ATELIER C

TITRE :. **LA SOMME DE PLUS GRAND PRODUIT**

AUTEURS : **Catherine HOUDEMENT ; Marie-Lise PELTIER.**
(IREM et IUFM de Haute Normandie, DIDIREM Paris 7)

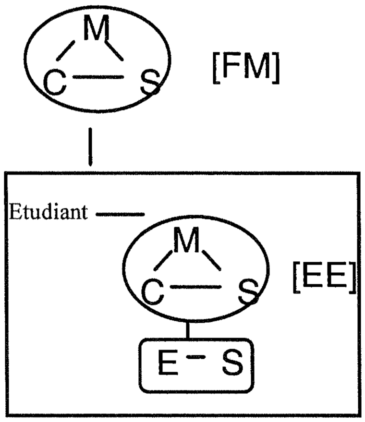
DATE : **Novembre 2002.**

RÉSUMÉ : . **L'atelier présente une stratégie de formation pour les PE1, conçue pour être homologue à une stratégie préconisée pour les élèves (mise en activité des élèves, puis mise en commun et synthèse, suivie d'une institutionnalisation). Cette présentation a été elle-même faite selon une stratégie d'homologie, cette fois-ci en direction des formateurs participant à l'atelier. La situation part de la question suivante *: Quelle est, pour un nombre entier donné, la décomposition additive de produit maximum ?* La synthèse pour les formateurs permet de discuter de notions mathématiques et didactiques dont : raisonnement et preuve ; phases d'action, de formulation, de validation ; savoirs et connaissances.**

1. Présentation des systèmes didactiques emboîtés dans le cadre de la formation des enseignants et des différentes stratégies de formation

Revenons brièvement[17] sur une description possible des systèmes en jeu pour étudier la formation des maîtres du premier degré en mathématiques. KUZNIAK (1994) a introduit le schéma suivant pour rendre compte de l'emboîtement des systèmes : le système formation [FM] vise à l'acquisition par l'étudiant de connaissances sur le système Ecole [EE]. Or un des pôles de [EE] est justement l'étudiant devenu professeur. Le formateur (M) en IUFM opère à l'intérieur d'un groupe classe (C) pour transmettre un savoir. Le savoir en jeu dans le système de formation (que nous appellerons savoir de formation) est donc celui qui permet à un professeur interagissant dans une classe d'école primaire de produire des connaissances mathématiques chez des élèves.

[17] Pour une explicitation plus fine voir HOUDEMENT et KUZNIAK (1996)



[FM] I.U.F.M.

[EE] Ecole Elementaire

Le savoir de formation est a priori complexe du fait de ses multiples composantes : savoirs mathématiques, au minimum celui à enseigner, mais aussi celui permettant une réflexion sur la transposition effectuée par les programmes ou à effectuer par le professeur ; savoirs didactiques issus des théories installées ; savoirs pédagogiques liés à l'exercice effectif dans une classe....
KUZNIAK a repéré et classé les stratégies de formation existantes chez les formateurs d'enseignants avant 1992 selon des variantes venant du degré d'imbrication des savoirs mathématiques et didactiques, de la position déclarée du formateur dans le dispositif (modèle ou informateur), de l'intention plus ou moins forte de contrôler la réception de ces savoirs par les étudiants (d'influer sur leurs conceptions des mathématiques ou de l'enseignement de mathématiques). Il en déduit une typologie (appuyée par une nomenclature) qui nous fournit une bonne base des dominantes stratégiques possibles pour les enseignements de première année d'IUFM. Rappelons-la succinctement :

Dans **les stratégies culturelles,** le formateur diffuse une information ; il veut accroître le savoir mathématique (ou éventuellement didactique) de l'étudiant, sans se préoccuper de la mise en œuvre ultérieure par l'étudiant dans les classes.

Dans **les stratégies de monstration,** le formateur cherche à transmettre une pratique d'enseignement, en montrant sa mise en œuvre effective dans les classes, soit in vivo, soit via une vidéo... L'étudiant regarde un maître qui fait la classe en visant un objectif mathématique.

Par les **stratégies d'homologie**, le formateur cherche à transmettre sa propre conception de l'enseignement des mathématiques, en la mettant en œuvre dans son enseignement, et des habilités de gestion d'un groupe classe ; il construit des séances à visée mathématique ou didactique ; il attend que les étudiants utilisent dans leurs classes des mises en œuvre proches de celles des séances qu'ils ont vécues comme élèves.

Avec les **stratégies de transposition,** le formateur cherche à transmettre un savoir de référence sur l'enseignement (ce savoir était avant 1991 souvent en voie de constitution dans la mesure compte tenu de la jeunesse de la didactique) et tente de maîtriser le phénomène d'adaptation opéré par les étudiants.

Notre expérience de formatrices nous amène à privilégier dans la mesure du possible les stratégies d'homologie-transposition en particulier pour la première année du professorat des écoles. En effet elles nous semblent les plus économiques pour une transmission simultanée des savoirs mathématiques et didactiques et qui prend en compte les conceptions des étudiants.

Dans l'atelier, nous proposons une situation d'homologie-transposition et demandons aux collègues du séminaire, donc à un troisième niveau de système didactique, de jouer le jeu d'apprenants pour inférer certaines caractéristiques d'une telle situation avec des adultes se destinant au professorat des écoles.

Nous renvoyons au séminaire de l'année précédente (*Cahier du Formateur* n°5, Maxéville 2001) pour le même dispositif sur une autre situation d'homologie.

La situation choisie n'est pas nouvelle. Elle est étudiée dans plusieurs ouvrages (ARSAC 1988 ; ERMEL 1997; ERMEL 1999). Son enjeu est le suivant :
« Un nombre entier peut s'écrire de plusieurs façons sous forme d'une décomposition additive d'entiers. Parmi ces décompositions, trouver celle(s) dont le produit des termes est maximum ».
Ce problème est donc le support d'une recherche effective des formateurs stagiaires sous la conduite des formatrices, puis d'un pointage des notions didactiques illustrées et/ou utilisées par la situation, enfin un prétexte pour échanger sur les différentes conceptions de la formation des futurs professeurs des écoles dans le cadre du concours en fin de première année.

2. Situation de recherche proposée aux stagiaires

Phase 1.

Consigne : « *Un nombre entier peut s'écrire de plusieurs façons sous forme d'une décomposition additive d'entiers. Pour le nombre 10, trouvez la (les) décomposition(s) additive(s) dont le produit des termes est maximum.* »

Modalités de travail : travail individuel puis à deux, relevé des réponses sans commentaires.
Même consigne et mêmes modalités pour le nombre 17.

Phase 2

Consigne : « *Cherchez et rédigez une méthode qui permette de donner, pour n'importe quel nombre entier, la (les) décomposition(s) additive(s) dont le produit des termes est maximum.*

Donnez des arguments qui permettent de convaincre qu'il s'agit bien de la « meilleure » décomposition. Présentez la recherche et les justifications sur un transparent. »

Modalités de travail : travail par groupe de quatre.

Phase 3

Présentation des transparents groupe par groupe.

Nouvelle consigne : « *Vous avez vu les propositions des différents groupes. Vous pouvez maintenant modifier ou compléter la vôtre.* »

Phase 4

Consigne : « *Il s'agit maintenant d'écrire collectivement une conclusion relative au problème posé dans la phase 2.* »

La progression collective vers une formulation stable et acceptée peut être résumée par l'instanciation successive de propriétés, évidentes ou démontrées que nous avons qualifiées de lemmes. Les voici donc :

Lemme 1 (toujours) implicite. Il existe un maximum.
Justification : le nombre de décompositions additives en nombres entiers d'un nombre entier est fini.

Lemme 2 : propriétés de la multiplication
La multiplication est commutative et associative.
0 est un élément absorbant et 1 est un élément neutre pour la multiplication.

Lemme 3 (implicite). La fonction x→ kx dans N pour k entier naturel constant est croissante.

Lemme 4 (explicité). S'il existe un terme n>4 dans la décomposition additive donnant un produit P, décomposer n (sans 0 ni 1) donne un produit supérieur à P.
Justification : si n > 4, n peut se décomposer en termes supérieurs strictement à 1 : n = 2 + (n-2). Or 2 x (n-2) = n + n – 4 est supérieur à n car n-4 > 0. Donc d'après le lemme 3, le produit obtenu est plus grand.

Lemme 5 (explicité). S'il existe 3 termes égaux à 2 dans la décomposition additive donnant un produit P, les remplacer par 2 termes égaux à 3 donne un produit plus grand.
Justification : 3 x 3 > 2 x 2 x 2 ; donc d'après le lemme 3, le produit obtenu est plus grand.

Lemme 6 (explicité).: A somme constante, le produit de 2 nombres est maximum quand les deux nombres sont égaux (la fonction $\begin{array}{l} f : R \rightarrow R \\ x \mapsto x(a-x) \end{array}$ admet un maximum pour $x = \frac{a}{2}$).

Exemple de justification complète

Considérons l'ensemble des produits liés à un nombre N : il existe un maximum atteint (lemme 1).

Considérons le produit maximum P : un raisonnement par l'absurde nous dit que P ne comporte pas de facteur strictement supérieur à 4 (en effet, si P comporte un facteur n > 4, le scinder en 2 et (n-2) augmente P d'après le lemme 4). Donc P ne comporte que 0, 1, 2, 3 et 4.

Par l'absurde, P ne comporte ni 0, ni 1 : d'après le lemme 1 et le fait que l'inégalité k x n x 1 < k x (n+1) est vraie pour tous k et n entiers positifs

Donc P ne comporte que des 2 et des 3 (le 4 étant équivalent à deux 2).

D'après le lemme 5, P contient donc au plus 2 facteurs égaux à 2.

Conclusion :

- si N = 3 q , P(N)= 3^q
- si N =3 q + 1, P(N) = $3^{q-1} \times 2^2$
- si N = 3q + 2, P(N)= $3^q \times 2$

3. Retour didactique sur la situation proposée

Le vécu commun des participants permet de pointer les éléments suivants, susceptibles d'enrichir la culture mathématique et didactique des futurs professeurs d'école ou de lycée et collège dans l'hypothèse où cette situation leur serait soumise.

Sur le raisonnement

Ce peut-être l'occasion de pointer la différence entre raisonner et prouver. Le raisonnement consiste à produire de nouvelles informations à partir d'informations anciennes ou d'informations existant dans la situation ancienne (OLERON 1977), il peut prendre diverses formes : par analogie, par induction, par déduction.... Mais la preuve exigée par les mathématiques se réfère uniquement au raisonnement déductif et s'appuie sur les opérations logiques élémentaires « autorisées » : implication logique, disjonction de cas, raisonnement par l'absurde, raisonnement par récurrence. Ce qui la distingue des preuves communes (preuves pragmatiques) selon un processus que BALACHEFF (1987) a étudié.

La situation permet donc de relever d'abord des conjectures qui se transforment éventuellement en affirmations quand elles sont prouvées. Elle donne l'occasion de mettre en œuvre différents types de raisonnements déductifs : exhaustion de cas (au moins pour le nombre10) ; exhibition de contre exemples au cours de la recherche ; diverses techniques de raisonnement arithmétique (dont le recours à l'analyse : introduction d'une fonction dont on étudie les extrema)[18]

Elle peut aussi sans doute, selon le déroulement effectif, illustrer la distinction entre Explication et Démonstration (DUVAL 1992).

Un exemple de situation didactique du raisonnement

La situation présente diverses phases au sens de la Théorie des Situations Didactiques (BROUSSEAU 1986 édition 1998).
La phase 1 est une phase d'action : les étudiants disposent de leurs connaissances arithmétiques pour lancer leurs recherches et pour réguler leurs propositions.
La phase 2 illustre une dialectique entre action, formulation et validation : la nécessité d'écrire fait avancer dans le raisonnement (rôle du langage et de l'écrit comme outil de pensée) et provoque la mise à l'épreuve : le débat entre pairs élève l'exigence de niveau des preuves.
La phase 3 provoque un aller retour entre formulation et validation : la confrontation aux autres écrits pointe les limites du sien, les formulations s'affinent, les preuves sont réécrites pour répondre aux exigences théoriques.

A priori, cette situation n'est pas une situation a-didactique du raisonnement. Cependant la consigne de recherche de la généralisation de la propriété entrevue sur des exemples peut permettre de dévoluer aux stagiaires la tâche de raisonnement : de ce fait, la situation peut atteindre un certain degré d'a-didacticité, en fonction du niveau mathématique des stagiaires : c'est en effet ce niveau qui les pousse à définir l'exigence de validation.
Le choix des valeurs numériques, 10 puis 17[19] peut constituer une variable mais à condition que les stagiaires aient les connaissances nécessaires pour abandonner le traitement exhaustif des décompositions additives, vite lassant. C'est pourquoi la consigne de généralisation est souvent plus efficace pour viser un travail spécifique sur le raisonnement.

Sur la dialectique savoirs connaissances (CONNE et BRUN 1992**)**

Cette situation permet également de mettre en évidence le caractère différent des s connaissances mobilisées pour résoudre le problème : en effet si certaines sont explicites, d'autres sont des connaissances en actes, non toujours explicitables par les stagiaires.
Par exemple, les propriétés liées à ce que nous avons nommé lemmes 1 et 3 sont toujours implicites, donc du domaine des connaissances du sujet. Les expliciter amène à confirmer leur statut de savoirs.

[18] On peut pointer là un changement de cadre au sens de DOUADY (1986).

[19] Quelques nombres de décompositions additives sans 0 ni 1

Pour 10	Pour 11	Pour 14	Pour 15	Pour 16	Pour 17
11	15	35	39	54	63

A contrario, la propriété liée au lemme 2 est souvent un savoir bien identifié par des ex-élèves ou des professeurs de mathématiques : il devient une connaissance dans le cadre de la recherche.
Le passage aux explicitations de la phase 2 traduit l'expression de connaissances qui proviennent de l'implication d'un individu dans une tâche et de son adaptation à la situation. Ces connaissances sont converties en savoirs lors de la phase 4 : elles sont pointées comme des propriétés effectivement repérables et réutilisables dans l'édifice des mathématiques.

Sur l'activité mathématique et la notion de problème

La situation présentée permet de mettre en évidence certaines caractéristiques de l'activité mathématique : faire des mathématiques, c'est essentiellement résoudre des problèmes, qu'il s'agisse du chercheur ou de l'élève. La différence se situe surtout dans le fait que les problèmes soumis aux élèves sont des problèmes ayant généralement été résolus par d'autres. Il nous semble fondamental de permettre aux futurs professeurs d'école de s'interroger sur ce que signifie pour eux « faire des mathématiques » et de vivre par eux-mêmes l'expérience de la recherche, afin qu'ils puissent comprendre pourquoi les chercheurs, mais aussi l'institution[20], mettent l'accent sur l'importance de la résolution de problèmes dans la construction de connaissances.
Pour définir un problème, nous nous appuyons sur les caractéristiques mises en évidence par DOUADY(1986) que nous reprenons à notre compte :
- un problème est consistant, ce n'est pas une simple application de propriétés ou de résultats connus ;
- il existe des stratégies de résolution de base qui permettent aux élèves de s'engager dans le problème en mobilisant des connaissances antérieures ;
- il existe plusieurs stratégies de résolution mettant en jeu les connaissances dont l'apprentissage ou l'approfondissement est visé ;
- il existe des éléments de rétroaction pour la validation.
La notion de « problème » est donc totalement liée à celle du niveau de connaissances du sujet qui doit le résoudre. « *Il n'y a problème que dans un rapport sujet/situation, où la solution n'est pas disponible d'emblée, mais possible à construire. C'est dire aussi qu'un problème pour un sujet donné peut ne pas être un problème pour un autre sujet, en fonction de leur niveau de développement intellectuel par exemple.* » (BRUN 1999).

Pour mettre en œuvre des scénarii de formation par homologie transposition, nous devons donc proposer des problèmes qui vérifient au maximum, pour des étudiants futurs professeurs d'école, les caractéristiques énoncées ci-dessus. Les problèmes

[20] Rappelons les différents types de problèmes à l'école mentionnés dans les IO de 2002 :
- des problèmes contribuant à l'apprentissage d'une notion, d'un raisonnement,
- des problèmes de consolidation,
- des problèmes nécessitant des transferts des connaissances dans d'autres contextes ou cadres que ceux qui avaient été mobilisés lors de l'apprentissage.

peuvent donc être plus ou moins proches de ceux qui pourraient être proposés à des élèves de l'école élémentaire en fonction du niveau mathématique du public et des notions mathématiques en jeu.

4. Débat sur les situations d'homologie en formation

Consigne prévue : « *sur transparent, notez votre point de vue sur les avantages et les inconvénients des situations d'homologie en formation* ».

Modalités de travail : par groupe de quatre, puis présentation des réponses et débat.

Cette dernière partie, prévue dans le scénario initial, avait pour objectif de faire expliciter les raisons des choix des stratégies de formation des participants pour les futurs professeurs des écoles de première année (préparation au concours), de seconde année et pour les enseignants en formation continue. Elle devait en outre nous permettre de pointer la nécessité d'envisager des situations de formation susceptibles de prendre en compte les conceptions des stagiaires, aussi bien sur les mathématiques que sur l'enseignement des mathématiques.
Par manque de temps ce débat a été très peu développé lors de la séance, mais nous espérons que la situation proposée a été le point de départ de nombreux échanges informels entre les stagiaires au cours du séminaire.

Références bibliographiques

ARSAC G., GERMAIN G., MANTE M. (1988) *Problème ouvert et situation problème.* 55-60. IREM de Lyon

BALACHEFF N. (1987) Processus de preuve et validation. *Educational Studies in Mathematics.* Volume 18. 147-176. Kluwers.

BROUSSEAU (1970-1990, édition 1998) *Théorie de situations didactiques.* 25-43.Grenoble : La Pensée Sauvage

BRUN J. (1999) La résolution de problèmes arithmétiques : bilan et perspectives. *Math-Ecole 141.* 2-15. Neufchâtel Suisse.

CONNE F. et BRUN J. (1992) Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Volume 12/2-3. 221-270. Grenoble : La Pensée Sauvage.

COPIRELEM. (2003) On trouvera différentes situations d'homologie dans les trois tomes de *Concertum. Carnets de route (de dix ans) de la COPIRELEM.* Edité par ARPEME. www.arpeme.com

DOUADY R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Volume 7/2. 5-32. Grenoble : La Pensée Sauvage.

DUVAL R. (1992) Argumenter, démontrer, expliquer, convaincre : continuité ou rupture cognitive ? *Petit x 31.* 37-61. IREM de Grenoble.

ERMEL (1997 et nouvelle édition 2001) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes CM1.* 74-79. Paris : Hatier

ERMEL (1999) *Vrai ? Faux ? On en débat !* 102-116. Paris : INRP

HOUDEMENT C. (1995) *Projet de formation des maîtres du premier degré en mathématiques : programmation et stratégies.* Thèse. Paris : IREM de Paris 7.

HOUDEMENT C. et KUZNIAK A. (1996). Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Volume 16/3. 289-322. Grenoble : La Pensée Sauvage.

HOUDEMENT C. et PELTIER M.L. (2002) Aire de formation *Les cahiers du formateur. Tome 5.* 64-108. IREM de Paris 7.

KUZNIAK A. (1994) *Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré.* Thèse. Paris : IREM de Paris 7.

OLERON P. (1977) *Le raisonnement.* Paris : PUF.