu.

Joël BRIAND, IUFM d'Aquitaine

Dans les années 60, l'environnement de l'élève n'est pas un objet d'étude en soi. L'école piagétienne conçoit des dispositifs ingénieux, mais ne cherchent pas à expliciter le rapport entre ce dispositif et la notion mathématique. Elle est, de plus soumise à l'organisation des savoirs mathématiques de l'époque.

La première théorie des situations

Dès le début de la théorie des situations, une question de départ est posée : « dans quelles conditions un sujet peut-il être amené à avoir besoin de telle connaissance et pourquoi la construirait-il ? ». On peut dire que, dès le début de la construction de cette théorie, le concept de milieu est « en acte ». On pourrait interpréter cette première approche comme suit : dans des situations non didactiques, le sujet produit des actions, des formulations, des arguments, des preuves fondées sur des savoirs, des connaissances, des savoir-faire, pour agir sur un milieu[4] qui comprend des éléments naturels, matériels, vivants donc culturels, humains, etc.
L'enseignement devrait donc se donner comme objectif de rendre l'élève capable d'utiliser ses connaissances dans un milieu non didactiques. Il doit pouvoir leur proposer des situations dans lesquelles il se trouve en inter-action avec un milieu qui aura été aménagé (milieu modélisé) de façon à ce que les intentions didactiques du professeur ne soient pas visibles autrement que par l'idée que l'élève se fait du métier d'enseignant. En d'autres termes, l'élève sait bien que le professeur est là pour lui faire acquérir des connaissances, mais il sait aussi que la connaissance nouvelle est entièrement justifiée par la logique interne de la situation proposée par le professeur.

Le milieu

•Le milieu est étymologiquement ce qui se trouve au centre de l'espace.
•Puis le mot est venu à désigner la notion inverse : c'est ce qui entoure, ce qui baigne le centre : « le poisson vit dans le milieu marin ».
•Il se rapproche de l'écosystème de l'écologiste.
Nous définirons donc le **milieu** comme environnement constitué des objets (physiques, culturels, sociaux, humains) avec lesquels un sujet interagit dans une situation.

[4] A rapprocher du biotope (pierre, air, eau) et de la biocénose (le vivant, l'organique)

Une **situation** est alors l'ensemble des circonstances dans lesquelles une personne se trouve, et les relations qui l'unissent à son milieu. Les **connaissances** se manifestent essentiellement comme des instruments de contrôle de situations. L'élève apprend en s'adaptant à un milieu (au sens courant du terme) qui est un facteur de **contradictions**, de **déséquilibres**.
Nous prenons comme postulat que les comportements des élèves sont les révélateurs du fonctionnement du milieu considéré alors comme un système (sur lequel, en particulier le professeur pourra agir selon plusieurs rôles).
Le savoir, fruit de l'adaptation de l'élève se manifeste par des réponses nouvelles qui sont la preuve de l'apprentissage.

Dans une approche constructiviste, le milieu doit donc être facteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres donc d'adaptation pour l'élève (le professeur organisateur du milieu). C'est cette fonction du milieu qui est qualifiée d'antagoniste (du sujet) dans la situation. A la différence du milieu **antagoniste**, nous parlerons de milieu « allié » [D.Fregona 1995] ou de « milieu **faux-amis** » [Briand 2000].

« Milieu et milieux »

Dans la plupart des classes, le professeur n'organise pas son enseignement selon une suite de situations adidactiques, comme dans l'apprentissage par adaptation. Il ne s'agit donc pas d'imposer cette façon de construire l'enseignement mais de se donner les moyens de mieux caractériser les situations dans lesquelles les élèves sont effectivement plongés.
Plusieurs questions se posent :

- Le milieu d'apprentissage est-il caractérisé par l'environnement matériel proposé aux élèves ?
- Quelle est l'adéquation entre le milieu avec lequel l'élève sujet inter-agit et le milieu adidactique d'une situation fondamentale relative au savoir à enseigner ?
- Quelles sont les connaissances nécessaires à l'interaction avec le milieu ou produites par cette inter-action ? Dans quelle mesure ces connaissances sont proches ou éloignées de celles construites en milieu adidactique ?

Pour répondre à la première question, prenons l'exemple simple des deux séquences de travail en cours préparatoire.
Dans une première classe, le professeur montre des cubes dans une boîte : les élèves comptent collectivement 5 cubes. Le professeur écrit alors 5 au tableau. Le professeur montre des cubes dans une autre boîte : les élèves comptent collectivement 8 cubes. Le professeur écrit alors 8 au tableau. Il réunit alors les deux contenus dans une seule boîte. Les élèves comptent collectivement 13. Le professeur complète alors au tableau en écrivant : 5 + 8 = 13.

Dans une deuxième classe, le professeur montre des cubes dans une boîte : les élèves comptent collectivement 5 cubes. Le professeur écrit alors 5 au tableau. Le professeur montre des cubes dans une autre boîte : les élèves comptent collectivement 8 cubes. Le professeur écrit alors 8 au tableau. Il réunit alors les deux contenus dans une seule boîte en cachant le contenu. Les élèves doivent prévoir, par le calcul le nombre de cubes qui sont cachés.
Pour réussir dans cette activité, les élèves vont se servir de 5 et 8 et développer des stratégies variées qui pourront permettre (ou non) d'obtenir 13. L'ouverture ultérieure de la boîte permettra de valider ou d'invalider les réponses.
Les deux séquences semblent se ressembler. Le milieu matériel est le même. Le milieu d'apprentissage est différent. Les écrits de la première classe viennent pour répéter ce qui a déjà été découvert. Ceux de la deuxième classe sont le lieu de production de savoirs. Ils sont un moment de modélisation. Le retournement vers le réel validera ou invalidera les modèles.

Rôles du professeur dans l'organisation du milieu

Le professeur contrôle le milieu avec lequel l'élève inter-agit : il doit donc établir puis maintenir les relations des élèves avec la situation adidactique choisie, faire évoluer le milieu (par exemple organiser les changements de phase en changeant les règles du jeu).
Il rappelle le règles du jeu, il encourage, « joue le jeu » .
Il observe les élèves dans le milieu de référence.
Il est le garant de la maîtrise, à terme, des savoirs mathématiques identifiés comme tels (par lui) et pas seulement des connaissances.
Dans une situation d'apprentissage par adaptation, le professeur aura par exemple les rôles suivants :

Il construit une situation et organise le milieu pour qu'il soit antagoniste et que la situation devienne adidactique, il assure la dévolution du problème, il conserve le caractère adidactique par rapport aux savoirs dont il vise l'apprentissage. (En particulier lors des phases de discussion), il décide (ou non) de prendre à sa charge le traitement de savoirs connexes, il décide de laisser vivre certaines erreurs liées à l'apprentissage et d'en régler d'autres, il organise le passage de la situation d'action à celle de formulation, voire celle de preuve, il envisage une phase de conclusion, il envisage la suite et, en particulier, le moment de l'institutionnalisation de savoirs qu'il aura sélectionnés.

Mais ces rôles ne se jouent pas au même niveau de situation. Il faut aller plus loin et décrire LES rôles du professeur selon le niveau, au sens de C.Margolinas, des situations :

La situation de référence dans laquelle l'élève agit sont des situations productrices de modèles implicites d'actions lorsque l'action est dominante, productrices de savoirs lorsque la forme principale de connaissances attendues est à formuler (oralement ou par écrit), productrices de savoirs sous forme de théorèmes plus généraux lorsque la connaissance mise en œuvre est mise à l'épreuve.

Bibliographie

BROUSSEAU Guy, 1990, Le contrat didactique: le milieu, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 9 n°3 pp. 309-336, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble

BROUSSEAU Guy, 1998, *Théorie des situations didactiques*, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

FREGONA Dilma, 1995, Les figures planes comme " milieu " dans l'enseignement de la géométrie: interactions, contrats et transpositions didactiques, Thèse de l'Université de Bordeaux I, diffusion LADIST Bordeaux.

MARGOLINAS Claire, 1995, La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations, in Margolinas Claire, *Les débats de didactique des mathématiques,* annales 1993-1994, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

MARGOLINAS Claire, 1998, Etude de situations didactiques "ordinaires" à l'aide du concept de milieu: détermination d'une situation du professeur, *Actes de la 8ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*

SALIN Marie-Hélène 2001 : « Repères sur l'évolution du concept de milieu en théorie des situations » *Actes de la 9° Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*

La validation dans les situations problèmes

Isabelle BLOCH, IUFM d'Aquitaine

La dialectique entre manipulation et anticipation, dont vient de parler J.Briand, se traduit, de façon pragmatique, par l'organisation d'une phase d'action et de phases de formulation. Il importe de bien saisir l'enjeu des ces phases, qui sont une part du processus d'institutionnalisation. Saisir l'enjeu, c'est voir sur quelles sortes de déclarations porte la formulation ; dit en d'autres termes, c'est savoir à quel niveau de milieu se situent l'action de l'élève, la formulation, et les interventions du professeur. Et, dans un deuxième temps, de savoir comment construire des situations comportant les niveaux adéquats de milieux, c'est-à-dire comment assurer l'adéquation de la situation et de ses différentes phases, à la connaissance visée.

Si l'on se réfère à la structuration du milieu de Guy Brousseau (j'utilise ici la forme en tableau donnée par C.Margolinas, tel que je l'ai complété avec les spécifications du professeur dans les niveaux a-didactiques), les niveaux a-didactiques comportent un milieu matériel, un milieu objectif, et un milieu de référence ; ces trois niveaux de milieu ne jouent pas le même rôle, dans l'activité de l'élève, ni dans les interventions du professeur, et au final dans le processus **action / formulation / institutionnalisation.**

M3 : M-de construction		P3 : P-noosphérien	S3 : situation noosphérienne	sur didac tique
M2 : M-de projet		P2 : P-constructeur	S2 : situation de construction	
M1 : M-didactique	E1 : E-réflexif	P1 : P-projeteur	S1 : situation de projet	
M0 : M-d'apprentissage	**E0 : Elève**	**P0 : Professeur-pour l'élève**	**S0 : situation didactique**	
M-1 : M-de référence	E-1 : E-apprenant	P-1 : Professeur-en-action	S-1 : situation d'apprentissage	a- didac tique
M-2 : M-objectif	E-2 : E-agissant	P-2 : P-observateur	S-2 : situation de référence	
M-3 : M-matériel	E-3 : E-objectif	P-3 : Organise le milieu matériel	S-3 : situation objective	

Or il y a de fréquents contresens sur ce que sont les objets du milieu, comme on le voit en formation où les PE disent : l'élève a bien répondu à la question et le milieu renvoie une information sur la justesse de la réponse donc il y a validation par le milieu. Oui mais quel sorte de milieu, et quelle validation ? matérielle ou théorique ?

I. Les contresens sur la validation

Contresens sur le milieu matériel

Le milieu "matériel" est constitué des "objets" qui sont familiers aux élèves et que ceux-ci manipulent. Suivant le savoir visé, et le niveau considéré, il peut s'agir :

- d'objets matériels

ou

- d'objets mathématiques :
  - nombres, formules comme par exemple 3+4 = 7 ou 6×5 = 30
  - figures géométriques ...
  - graphiques, équations, ...

Le milieu matériel n'est donc pas forcément constitué d'objets physiques : cela signifie qu'à différents niveaux du système scolaire, le milieu "matériel" pourra être constitué de cubes, de jetons , ... Ou bien, de graphiques, de nombres, d'équations, de symboles... L'important est que le milieu matériel soit constitué d'objets familiers sur lesquels l'élève sait opérer des manipulations fondamentales. On voit que cette définition ne recouvre pas le même contenu pour un élève de maternelle et un étudiant de licence de mathématiques...

Contresens sur la validation

L'opinion répandue, et non seulement chez les professeurs d'école en formation, est que la validation doit s'appuyer essentiellement sur les feed-back de la situation, donc "agir" et que mettre en défaut des règles erronées d'action "suffirait" à construire du sens : la validation serait donc acquise dans le milieu matériel.
Or il y a une SPECIFICITE des savoirs mathématiques, qui ne sont pas des savoirs s'apprenant seulement par imprégnation, fréquentation ...
Un savoir mathématique ne peut résulter d'une simple confrontation à un milieu qui envoie une rétroaction en cas d'erreur. C'est un savoir théorique qui tient son statut de ce qu'il est pris dans des réseaux d'autres savoirs (et dans ces réseaux il apparaît comme *nécessaire*).

Exemple 1 : la somme de deux décimaux.

Si un élève commet l'erreur classique, 3,53 + 5,60 = 8,113 , le fait de ne pas trouver le bon résultat, et d'être confronté à un milieu qui lui renvoie le message "erreur", lui dit qu'il s'est trompé, mais, ni *pourquoi* il s'est trompé, ni, quelle est *la bonne façon* de procéder ! Le savoir mathématique qui répondra à cette question, c'est celui qui donnera la validation théorique de l'addition de deux décimaux, par exemple c'est la décomposition canonique d'un décimal et le savoir qui dit que 5/10 + 6/10 = 1 + 1/10 et non pas 5 + 6 = 11 et je "pose le 11".

Exemple 2 : travailler sur le parallélisme, en partant du critère d'équidistance.

La situation suivante a été construite par R.Berthelot et MH. Salin, dans le cadre de leurs travaux sur la géométrie au primaire, et expérimentée dans des classes de CM2. (voir les fiches didactiques de la situation en annexe pages 45 à 48)

Phase 1

Une ligne droite d'une dizaine de mètres de longueur est tracée sur le sol de la cour. Chaque groupe se voit attribuer un "point" matérialisé par une croix.

Phase 2

Problème 1 : chaque équipe place un autre point à la même distance de la ligne que M

Problème 2 : en 5 min, placer le plus de points possibles à la même distance.

Phase 3

Définir une droite parallèle à la droite de départ ; la première droite est-elle parallèle à celle qu'on a construite ?

Cette situation a pour objectif principal de construire une définition opérationnelle de la notion de droite parallèle à une autre droite, de sorte que le professeur, y compris en classe de sixième, n'ait pas besoin de donner des définitions absconses comme : "deux droites parallèles sont deux droites qui ne se coupent pas". Cette dernière définition est en effet peu adaptée à un travail des élèves car elle est "négative" et ne donne ni moyen de vérification, ni évidence visuelle (qui sait si deux droites qui ne se coupent pas dans la feuille de papier ne vont pas se couper plus loin ?).

Chacune des phases de la situation requiert une validation différente qui renvoie aux différents types de validation dans le milieu :

- validation "matérielle" dans le milieu des objets de départ : réussite / échec à placer les points ;
- validation théorique mathématique dans le milieu des formulations : argumentation mathématique, pour savoir, non si on a réussi ou non.

MAIS : à quelle question mathématique étions nous en train de répondre ?

Et, ici, quelle est la règle – perpendicularité – qui donnera à coup sûr des réponses correctes, i.e. nous dira comment placer des points à distance donnée de D, et donc, ***ce qu'est*** la distance à D.

Les deux types de "validation" se différencient par les questions auxquelles elles répondent : « ça marche ? » OU « pourquoi ça marche ? ».

Exemple 3: le puzzle.

Dans la situation du puzzle, la consigne est de reconstituer le puzzle alors que la règle de transformation est : ce qui mesure 4cm sur le modèle doit devenir 7cm sur la reproduction. Le fait de reconstituer le puzzle, et que "ça ne marche pas", n'est pas une validation au sens mathématique, ce n'est pas une validation théorique, c'est

une validation de la réussite ou de l'échec et ***non de la méthode*** qui permet (ou non) de réussir.
L'expérience, faite dans des classes de CM2 et des Sixièmes, permet de voir que les élèves cherchent d'abord une règle $x \rightarrow x + 3$ puis, comme cela échoue, $x \rightarrow 2x + 1$ ("c'est presque le double, donc je fais le double et j'enlève 1) ; ce deuxième modèle est plus difficile à mettre en défaut car il s'ajuste mieux en trichant un petit peu.
Ce n'est que grâce à des tâtonnements sur du numérique ("Si 4 donne 7, alors 2 donne 3,5 et 3 donne 3,5 plus la moitié de 3,5 ...") que les élèves parviennent par exemple, à trouver l'image de 1 puis le coefficient multiplicatif qui ***fait réussir à tous les coups***. Et ceci n'est pas une "réussite" matérielle, mais la ***règle*** qui dira comment je suis sûr de pouvoir résoudre ***tous les problèmes*** d'agrandissement / réduction.

Cette règle ne se situe plus dans le milieu matériel, ni même dans le milieu objectif qui est le milieu heuristique par excellence, le milieu des essais/erreurs qui permet aux élèves de comprendre ce qu'ils sont en train de chercher : elle se situe dans le milieu où on argumente pour savoir si l'on a bien trouvé le savoir mathématique qui permet de résoudre ce problème et tous les problèmes de même ordre : elle se situe dans le milieu de référence.

II. Construction d'un milieu de référence : le "retournement" de situation

La question se pose donc maintenant de trouver un mécanisme de production d'un milieu de référence pour un savoir mathématique donné. Or on constate que les situations qui installent un milieu de référence, le font souvent en retournant la question posée, c'est-à-dire en posant comme condition à atteindre ce qui était moyen d'action dans la première phase du jeu. Ainsi dans l'exemple du jeu des envahisseurs :

Exemple 4 : le jeu des envahisseurs.

Le jeu des envahisseurs est un jeu numérique auquel on peut faire jouer des étudiants, qui auront parfois du mal à décoder le savoir à la base du jeu.
1^er^ jeu : envahir le plus de nombres possibles entre 1 et 30 ; les envahisseurs sont 3, 5, 7 à utiliser une fois pour chaque nombre envahi et on a droit à +, - , ×

exemple : $1 = 5 + 3 - 7$

Ce jeu installe le *milieu objectif* : comprendre ce que l'on cherche – à écrire les nombres avec certains nombres "de base" ; établir des stratégies.

2ème jeu : trouver les envahisseurs pour envahir TOUS les nombres entre 1 et 80 avec l'addition seule, chaque envahisseur ne pouvant être répété que deux fois au maximum.
Ce deuxième jeu est un jeu retourné, c'est-à-dire que le moyen d'exploration du 1er jeu – les envahisseurs – est maintenant l'objet de la question, et l'on a posé des contraintes (variables didactiques).

La solution experte consiste à partir de 1 ; on obtient 1 + 1, puis on ne peut plus avancer ; on ajoute donc 3, ce qui permet d'envahir 3 + 1, 3 + 1 + 1, 3 + 3, 3 + 3 +1, 3 + 3 +1 + 1, puis on est bloqué de nouveau ; il faut donc ajouter 9 aux envahisseurs. Le lecteur pourra vérifier qu'on envahit alors jusqu'à 26, et qu'il faut ajouter 27 (tiens donc ! 1, 3, 9, 27 ...) ; et qu'avec 27 on envahit alors jusqu'à 80, et qu'on serait bloqué au-delà ...
On peut aussi vérifier que toute autre solution, en particulier celle qui consiste à partir de 80 et à diviser par deux, donne un plus grand nombre d'envahisseurs et qu'elle est donc perdante par rapport à la précédente.
Le concept sous-jacent à ce jeu est la numération en base trois, ce qu'on découvre en identifiant les envahisseurs : en effet un nombre peut être envahi si l'on peut l'écrire à l'aide des puissances de trois. La contrainte : ne pas répéter un envahisseur plus de deux fois, correspond au fait que le chiffre d'un rang donné ne peut pas dépasser 2.

3ème jeu : envahir tous les nombres jusqu'à 9000, avec le moins d'envahisseurs possibles ; on peut répéter jusqu'à 9 fois un envahisseur.
Ce dernier jeu est un jeu réflexif pour prendre conscience de la structure. Il s'agit bien entendu de la numération décimale.

Retournement de situation et connaissance nécessaire
Ce jeu des envahisseurs a été construit :

- par une première question : on donne des envahisseurs, il faut envahir les nombres, question ***directe*** puisqu'on dispose de la règle et des éléments permettant d'écrire des égalités vraies dans le jeu ;
- suivie d'une deuxième question qui est ***retournée*** par rapport à la précédente puisque cette fois, on a le but à atteindre, avec les conditions (envahir tous les nombres...) mais pas les envahisseurs, ni d'algorithme pour les trouver. Ce jeu installe le milieu de référence, mais n'institutionnalise pas encore le savoir, puisque celui-ci y est implicite ou du moins voilé par l'expérience.

Ainsi :

- le milieu objectif ne contient pas la connaissance visée, le but est la constitution d'un répertoire et de stratégies de base sur le jeu ;
- le deuxième jeu contient la connaissance visée en acte comme nécessaire : le joueur, pour gagner, doit ***utiliser*** la numération en base trois ;
- la venue à la conscience des joueurs de ce que c'est bien, ce savoir qui s'est joué fait partie de la suite du milieu de référence (vers la situation d'apprentissage), avec débat et preuve ; cela déclenche le processus d'institutionnalisation ;
- le troisième jeu est un jeu de structuration du savoir qui débouche sur l'institutionnalisation : bases de numération

Le troisième jeu est une reprise, mais aussi une généralisation du second, dans un cas que les élèves connaissent bien, la numération décimale. Cette familiarité peut faire prendre conscience de ce qui n'avait pas jusqu'alors été perçu, la structure de l'écriture des nombres dans une base de numération. Cette structure n'a pas été perçue en manipulant la numération décimale car celle-ci est trop familière et devenue transparente, ni en trouvant 1, 3, 9, 27 comme envahisseurs car la consigne ne correspondait pas à la représentation des bases de numération.

Ce jeu est aussi réflexif (comme signalé plus haut) : la généralisation augmente la prise de conscience du caractère plus étendu du phénomène (étudié sur deux exemples), et étend la validité de la preuve. Ce niveau de jeu correspond donc bien non seulement au milieu de référence, mais débouche sur le milieu de la situation didactique (preuve, institutionnalisation) ou même sur le milieu de l'élève réflexif.
On voit dans l'exemple des envahisseurs que la situation est bien construite en deux parties essentielles, un jeu direct et un jeu retourné :

- le jeu direct est là pour familiariser le joueur avec la stratégie que requiert le jeu, et avec les objets mathématiques manipulés ; ce jeu ne contient pas la connaissance comme nécessaire, elle est seulement contingente (rien n'empêche le joueur de dire : " Envahir tous les nombres, je sais faire ça, on le fait avec les bases ", mais bien sûr rien non plus ne l'y contraint) ;
- le jeu est alors retourné pour que le joueur ne puisse plus jouer sans la connaissance visée, qu'il va rencontrer en action ; en effet les consignes (contraintes) l'obligent, pour gagner, à utiliser cette connaissance (en acte).

Ce schéma de construction d'une situation est alors transposable à des situations de l'enseignement secondaire, comme la construction de nouveaux points à partir de points connus à l'aide de vecteurs donnés (le rallye du plan, cf. Bloch 2002).

Conclusion

Il résulte donc de la nature des savoirs mathématiques et de la spécificité du travail dans chaque milieu, qu'il ne faut pas compter pouvoir enseigner une notion mathématique avec seulement une confrontation au milieu matériel, et qu'un enseignement qui organiserait un jeu matériel, pour décréter ensuite que les élèves ont "construit du sens" et peuvent passer à la manipulation de la notion mathématique avec toutes ses spécificités et ses manifestations sémiotiques, serait assuré de mettre en échec la majorité des élèves tout en se donnant un alibi d'action de ceux-ci.
Il faut donc insister sur la nécessité qu'il y a à analyser :

- la succession des situations à organiser autour d'un même concept mathématique, et l'examen des milieux que ces situations installent pour l'élève ;
- les expériences que ces élèves doivent vivre au sujet du savoir mathématique pour qu'ait lieu un basculement de sens : du contingent de la réussite à la cohérence et la nécessité des savoirs et des énoncés mathématiques ;
- l'articulation des situations, des objets mathématiques visés et effectivement construits, et des outils sémiotiques qui figureront dans les institutionnalisations et pourront ensuite être utilisés de façon mathématique pertinente par les élèves (par exemple, écriture de la numération avec contrôle des règles par les élèves).

En formation, il est essentiel d'insister sur ces points, y compris de façon effective et contextualisée lors des visites dans les classes, afin de ne pas laisser les professeurs dans l'illusion qu'une simple activité les dispense de réfléchir sur cette complexité.

Exemples d'approches en formation de certains concepts de didactique des mathématiques

Marie Lise PELTIER, IUFM de Haute Normandie et DIDIREM Paris 7

Introduction

Je vais tenter de réfléchir à haute voix à la construction d'une situation de formation ayant pour but de familiariser les étudiants ou stagiaires avec certains concepts de didactique qui me semblent des outils particulièrement efficaces pour construire des séquences d'enseignement prenant en compte l'hétérogénéité des élèves.
La stratégie de formation que je vais suivre est une stratégie d'homologie-transposition. Il s'agit en effet de commencer par faire travailler les étudiants ou stagiaires sur un problème mathématique, puis de leur proposer de faire un pas de côté en analysant leur propre démarche, puis la situation dans son ensemble.

La démarche que je vais proposer s'appuie sur un certain nombre d'hypothèses que je vais présenter rapidement.

- Il me paraît difficile d'aborder la didactique des mathématiques sans mathématiques, ce qui a pour conséquence que les différents concepts de didactique que je choisis de travailler seront présentés lors de l'analyse a posteriori d'une situation de résolution d'un problème de mathématiques ou lors de la construction d'une situation d'apprentissage en mathématiques.

- Si la différenciation pédagogique est a priori nécessaire pour permettre à tous les élèves de progresser, elle ne doit pas être posée comme un principe de départ. C'est à dire que je fais l'hypothèse que les apprentissages mathématiques ayant lieu en milieu scolaire, il est indispensable de profiter des interactions entre pairs et avec l'enseignant (socio-constructivisme). De ce fait il me paraît fondamental de construire une histoire commune à toute la classe, histoire à laquelle tous les élèves pourront se référer. Cette histoire commune contient, autant que faire se peut, les situations clefs de l'apprentissage d'une notion (constituant la situation fondamentale de la notion si elle existe). Or, pour être résolues par tous, ces situations proposées à l'ensemble de la classe doivent pouvoir être adaptées à chacun, c'est là qu'intervient selon moi la nécessité de l'analyse a priori de la situation que le professeur souhaite donner à ses élèves. Il s'agit d'étudier le plus finement possible la tâche de l'élève, de repérer les différentes variables didactiques et de commande pour pouvoir envisager des aides, des variantes, des prolongements, d'étudier de manière approfondie les modes de validation possibles.

C'est cette démarche que je vais présenter brièvement dans le cadre de la formation en PE1 ou PE2

I Présentation de la situation choisie: La fleur

La situation choisie est une situation de reproduction de figures géométriques dans le plan.
Cette situation est décrite dans les carnets de route de la COPIRELEM : Concertum, tome 2 pages 183 à 189. Elle est reprise ici avec des modifications dues à ma propre évolution en didactique des mathématiques.
L'enjeu de la situation est de reproduire une rosace à huit branches à partir d'un modèle. (annexe 1)

I.1. Les objectifs pour le formateur

- Sur le plan mathématique retravailler sur les figures planes : cercle, diamètre, centre, division du cercle en arcs isométriques, carrés inscrits dans un cercle, éléments de symétrie, rotations, droites perpendiculaires, bissectrice d'un angle, théorème de Pythagore.
- Remarque : dans cette tâche de reproduction, ces notions sont rencontrées sous leur aspect outil et non objet.
- Sur le plan didactique : analyse a priori, variables didactiques, validation, notion de problème
- Sur le plan pédagogique : différenciation

I.2. Analyse a priori

1. Le choix du dessin

Le nombre de pétales de la fleur (8 grands, 8 petits) provoque une déstabilisation des savoir-faire chez les élèves ou chez les stagiaires, lesquels activent spontanément un schème d'assimilation et se heurtent à une contradiction (obtention d'une rosace à 6 branches). Les recherches et les débats pour dépasser cette contradiction vont permettre une rééquilibration des conceptions des élèves ou des étudiants. Ce jeu de déséquilibre-reequilibration contribue à la construction et à l'appropriation d'un nouveau savoir-faire.

2. Analyse de la tâche

La tâche comporte deux volets :
- une analyse de la figure.

Elle concerne le nombre de branches, la régularité de la figure (existence de huit axes de symétrie, d'un centre de symétrie, d'un centre de répétition d'ordre 8) , la recherche des centres des demi-cercles. Cette analyse est rendue indispensable parce que il existe des éléments non apparents sur le dessin, mais indispensables pour la construction ayant le statut d'outil provisoire (par exemple deux diamètres perpendiculaires et les bissectrices, ou deux carrés sous-jacents).

- une construction géométrique.
  Pour cette construction, plusieurs procédures sont envisageables :
  - la division du cercle en huit arcs isométriques par le tracé de deux diamètres perpendiculaires et des bissectrices des angles obtenus,
  - la construction de deux carrés concentriques se déduisant l'un de l'autre par une rotation d'un huitième de tour,
  - la construction d'un carré, de son cercle circonscrit, de ses médianes prolongées jusqu'au cercle,
  - le pliage en huit d'une feuille de papier, suivi du tracé d'un cercle sur le papier déplié centré aux point d'intersection des plis,
  - le tracé d'un angle droit, de sa bissectrice, puis le tracé d'un cercle centré au sommet de l'angle et au compas de la corde déterminée sur le cercle par deux demi-droites formant un angle de 45°, etc..

3. Problème de la validation

Les modes de validation sont liés au choix relatif à l'échelle de reproduction.
- Si la reproduction se fait à l'identique, la validation peut se faire par superposition avec le modèle (sur calque ou transparent), mais dans ce cas la tâche de reproduction peut être réalisée sans analyse de la figure, par tâtonnement par report de longueurs au compas.
- Si l'échelle est différente et non imposée, la conformité au modèle ne peut être repérée que visuellement, globalement, par dénombrement des pétales de la fleur et par estimation de la régularité de la rosace obtenue.
- Si l'échelle de reproduction est fixée graphiquement ou numériquement par exemple par la donnée de la longueur d'un pétale, alors il est possible d'envisager un mode de validation (pragmatique) par superposition avec le modèle (sur calque ou transparent). Dans ce dernier cas, suivant la procédure choisie pour reproduire, la reproduction pourra ou non nécessiter un calcul faisant intervenir le théorème de Pythagore et permettra un éventuel retour à une situation d'action puisque la méthode initialement mise en œuvre devra peut-être être adaptée pour obtenir la dimension imposée.

Cette analyse du problème proposé nous permet de :
  - repérer un certain nombre de variables didactiques et pédagogiques et de les fixer,
  - concevoir des aides pour différencier la tâche,
  - prévoir le(s) mode(s) de validation,
  - envisager des prolongements,
  - prévoir le déroulement,
  - définir les consignes,
  - prévoir ce qui sera institutionnalisé.

4. Les variables à disposition

Le nombre de " pétales " de la fleur (nous ne jouerons pas sur cette variable pour laisser au problème sa consistance).
La présence de couleurs et leur répartition[5].
La présence d'éléments d'aide à l'analyse et ou à la reproduction.
Le support (papier uni ou quadrillé) sur lequel est proposé le dessin.
Le support sur lequel il devra être reproduit.
L'accès au modèle.
L'échelle de reproduction.

5. Les aides

Les aides à l'analyse peuvent être des modèles sur lesquels figurent certains éléments nécessaires à la construction ou des modèles dessinés sur un support quadrillé.
Des aides à la construction peuvent être la donnée d'une figure présentant le début de la construction, ou certains éléments nécessaires à la construction, ou la donnée d'un support quadrillé pour la reproduction. (voir annexe 2)

6. La validation

Pour que les stagiaires n'en restent pas à une validation par conformité visuelle au modèle, il est intéressant de prévoir deux phases, une phase de reproduction libre, puis une phase de reproduction avec une échelle imposée, de manière à pouvoir faire une vérification par superposition.

7. Un prolongement

Prévision d'une consigne de travail supplémentaire qui contribue à approfondir la tâche à effectuer initialement. Il peut s'agir ici de rédiger un programme de construction de la figure pour mobiliser le vocabulaire géométrique, hiérarchiser les informations à donner.

8. Modes de travail et gestion associée

Plusieurs options sont envisageables :
- Analyse collective du dessin affiché puis reproduction individuelle, avec ou sans modèle individuel,
- Analyse à deux du dessin affiché ou distribué et reproduction individuelle,
- Analyse individuelle du dessin affiché ou distribué et reproduction à même échelle ou à échelle différente.

[5] Le choix et la disposition des couleurs peuvent être des variables didactiques. La répartition peut contribuer par exemple à la mise en évidence des carrés sous-jacents, et avoir ainsi une incidence sur les procédures utilisées.

II. Prévision du déroulement en formation initiale

Phase 1. Reproduction de la figure

Le professeur affiche au tableau le dessin en couleur et en grand format (annexe 1) et distribue un modèle sans couleur pour permettre une analyse plus précise, à chaque stagiaire.

Consigne 1
« Vous allez reproduire le dessin qui est affiché sur une feuille blanche avec les instruments de géométrie, vous pouvez échanger avec vos voisins, mais chacun doit réaliser le dessin à la dimension qu'il souhaite. »

Consigne 2
« Lorsque vous pensez avoir réalisé un dessin conforme au modèle, vous le reproduirez une nouvelle fois de telle sorte que la dimension des pétales soit exactement 10 cm, puis s'il vous reste du temps, vous rédigez un programme de construction permettant de construire cette figure sans l'avoir vue ».

Prévision d'un prolongement : *Consigne 3* : « Rédigez un programme de construction ».

Temps de recherche individuelle ou à deux, le professeur identifie les procédures que les étudiants tentent de mettre en œuvre et, si nécessaire, donne à ceux qui ont des difficultés, l'aide qui convient, c'est à dire en cohérence avec la stratégie de l'étudiant.

Mise en commun des procédures pour la reproduction à échelle libre.

Nouveau temps de recherche si nécessaire pour la reproduction à échelle imposée. Pendant ce temps, ceux qui ont terminé rédigent les messages de construction et les échangent deux à deux pour les tester.

Mise en commun des procédures dans ce cas-là. Et éventuellement présentation et analyse des messages produits (méthode choisie, vocabulaire utilisé, présence de lettres pour coder certains points, forme choisie). Les messages inefficaces seront à modifier par leurs auteurs.

Phase 2. Synthèse mathématique

- Division du cercle en huit arcs isométriques
- Théorème de Pythagore

Phase 3. Analyse de la situation

Le but de cette phase est de permettre aux étudiants ou stagiaires de prendre du recul par rapport à la situation qu'ils auront eux-mêmes vécue. Il s'agit de changer de posture, de passer du statut d'élève à celui de professeur. Pour cela le formateur peut proposer un questionnement sur lequel les stagiaires auront à réfléchir tout d'abord individuellement, puis par groupe de deux ou de quatre.

Exemple de questionnement possible :

1. Questionnement sur le choix du dessin.
   - Quelles notions mathématiques sont en jeu dans la tâche de reproduction de ce dessin ? Parmi elles, quelles sont celles qui pourraient faire l'objet d'une institutionnalisation ?
   - Quelles variables didactiques sont à disposition ?
   - Quelles aides sont envisageables ?
   - Quel type de validation envisager ?

2. Questionnement sur le mode de travail proposé.
   - Quelle incidence le mode de travail proposé a-t-il sur le déroulement de la séance ?
   - Quelles seraient les différentes options que l'on pourrait prendre et leur incidence respective sur la tâche à effectuer ?

3. Questionnement sur un éventuel transfert de cette situation à l'école élémentaire.
   - Pour une séance de reproduction de ce dessin dans une classe de CM, quel mode de travail choisiriez-vous et pourquoi ?
   - Quelles sont vos prévisions sur les procédures que pourraient mettre en œuvre les élèves ?
   - Quels éléments mathématiques choisiriez-vous d'institutionnaliser ?

Phase 4. Etude d'un sujet de concours

Cette phase a pour but de permettre aux étudiants de s'approprier les éléments de didactiques qui ont été exhibés au cours de la séance et qui sont présentés dans le paragraphe suivant.
Le sujet choisi est le volet 2 donné à Grenoble en 1998.
Il s'agit de l'étude d'un document pédagogique issu du manuel scolaire « le nouvel objectif calcul » CM2 (1998, éditions Hatier) relatif à la reproduction de « la fleur ».

III. Apports didactiques

Cette synthèse collective prend en compte et questionne les réponses des différents groupes.
Elle peut porter sur les points suivants :

1. Notion de problème en géométrie à l'école élémentaire

Faire des mathématiques, c'est résoudre des problèmes en développant un raisonnement que ce soit dans le domaine numérique ou en géométrie. Pour que cette activité cognitive puisse avoir lieu le problème doit vérifier certaines caractéristiques[6] notamment les suivantes :

- Le problème doit mettre en jeu la connaissance (la notion, la technique) dont l'apprentissage est visé (ici diverses procédures de division du cercle en huit arcs isométriques).
- Le problème doit être "consistant", c'est à dire que la réponse ne doit pas être évidente sinon ce serait simplement un exercice d'entraînement. Dans l'activité proposée, c'est le nombre d'axes de symétrie du modèle (de pétales de la fleur) pour le niveau de classe déterminé qui assure la consistance.
- L'élève doit pouvoir s'engager dans la résolution avec ses connaissances antérieures, mais il doit aussi avoir à chercher pour les adapter et les faire évoluer. Ici la construction de la rosace à 6 branches permet une entrée dans la recherche, mais les critères de conformité au modèle conduisent à rejeter cette première construction et à faire évoluer l'analyse de la figure.
- La validation doit être le plus possible à la charge de l'élève (on parle d'auto validation). Dans la situation cette auto validation, assurée dans un premier temps par simple perception visuelle globale, est affinée par l'utilisation du calque lorsque l'échelle de reproduction est imposée.
- Le problème doit pouvoir servir de référence pour la notion et pour la classe. Cet aspect me paraît très important à souligner car il me semble nécessaire que l'enseignant prenne en charge le travail de décontextualisation et de mémorisation que les élèves doivent effectuer pour construire des connaissances solides et en réseau, or il ne peut le faire que si tous les enfants ont été confrontés au même problème, même si certains ont pu bénéficier d'aide.

2. Différents modes de validation en géométrie, en liaison avec les différents paradigmes géométriques

J'évoque ici les différentes géométries mises en évidence par Houdement Kuzniak[7],(2000) reprises par Parzysz[8] (2001), et les modes de validation qui y sont associés. Ici il s'agit de la géométrie spatio-graphique G1, les validations y sont généralement perceptives et instrumentées.

3. Aspect outil et objet des connaissances

Ici, il s'agit d'évoquer les différents statuts des notions mathématiques. Elles peuvent être envisagées sous leur aspect objets faisant partie d'un corps de savoirs constitué,

---

[6] Ces caractéristiques ont été mises en évidence par R. DOUADY, RDM.7.2. La pensée sauvage (1987) Grenoble.
[7] Houdement C.; Kuzniak A., RDM 20.1 (2000)
[8] Parzysz B. , Actes du colloque COPIRELEM de Tours (2001)

institutionnellement reconnus. Elles peuvent également être en jeu dans la résolution d'un problème, dans ce cas elles apparaissent comme outils de résolution parfois explicites parfois implicites. Pour que les notions prennent tout leur sens, nous faisons l'hypothèse que les élèves doivent les rencontrer à la fois sous leur aspect outil et sous leur aspect objet. Ici lors de la reproduction de la rosace, les notions apparaissent sous leur aspect outil ; c'est la phase d'institutionnalisation qui permet de les mettre en évidence en tant qu'objets de savoir partagés par la classe.

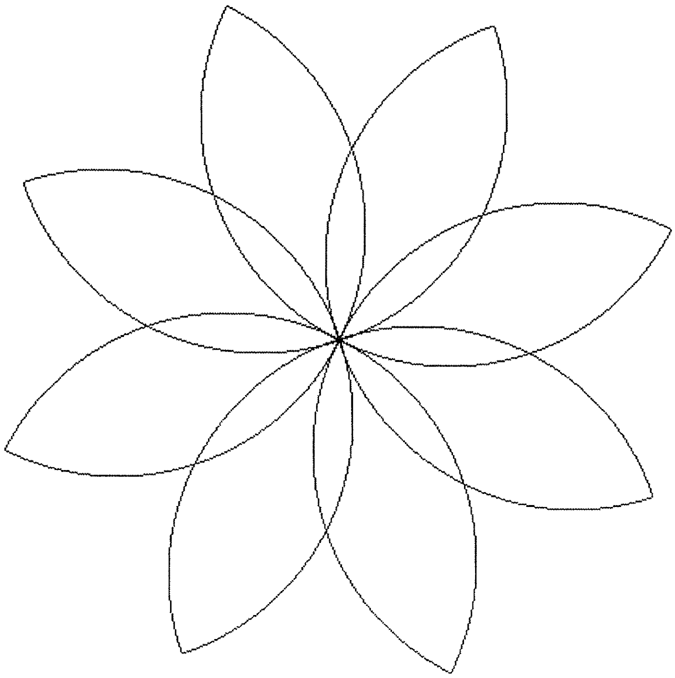
4. Institutionnalisation

C'est la notion de processus d'institutionnalisation que j'essaie de mettre en évidence ici, en pointant le fait que les connaissances se construisent sur le long terme. Pour que cette construction puisse avoir lieu, il est nécessaire, lors de chaque activité, de permettre aux élèves de repérer avec précision les éléments qui doivent être retenus en raison de leur degré de généralité ou de leur caractère fonctionnel ou de leur statut de savoirs mathématiques reconnus.
Ce sont donc des institutionnalisations partielles et locales qui ponctuent les séances et qui à terme permettent au maître de présenter le « savoir académique », non comme un simple objet culturel, mais aussi comme outil très précieux dans la résolution de nombreux problèmes.

5. Analyse de la tâche

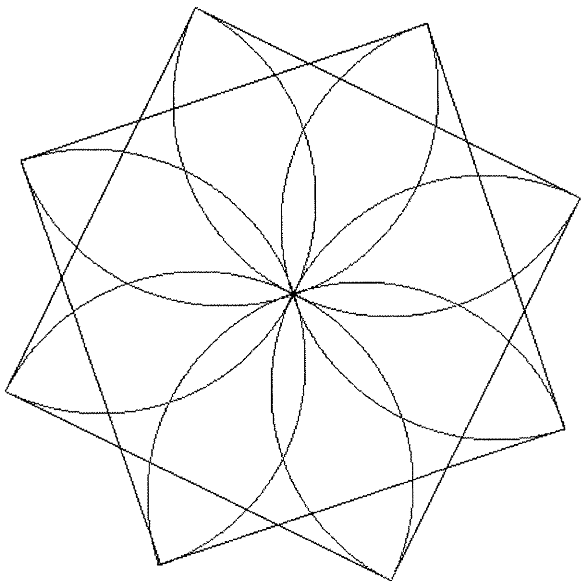
J'insiste ici sur la nécessité de conduire cette analyse lors de la préparation de la séance puisque c'est elle qui va permettre à l'enseignant à la fois de contrôler ce qui va potentiellement être appris par les élèves au cours de la séance, et de prévoir une gestion de classe adaptée et efficace. Pour cela l'analyse doit comporter un repérage très fin des savoirs effectivement en jeu et des savoirs dont l'apprentissage est visé, un repérage précis des variables didactiques et de commande sur lesquels l'enseignant va pouvoir jouer à la fois pour assurer la dévolution du problème à ses élèves et pour adapter la tâche à chacun afin de gérer efficacement l'hétérogénéité du groupe. Elle doit bien sûr également recenser tous les modes de validation envisageables.

Annexe 1 La rosace modèle

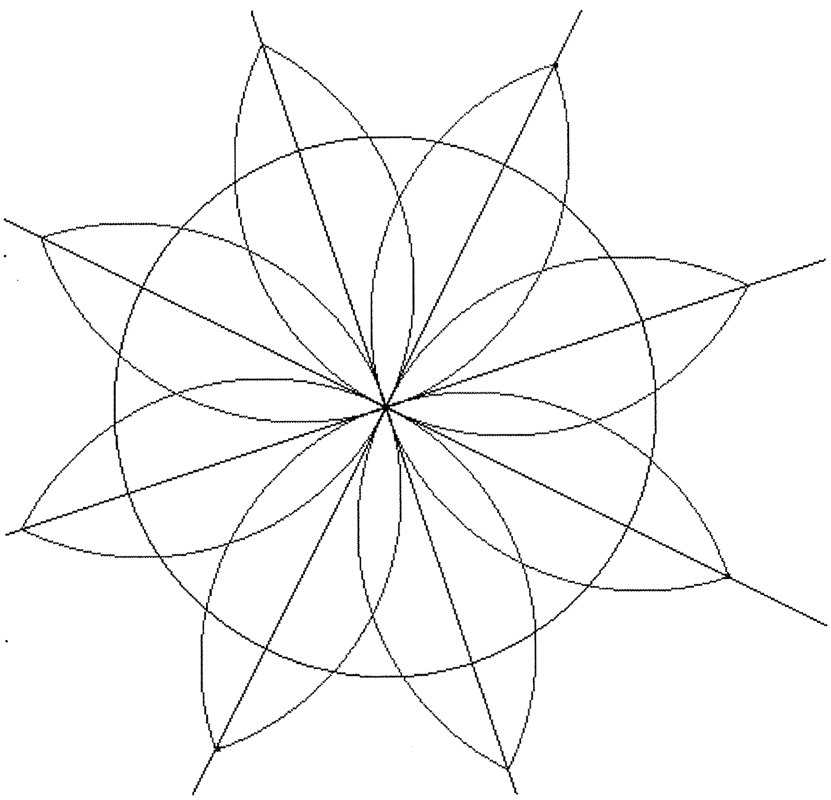


Annexe 2 Des aides possibles

Les carrés de la rosace



La rosace avec ses branches



ANNEXE (Article d' I. BLOCH)

La situation de la distance d'un point à une droite

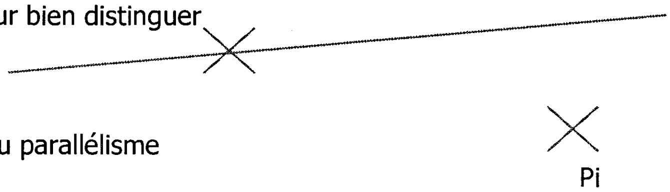
SEANCE 1

Matériel : ficelle, décamètre par groupe, crayon et papier, règle et équerre de tableau mais pas de règles ni de double décimètre, craie.

Phase 1 : la distance d'un point à une ligne droite
Organisation de la classe : par groupes : G1, G2, G3, etc.

Une ligne droite d'une dizaine de mètres de longueur est tracée sur le sol de la cour ou matérialisée par une ficelle entre deux piquets.
Chaque groupe se voit attribuer un « point » Pi, matérialisé par une croix sur le sol ou un piquet, à une certaine distance de la ligne.

L'objectif du problème est : comment matérialiser P pour bien distinguer le point de la ligne et celui «extérieur » associé ?
Les points devraient être à au moins 2m de la ligne, entre la ligne et le mur (pour que dans le problème 2, le mur ne soit pas une aide trop forte, et que la stratégie du parallélisme soit alors un peu favorisée. Est-ce possible ?



Problème 1 :
Consigne : « Se placer à l'endroit marqué sur la ligne. A quelle distance est-on de P ? En se déplaçant sur la ligne, sans la quitter, y a-t-il un endroit où est-on le plus près de P ? ***Où et à quelle distance est-on alors le plus près de P ? »***

Chaque groupe marque le résultat de la mesure relative à Pi sur un papier.

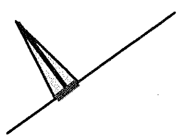
Solution attendue : La suite des mesures indique à une incertitude liée au matériel, une solution de type « zone » sur la ligne. Une mesure est trouvée par chaque groupe à plusieurs Pi.

Les groupes changent de ligne et de Pi.
On rentre dans la classe, et on mène un échange collectif sur les résultats pour aboutir à :
- un accord sur les mesures, ou nécessité de vérification collective,
- un accord sur l'existence d'une zone.

Institutionnalisation:
Le professeur introduit *la définition pragmatique de la distance d'un point à une ligne, comme plus petite distance entre ce point et tous les points de la ligne.*

Remarque à susciter si elle vient, sans insister : les mesures minimales sont faites dans une certaine zone. On peut caractériser cette zone comme proche (à gauche et à droite) de la perpendiculaire à la ligne de base menée du point.

Le nombre trouvé a une incertitude qui pourra être *convenue* dans une mesure réalisée sous contrôle collectif (réalisation lorsque le problème se pose).



Phase 2 : vers les lignes parallèles

Un point est choisi (entre 2 et 3m) et désigné (R), la mesure est réalisée collectivement, sous contrôle méthodologique du maître. Une ligne L est tracée comme précédemment (ou la même).

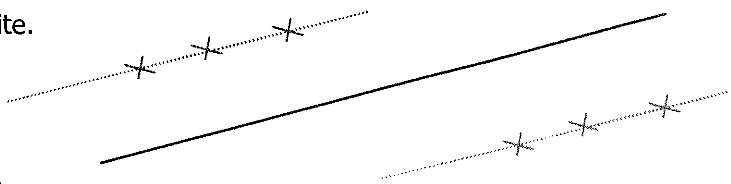
Problème 2.0

Chaque équipe place un autre point à la même[9] distance de la ligne que Pi (on peut la désigner par la mesure), mais de l'autre côté de la ligne.
Une fois vérifiées les distances, on recherche les causes d'erreur s'il y en a, et sinon on recherche à identifier et améliorer les méthodes.

Remarque : Il faut au moins un mètre de distance entre les points et la ligne.

RETOUR EN CLASSE : PROBLÈME 2

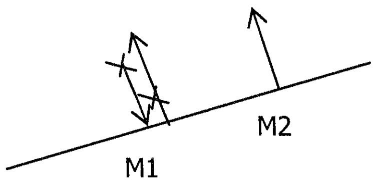
Jeu 2 par 2, sur une feuille A3.
« Le premier qui place plus de 10 nouveaux points à la distance annoncée, avec moins 1mm d'erreur a gagné. »
La feuille est traversée en diagonale par une ligne droite.
La distance est au moins 8 cm par exemple.



Puis : jeu du « béret » au tableau.
La classe est divisée en deux équipes.
Le tableau est traversé en diagonale d'une ligne droite.
Une équipe a comme domaine la partie au dessus de la ligne, l'autre au dessous.
Chaque joueur a moins d'une minute.
L'équipe adverse peut contester. En ce cas elle ne dispose pas de plus de temps pour faire les deux, montrer que des points sont mal placés et placer les siens.

Stratégies « gagnantes » :
- utiliser l'équerre de tableau pour vérifier,
- aligner les nouveaux aux anciens (à partir de trois) situés du même côté de la ligne.

Remarque : dès que la stratégie de l'alignement est trouvée, le jeu est « mort », mais un travail de vérification individuelle sur feuille peut être réalisé par un jeu à deux.



Observation :
Parmi les méthodes de placement initial qui sont « bonnes » et que je prévois :
- Méthode 1: partir d'un point extérieur à la ligne, mesurer, et rapprocher ou éloigner le point jusqu'à obtenir un point à la bonne distance. Prolonger la ligne de mesure suppose d'avoir perçu que toutes étaient dans la même direction, et que l'on peut économiser des tâtonnements en « glissant ».

- Méthode 2 : partir de la ligne, et sur une bonne direction (ce qui suppose d'avoir perçu que toutes étaient dans la même direction), rechercher le point à la bonne distance. La méthode 2 est plus rapide si on sait tracer une perpendiculaire, en utilisant l'orientation de son corps ou un instrument.

L'équerre devrait intervenir rapidement, soit comme outil de placement, soit comme outil de vérification

Institutionnalisation Pour trouver un point qui soit à la bonne distance de la droite, il suffit de mener une perpendiculaire à la ligne, et de mesurer la bonne distance sur cette perpendiculaire.

---

[9] Est-il utile de garder la même ou d'en donner une autre ? Je ne sais, c'est une question non essentielle. Par contre, pour le problème 2, il ne faut pas changer.

Remarque : il paraît souhaitable de ne pas trop « enseigner » cette propriété, dont il va falloir se libérer juste après... avant d'y revenir.
Son acquisition devrait résulter d'une véritable expérience commune acquise dans le méso-espace.

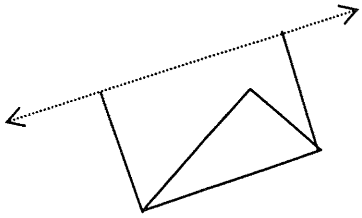
Institutionnalisation de la séance

- Les points situés à la même distance d'une ligne (et d'un même côté) sont sur une autre ligne, que l'on dit *parallèle* à la première.
- Comment *vérifier* que deux lignes droites sont parallèles ou non ? Si, en deux endroits au moins, les distances d'un point de l'une avec l'autre sont les mêmes.

SÉANCE 2

Chaque groupe se voit attribuer un triangle (5m ; 4m ; 6m) matérialisé par une ligne.
Décamètre, ficelles, piquets, matériel de géométrie du professeur (règles équerres notamment).

Problème générique : *placer des points exactement à « x » mètres de la ligne formée par le « grand » côté du triangle, sans entrer dans le triangle ni passer par dessus.*

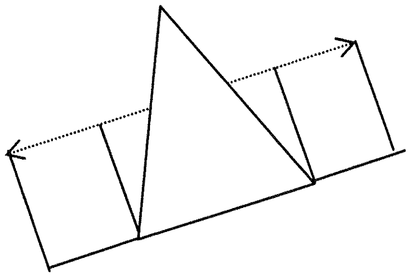


Les distances choisies constituent une variable didactique :

Problème 1.1 :
Si la distance « x » est d'abord supérieure à la hauteur, par exemple 4m,
deux solutions symétriques viennent par construction des rectangles s'appuyant sur le grand côté. La propriété « angle droit » a été pratiquée dans la première séance, et peut ici être réinvestie.
Pour la réalisation, elle n'est pas nécessaire, puisqu'on peut construire les deux points extrêmes et relier ; mais il me paraît intéressant de faire remarquer, de s'interroger si c'est ou non un rectangle...

Pourquoi a-t-on un rectangle ? constat : les angles sont quasiment droits, ou retour aux propriétés du rectangle...réinterprétées et la mesure de la distance se fait sur la perpendiculaire)
y a-t-il d'autres points que les segments trouvés ? (oui, en les prolongeant)

Problème 1.2 :
En rendant ensuite la distance inférieure à la hauteur (2m),
on permet le réinvestissement de la méthode des rectangles du problème 11...
La méthode nécessite alors de construire un rectangle de chaque côté de l'intérieur du triangle, en prolongeant le segment, puis, si on propose de se rapprocher du triangle, à prolonger le côté nouveau construit parallèle à la base



Problème 2 :
Quelle est la distance d'un point P d'un côté aux autres côtés (cas d'une distance inférieure à 2m, supérieure à 2m ?
Matériel souhaitable, tiges de bois de 2m.
Solutions géométriques :

- par reconstruction d'un triangle isométrique,
- par prolongement du côté (débouche sur la symétrie point),

- par construction du « rectangle »en deux temps : perpendiculaire au 3ème côté, déplacement sur cette ligne en visée avec l'équerre, jusqu'à alignement avec P.

On peut espérer me semble-t-il avoir au bout de ces deux séances une assez bonne connaissance des liens entre droites parallèles et équidistance, relation entre distance à une droite et perpendiculaire menée à cette droite.... Et avoir introduit la pratique des prolongements de lignes droites et alignements.