

VINGT ANS DE DIDACTIQUE EN 1993 ! OÙ EN EST-ON DIX ANS APRÈS ?

Marie-Jeanne Perrin-Glorian,
I.U.F.M. Nord-Pas-de-Calais
et Equipe DIDIREM, Paris 7

Résumé :

Petit panorama de la didactique des mathématiques concernant l'enseignement dans le premier degré et la formation des professeurs des écoles.

Le colloque qui nous réunit est le trentième organisé par la COPIRELEM. A cette occasion, la commande des organisateurs était de brosser l'évolution au cours des dix dernières années des recherches en didactique des mathématiques concernant le premier degré (enseignement et formation des maîtres. Il y a dix ans nous faisons l'état des lieux de 20 ans de didactique des mathématiques en France. Qu'en est-il dix ans plus tard ? Programme ambitieux que je ne ferai qu'esquisser.

Je suis donc partie du volume des actes du colloque des vingt ans de didactique, j'ai repris les conférences plénières et les communications qui concernaient le premier degré, puis j'ai regardé les articles parus dans Recherches en didactique des mathématiques entre 1993 et 2002, les thèses, les actes des colloques de la COPIRELEM de 1993 à 2001. Je me suis placée du point de vue des chercheurs et j'ai négligé toutes les publications qui s'adressent aussi aux enseignants comme Grand N, ou les travaux de l'équipe Ermel. Même en me restreignant ainsi, il était impossible dans le temps imparti de faire une synthèse de l'ensemble et j'ai choisi de m'intéresser plus particulièrement à la géométrie et aux études concernant l'enseignant. Ce sont donc ces deux thèmes que je vous présenterai dans les parties II et III, après une petite description d'ensemble que je conclurai par une réflexion sur l'évolution des problématiques et des cadres théoriques, et avant de me risquer à proposer quelques perspectives. Evidemment, il s'agit d'une synthèse personnelle dans la mesure où j'ai fait des choix, n'ai retenu que certains aspects des travaux mentionnés. Le tout est bien incomplet et je demande à tous ceux dont les travaux ne sont pas pris en compte ou sont déformés parce que je n'en ai retenu que certains aspects, de bien vouloir me pardonner.

I. ELÉMENTS POUR UN INVENTAIRE

1- Les perspectives en 1993

Au cours du colloque de 1993, à travers les différentes conférences plénières, les orateurs ont cherché à dresser un bilan de vingt ans de didactique, à marquer des avancées, pointer des questions et dégager quelques perspectives pour la didactique. Je retiendrai quatre points essentiels qui reviennent dans plusieurs des conférences :

- 1) La portée de la didactique des mathématiques et ses relations avec d'autres disciplines du champ des sciences de l'éducation au sens large.

- 2) Le développement des cadres théoriques.
- 3) Les enjeux de la didactique pour l'enseignement des contenus mathématiques.
- 4) L'étude de l'enseignant, les rapports avec les enseignants et la formation des enseignants.

J'en écarte un cinquième qui est celui du cadre institutionnel de développement de la didactique et des enjeux politiques sous-jacents. En 1993, c'était le début de la mise en place des IUFM, comme le soulignait André Rouchier dans sa conférence ; dix ans plus tard, nous sommes dans une période de restructuration qui va peut-être amener certains changements dans les conditions de développement de la didactique des mathématiques, mais je m'en tiendrai aux questions purement scientifiques.

1) *Elargissement du champ de la didactique des mathématiques et relation avec d'autres disciplines*

Dans sa conférence, Guy Brousseau note un élargissement de la définition de la didactique des mathématiques de "*science des conditions spécifiques de l'acquisition provoquée des connaissances mathématiques*" (p. 51¹) à "*science des conditions spécifiques de la diffusion des connaissances mathématiques utiles au fonctionnement des institutions humaines*" (p.52) ce qui comprend la communication des savoirs, les acquisitions spontanées et il dit plus généralement que "*la didactique des mathématiques ambitionne de décrire les échanges et transformations de savoirs à différentes échelles, aussi bien l'échelle des relations interculturelles du monde que celle d'une classe ou d'une leçon particulière.*" (p. 52) De son côté, Yves Chevillard considère dans sa communication à ce même colloque que la didactique des mathématiques doit désormais dépasser l'horizon de la classe, sortir du "terroir" pour investir le territoire de la didactique des mathématiques et que ceci suppose une évolution qui la restructure en secteurs différenciés. Jean Brun examine l'évolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques et conclut sur 3 niveaux où le cognitif fait nécessairement partie de l'analyse didactique des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage : la filiation et les ruptures des connaissances au sein des champs conceptuels ; les conversions réciproques entre savoirs constitués et connaissances spontanées au travers de situations qui représentent différentes pratiques et différentes fonctions des savoirs ; l'organisation et les réorganisations personnelles des savoirs dans la durée. De son côté, Paolo Boero soulève la question des rapports de la didactique avec la psychologie des apprentissages et la sociologie de l'éducation. Quelle complémentarité ? Jusqu'à quel point peut-on emprunter et intégrer des éléments théoriques non homogènes issus de cadres théoriques différents ?

2) *Le développement des cadres théoriques*

Les progrès dans le développement des cadres théoriques et la nécessité de poursuivre les efforts dans cette direction sont soulignés par tous les conférenciers. Le point de vue institutionnel qui a émergé au cours des années 1980 avec le concept de transposition didactique commence, avec le concept de rapport au savoir, rapport institutionnel et rapport personnel, à proposer des outils pour une étude plus précise de ce qui se passe au niveau des professeurs et des élèves. La distinction entre

¹ Dans tout le paragraphe 1, sauf mention contraire, les numéros de pages renvoient aux Actes du colloque sur les vingt ans de didactique parus aux éditions de La pensée Sauvage en 1994.

connaissances et savoirs², travaillée dans ses rapports avec la théorie des situations mais aussi avec l'épistémologie génétique et la théorie des champs conceptuels comme le montrent les questions relevées par Jean Brun, traduit d'une certaine manière la prise en compte du point de vue institutionnel et des contraintes qu'il a identifiées, y compris par des chercheurs se rattachant principalement à d'autres cadres théoriques. Elle sera utilisée pour préciser l'action de l'enseignant dans l'institutionnalisation (transformation de connaissances en savoirs) et lors de la dévolution ou d'aide en cours de résolution (transformation de savoirs en connaissances).

En pointant les perspectives pour la didactique des mathématiques, Guy Brousseau souligne la nécessité d'une *meilleure articulation des concepts théoriques*, ce qui devrait *"en assurer la cohérence et permettre à la communauté d'exercer la vigilance nécessaire (...) s'accompagner d'un dégraissage et ainsi favoriser la communication et le positionnement de ces concepts par rapport à des résultats de domaines voisins"* (p. 62-63). En particulier, les termes théoriques devraient pouvoir être repris mais c'est difficile *"s'ils diffusent prématurément dans des institutions qui projettent sur eux un sens différent"* (p. 62). Cette articulation est pour lui nécessaire non seulement pour la communication entre chercheurs mais aussi pour celle entre chercheurs et formateurs non chercheurs et entre chercheurs et enseignants. *"Une articulation plus serrée des connaissances de didactique devrait permettre le contrôle de leur diffusion à plusieurs niveaux. D'autant plus que les formations en didactique, assurées par des enseignants non chercheurs en didactique, risquent de se développer."* (p. 63). Mais il souligne aussi la nécessité de l'amélioration des rapports avec l'objet d'étude et en particulier la nécessité de continuer à faire des observations de longue durée : *"L'observation régulière d'enseignements, sans lien immédiat ni avec la recherche en cours, ni bien sûr avec une activité professionnelle d'enseignement de la part de l'observateur, est encore indispensable à la constitution d'une sorte de botanique des espèces didactiques"* (p. 64).

Gérard Vergnaud de son côté met l'accent sur la nécessité de capitaliser, de prendre en compte et d'intégrer les acquis antérieurs, notamment ceux de Piaget et Vygotski.

3) Les enjeux de la didactique pour l'enseignement des contenus mathématiques

Sur le plan des contenus, Guy Brousseau donne comme un des enjeux principaux de la didactique, ce qu'il appelle le défi de la scolarité obligatoire. Il note que l'enseignement actuel a hérité d'une culture primaire enseignable sur 5 ans à 60 à 70% de la population et d'une culture secondaire enseignable à 20% de la population sur 12 ans et se trouve incapable de concilier ces deux cultures en un enseignement obligatoire de 10 ans. La tentative des années 70 a échoué, il faut analyser cet échec et avancer des projets réaménagés. Il considère que cela ne peut se faire que par un travail transpositif sur les mathématiques elles-mêmes utilisant des connaissances de didactique. Il pointe notamment le cas des statistiques, relevé aussi par Rouchier qui y ajoute les débuts de l'analyse.

Dans sa conférence au colloque de Douai en 1995, Samuel Johsua nous dit, de son point de vue, où en est la didactique des mathématiques et des sciences. Il considère qu'elle "a déjà fait la preuve d'une belle productivité" mais que, jusque là, elle a eu tendance à se focaliser sur ce qu'il appelle "les moments héroïques" (Comment

² La connaissance est ce qui permet de prendre des décisions dans l'action. Le savoir peut se formuler, se dire. En général on parlera de savoir comme savoir reconnu dans une institution. Comme distingue en fait le savoir institué du savoir de l'individu qui est une connaissance reconnue par lui comme utile.

introduire une notion ? Comment changer les conceptions ?) et que l'enjeu est maintenant de s'attaquer aux moments plus ordinaires. *"En classe, cela correspond à tous les exercices répétitifs que l'on doit faire pour apprivoiser le nouveau territoire, c'est revisiter conceptuellement ce qu'on croit avoir appris et que finalement on n'a pas très bien compris. Cette façon de voir conduit à une didactique qui est moins héroïque, mais qui est peut-être finalement plus ambitieuse, et qui se donne pour tâche d'étudier l'ensemble des phénomènes d'enseignement, même ce qui apparaît le plus banal et répétitif".*

4) *L'étude de l'enseignant, les rapports avec les enseignants et la formation des enseignants*

Au moment du colloque des vingt ans de didactique, les études concernant les enseignants et la formation des enseignants sont encore peu nombreuses. Dans le contexte de la création des IUFM, la nécessité de leur développement est soulignée par beaucoup des conférenciers qui pointent aussi des questions théoriques reliées. Ainsi Gérard Vergnaud d'une part souligne l'émergence de la didactique professionnelle et l'importance de la notion de compétence, plus large que celle de connaissance pour penser cette question, d'autre part, il examine le rôle de l'enseignant à la lumière d'une analyse de l'activité des élèves et de la conceptualisation, à l'aide des concepts de schèmes et de champ conceptuel.

Guy Brousseau place parmi les enjeux celui de la formation des professeurs et souligne la difficulté de leur enseigner la didactique elle-même parce que *"la connaissance approfondie des conditions d'existence et de diffusion d'une connaissance paraît toujours plus complexe que la connaissance elle-même, ne serait-ce que parce qu'elle l'implique"*. Il considère que, pour les professeurs, les deux traitements doivent être confondus en un cours de mathématiques didactiques. En même temps il remarque que *"plus la formation se préoccupera concrètement de comprendre, décrire et préparer l'activité réelle des élèves, et des professeurs, (...) plus la didactique sera indispensable. Sauf évidemment si l'on postule que la pratique de l'enseignement rend inutile toute formation à ce sujet."* (p. 56-57). Il souligne aussi les contraintes externes, venant du système d'enseignement et de la société, dans lesquelles la didactique situe ses perspectives, notamment les attentes démesurées et les critiques excessives dont elle est l'objet : si ses résultats contredisent les connaissances pratiques ou de bon sens, ils sont alors rejetés ou ignorés ; s'ils vont dans le même sens, ils apparaissent comme évidents et inutiles. De même les ingénieries restent locales et leurs conditions de variabilité difficiles à communiquer parce qu'en trop grande rupture avec le fonctionnement actuel du système d'enseignement. *"Dans ces conditions la didactique ne peut que décevoir car non seulement elle ne peut pas changer rapidement l'enseignement mais, en montrant les limites auxquelles on doit se résigner dans l'état actuel des connaissances, des techniques, des conditions culturelles, matérielles et économiques, elle risque de passer pour décourager à l'avance les tentatives concevables."* (p. 60)

A la même époque, au colloque COPIRELEM d'Aussois, en 1993, Philippe Perrenoud s'interroge sur l'apport de la recherche en éducation au sens large (y compris les didactiques) à la conception de la formation initiale des enseignants (en fait, il pense surtout aux enseignants du premier degré). Il distingue trois types d'apports : d'abord la construction des objectifs, du curriculum de formation des maîtres, l'aide à la transposition didactique de pratiques professionnelles, celles qui existent mais aussi certaines qu'on peut anticiper ; le chercheur peut en particulier formuler des aspects des pratiques effectives que les praticiens eux-mêmes ne disent pas volontiers. Le deuxième

domaine est la conception de dispositifs et de démarches de formation, en particulier penser l'étayage mais aussi le désétayage ; enfin, les méthodes de formation, notamment en intégrant la recherche comme une des modalités de travail avec les futurs enseignants que l'on forme. Ce dernier point est mis en relief par le fait que Philippe Perrenoud souligne que, contrairement à ce qui se passe pour les domaines technologiques où on peut bénéficier des apports de la recherche sans rien en connaître parce que ces apports sont incorporés dans des produits, pour les sciences humaines, même s'il n'est pas nécessaire d'être chercheur soi-même, il faut au moins entrer dans le débat pour pouvoir utiliser les recherches. Brossant un programme de recherche pour vingt ans, il propose de croiser les trois types d'apports précédents avec cinq grands domaines de la formation des enseignants : le métier d'enseignant, le fonctionnement des établissements et des systèmes éducatifs ; la scolarisation de pratiques ou de savoirs ayant cours hors de l'école, le curriculum formel, la culture scolaire ; les pratiques pédagogiques, la relation, le groupe, la gestion de classe, la différenciation ; les processus de développement et d'apprentissage, la construction des connaissances et compétences ; les interactions didactiques, le curriculum réel, le travail scolaire. On peut discuter ce découpage qui relève des sciences de l'éducation et non de la didactique. En particulier, de mon point de vue, il y manque toutes les interrogations sur le savoir à enseigner qui se trouvent réduites derrière la scolarisation de savoirs ou de pratiques ayant lieu hors de l'école et l'appellation "curriculum formel". Cependant, on peut aussi s'interroger sur la conversion en didactique des mathématiques de chacune des rubriques qu'il mentionne.

2- Les travaux français et publications entre 1993 et 2002

1) *Les communications au colloque des vingt ans de didactique*

Au colloque pour les 20 ans de la didactique, en 1993, on relève 28 communications. Parmi celles-ci, 6 ont un contenu essentiellement théorique, 8 concernent directement le premier degré, 1 l'enseignement spécialisé, deux la classe de 6^{ème}. Les 11 autres concernent plutôt le second degré ou l'enseignement supérieur. Il est frappant de noter que, sur les 11 communications concernant le primaire ou la sixième, 6 se placent dans un cadre théorique référant à Piaget : schèmes et théorie des champs conceptuels, tous dans le domaine numérique, 4 à la théorie des situations didactiques associée éventuellement à un autre cadre théorique. La onzième est une étude empirique plutôt centrée sur les pratiques des enseignants de 6^{ème} en géométrie. La théorie anthropologique est encore peu présente, et seulement sur le second degré ou le supérieur. A ce niveau, en revanche, une seule recherche se réfère à la théorie des champs conceptuels mais on y trouve des études mathématiques et épistémologiques, absentes en tant que telles dans le premier degré. Au niveau du contenu, 7 portent sur l'apprentissage de connaissances numériques, 2 sur la géométrie, 1 sur le raisonnement, 1 sur la formation des enseignants ; notons cependant que l'une des deux portant sur la géométrie porte aussi sur les choix des enseignants de sixième et leurs effets sur l'apprentissage des élèves.

2) *Les thèses soutenues*

Sur le site de l'ARDM³, j'ai relevé vingt-quatre thèses soutenues entre 1993 et 2001 (voir liste en annexe) et s'intéressant à l'enseignement primaire dont trois soutenues en

³ www.ardm.asso.fr

Espagne ou au Mexique. J'en ai ajouté trois autres que je connaissais, celles de Gérard Sensevy (1994), de Jeanne Bolon (1996) et Christiane Rolet (1996). Onze d'entre elles portent sur l'enseignement et l'apprentissage de concepts numériques, dont une sur l'enseignement spécialisé et deux sur les pratiques des enseignants ou la formation des enseignants à propos des décimaux ; deux portent sur la mesure, en relation avec les nombres ; six sur la géométrie, dont l'une sur l'enseignement spécialisé et deux sur la formation des enseignants ; trois sur d'autres sujets comme le raisonnement ou le travail à l'extérieur de l'école. Sur l'étude des pratiques des enseignants et la formation des enseignants, on trouve six thèses plus générales en plus des quatre déjà mentionnées portant sur un domaine particulier (décimaux ou géométrie). Les cadres théoriques principaux (pour ceux que j'ai pu identifier) sont le plus souvent la théorie des situations (14 fois), la théorie des champs conceptuels (4 fois), l'ergonomie cognitive (3 fois) en plus de cadres théoriques construits spécifiquement pour des études empiriques. La théorie anthropologique intervient de façon significative dans deux de ces thèses : en même temps que la théorie des situations dans celle de Robert Neyret sur l'enseignement des nombres dans la formation initiale des enseignants du primaire. La thèse de Gérard Sensevy s'appuie sur les travaux de Chevallard et sur la théorie des situations mais aussi sur des références sociologiques plus larges concernant les institutions.

3) *Les articles parus dans Recherches en didactique des mathématiques*

Sur les 17 articles relevés (voir tableau récapitulatif en annexe) dont le contexte est l'enseignement primaire, 8 articles ont, parmi leurs objectifs, un objectif théorique ; pour 6 d'entre eux, c'est en fait l'objectif principal. Au niveau des contenus mathématiques, 10 portent sur le domaine numérique, 3 sur la géométrie, tous au niveau du cycle 3, 2 sur la maternelle. Sept d'entre eux s'intéressent explicitement à l'enseignant : 4 portent principalement sur l'enseignant ou la formation des enseignants, 3 autres abordent explicitement la question de l'étude du rôle de l'enseignant. On a donc toujours peu de géométrie mais on peut constater le développement de l'étude du rôle de l'enseignant et de l'étude de classes ordinaires.

On peut aussi noter des évolutions sur le plan des cadres théoriques mobilisés :

- une diminution des études purement cognitives (deux)
- l'entrée de la théorie anthropologique, souvent en liaison avec la théorie des situations, dans l'étude du primaire et même du travail en classe primaire avec les travaux de Sensevy, Mercier, Leutenegger, et tout récemment Garcion-Vautour. Cette dernière recherche examine comment une enseignante de maternelle peut utiliser les rituels de début de journée pour constituer un milieu et un contrat didactique pour l'apprentissage ; elle étudie plus spécifiquement les phénomènes temporels et l'évolution de l'action de l'enseignant et des actions attendues des élèves avec des passages dans les deux sens du didactique à l'adidactique : par exemple, le milieu sert d'abord au maître pour guider les élèves puis ceux-ci doivent anticiper le guidage et enfin agir seuls. Le milieu n'est donc pas forcément antagoniste.
- l'affinement des cadres théoriques, l'articulation de cadres théoriques, notamment la théorie des situations et la théorie anthropologique pour l'étude de classes ordinaires, mais aussi l'apparition de l'ergonomie cognitive pour l'étude de l'enseignant comme effectuant un travail.

4) *Les communications aux colloques de la COPIRELEM*

Depuis 1994, une place est laissée à des communications aux colloques de la COPIRELEM. On peut en trouver un classement en annexe. J'ai volontairement écarté

les ateliers, même si certains ressemblaient à des communications et étaient appuyés sur des recherches. Les tendances ne sont pas tout à fait les mêmes. On a ici depuis 1996 (sauf en 1998) une domination des articles concernant la formation des maîtres du primaire, ce qui est normal dans le contexte, et un meilleur équilibre entre numérique et géométrique. Quant aux cadres théoriques, ils sont plus variés mais souvent aussi moins explicites.

3- Conclusion : Evolution des problématiques et des cadres théoriques

Bien que mon étude soit assez restreinte, il me semble qu'on voit se dessiner une évolution assez nette des problématiques dans le sens annoncé en 1993. Dans la période précédente, on était passé d'études de laboratoires sur l'apprentissage des élèves à des études prenant en compte la complexité de la classe en même temps que l'interrogation du savoir lui-même dans le double mouvement de transposition ou de conversion entre savoirs et connaissances. On assiste au cours des dix dernières années à un passage d'une problématique d'ingénierie didactique visant à étudier des situations didactiques à l'étude du fonctionnement de classes ordinaires aussi bien du point de vue des élèves que du point de vue des enseignants. Ma thèse soutenue en février 92, qui était une des premières à s'intéresser à l'enseignement dans des classes ordinaires et même plutôt faibles, se plaçait dans la perspective de transfert d'ingénieries didactiques déjà expérimentées. Depuis, on a beaucoup plus cherché à étudier les pratiques ordinaires de professeurs sans intervention du chercheur (ou le moins possible) dans la conception de l'enseignement ou le déroulement de la classe. En même temps se développent aussi les études touchant à la formation des enseignants, soit sur les conceptions des futurs professeurs, soit sur ce qui se fait dans la formation, soit sur l'effet de formations. Mais ces effets sont cherchés du côté de la pratique observable des enseignants et non de l'apprentissage des élèves. Sur les contenus eux-mêmes, les études sont moins nombreuses en ce qui concerne le primaire mais les ingénieries didactiques expérimentales sont analysées en envisageant les conditions d'utilisation dans des classes ordinaires ou les contraintes de fonctionnement du maître (Comin, 2001, Gobert, 2001).

Cette évolution des problématiques va de pair avec un affinement des cadres théoriques. Dans l'observation des classes ordinaires, il est difficile de reconnaître des situations adidactiques. Différentes précisions sont apportées aux cadres théoriques pour mieux rendre compte de l'enseignement ordinaire. Par exemple, le modèle de structuration du milieu (Brousseau, 1990) prévoit plusieurs positions de l'enseignant rendant compte de son action en classe et de sa préparation du cours. Margolinas (1993) a étendu ce modèle pour prendre en compte d'autres positions de l'enseignant pouvant avoir un effet sur l'action en classe, une position "infradidactique" d'observateur de l'action des élèves et des positions "surdidactiques" de l'enseignant concevant un projet d'enseignement. Elle cherche aussi à identifier le milieu pour l'enseignant, utilisant ainsi le modèle pour identifier les possibilités d'apprentissage de l'enseignant en situation professionnelle. Bloch (1999) poursuit cette caractérisation du milieu du point de vue de l'enseignant. Dilma Fregona (1995, p. 96) distingue le milieu allié, caractéristique de l'ostension, qui contient déjà le savoir qu'on veut enseigner et le milieu antagoniste qui apporte des rétroactions aux actions du sujet de manière à provoquer une adaptation de ses connaissances. Le modèle du milieu est aussi utilisé dans l'analyse a priori de situations de classes ordinaires pour déterminer quelle part de la situation peut fonctionner de manière adidactique et quelles sont les interventions nécessaires de l'enseignant pour pallier les insuffisances éventuelles du milieu compte

tenu des connaissances supposées des élèves (voir mes propres travaux Perrin-Glorian, 1999, et la thèse de Magali Hersant, 2001). Par ailleurs, Brousseau (1996) a élaboré une caractérisation des contrats didactiques à l'école d'été 1995, reprise et poursuivie par d'autres auteurs (Comiti et Grenier, 1997, Perrin-Glorian et Hersant, 2003). Cette catégorisation rend son usage plus fonctionnel.

De son côté, le cadre théorique défini par Yves Chevallard à partir du concept de transposition didactique s'est étoffé pour prendre le nom de théorie anthropologique du didactique en apportant des outils d'analyse plus précis du travail des élèves et du professeur à travers *l'analyse praxéologique* (Chevallard, 1997, 1999) qui propose d'identifier des types de tâches, des techniques pour les réaliser, des technologies pour justifier ces techniques et des théories qui permettent de structurer et fonder ces technologies. L'identification de différents *moments de l'étude*, qui reprend d'un point de vue institutionnel des distinctions faites d'un point de vue épistémologique et cognitif par Douady (1987) dans les différentes phases de la dialectique outil objet pour caractériser différentes actions du maître permettant la progression du savoir de la classe, permet de préciser les tâches par rapport à l'avancée du temps didactique. Ce cadre donne ainsi des instruments pour décrire l'activité mathématique du professeur, facilement utilisables dans les classes ordinaires.

L'articulation entre la théorie des situations et la théorie anthropologique progresse beaucoup au cours de cette période, en particulier grâce aux travaux de Mercier et Sensevy. Mercier (1998) regarde notamment ce qui se passe pour un élève particulier dans ce qu'il appelle la *biographie didactique* d'un élève et pointe des moments où un apprentissage se produit, éventuellement même à l'insu du professeur, dans ce qu'il appelle un épisode didactique. Dans son approche la dimension temporelle est essentielle pour distinguer par exemple le temps de l'élève du temps didactique, ce qui est aussi le cas dans les travaux de Sensevy (1996). Ces deux auteurs s'attachent justement aux moments moins héroïques de l'enseignement et de l'apprentissage, comme le souhaitait Johsua.

Une autre avancée est la *prise en compte de la dimension sémiotique* à partir des travaux de Duval d'une part, de Chevallard et Bosch de l'autre. Les travaux de Duval (1995) s'articulent plus difficilement avec les cadres théoriques de la didactique des mathématiques parce qu'ils se placent d'un point de vue linguistique et cognitif indépendamment du contenu mathématique lui-même, mais ils ont beaucoup contribué à attirer l'attention sur la non transparence des représentations et sur les difficultés cognitives liées à leur utilisation. Dans la perspective de Bosch et Chevallard (1999) au contraire les outils sémiotiques utilisés sont incorporés dans des pratiques et s'analysent avec elles.

En plus du développement des cadres théoriques "classiques" de la didactique des mathématiques, il faut noter le recours de plusieurs équipes de chercheurs aux concepts de l'ergonomie cognitive pour aborder l'étude des pratiques des enseignants comme l'expression d'un travail dans un environnement dynamique ouvert (Rogalski, 1999) et ainsi joindre à une analyse didactique du travail de l'élève et de son organisation par l'enseignant, une analyse du travail de l'enseignant en tant qu'exerçant un métier. Ce travail donne lieu à des activités dont il faut dégager certaines logiques ou lignes d'action (Robert, 2001) pour rendre compte de la manière dont l'enseignant investit ses marges de manœuvre à l'intérieur d'un système de contraintes externes ou internes dans l'espoir de dégager les régularités pour un même enseignant et entre enseignants différents. Cette approche fait l'hypothèse que les pratiques d'un enseignant non débutant forment un système complexe, cohérent, stable où l'expérience est renforcée par ces caractéristiques qu'elle contribue en même temps à renforcer. Cette approche se

réfère aussi aux travaux de Clot qui distingue le genre, caractéristique de la profession, et le style de l'enseignement, qui réfère plutôt à l'individu.

Enfin, je voudrais remarquer que la communication s'est amorcée entre les travaux de didactique des mathématiques et certains travaux de sciences de l'éducation par des références réciproques. Il faut noter ici le rôle des équipes comme celle de Claudine Blanchard-Laville qui ont travaillé dans les dix dernières années à l'analyse d'un même corpus avec des cadres théoriques différents dans ce qu'elle appelle une approche co-disciplinaire (Blanchard-Laville, 1996, CREF, 2001) ou plus récemment, la mise en place de réseaux comme OPEN sur l'observation des pratiques enseignantes.

Cependant, au cours de ce travail de synthèse, une remarque s'est imposée à moi : il semble que les travaux s'intéressant aux élèves du primaire, notamment les thèses, se fassent plus rares, sauf en sciences de l'éducation. Les travaux étiquetés "didactique" sont davantage tournés vers l'étude du maître ou de la formation des maîtres. Cela s'explique peut-être en partie par des raisons institutionnelles : d'une part plusieurs directeurs de thèse potentiels sont maintenant sur des postes et dans des formations doctorales de sciences de l'éducation, d'autre part la plupart des didacticiens sont maintenant en poste dans les IUFM et eux-mêmes engagés dans la formation des maîtres.

Nous reviendrons sur des développements plus spécifiques des cadres théoriques dans les deux exemples choisis.

II. L'EXEMPLE DE LA GÉOMÉTRIE

La question qui m'a guidée dans ce paragraphe est "que nous apprennent les recherches sur l'enseignement de la géométrie ?". Evidemment, sur ce point aussi, ma réponse n'est qu'une synthèse personnelle de travaux essentiellement français et qui, même dans ce cadre restreint, ne prétend absolument pas à l'exhaustivité.

J'identifierai d'abord quelques questions qui me semblent se poser d'un point de vue didactique concernant l'enseignement de la géométrie à l'école primaire avant de passer en revue les principaux cadres théoriques utilisés en France pour les étudier, de donner des résultats de recherche en développant un peu plus l'exemple d'une recherche en cours à laquelle je participe.

1- Des questions de recherche sur l'enseignement de la géométrie

1) *Quels contenus ? Qu'appelle-t-on géométrie à l'école élémentaire ? Quels objectifs à son enseignement ?*

En premier lieu, il me semble qu'il n'y a pas vraiment de consensus concernant l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire. On s'accorde en général sur la nécessité d'apprendre à reconnaître quelques formes de l'espace et du plan et à connaître leurs propriétés, donc d'acquérir un certain vocabulaire, de savoir manipuler quelques instruments de tracé ou d'approcher la mesure des longueurs et des aires. Mais au-delà des objectifs culturels, y a-t-il un autre intérêt à enseigner la géométrie à l'école primaire ? Et d'abord qu'appelle-t-on géométrie ? Dans l'enseignement secondaire, la géométrie est le lieu privilégié de l'apprentissage du raisonnement et de la démonstration. Ces raisonnements concernent alors des objets théoriques idéaux définis par leurs propriétés. Fait-on vraiment de la géométrie à l'école primaire ou travaille-t-on sur des formes, des

objets matériels, des dessins, la formation des concepts géométriques ne se faisant que plus tard ?

Je pense pour ma part qu'il faut dire que l'on fait de la géométrie dès qu'on raisonne sur des dessins qui pourraient être tracés avec des instruments, c'est-à-dire qui présentent des propriétés telles qu'elles donnent accès à la déduction, que l'on traite par le raisonnement des problèmes liés à l'espace, à des objets de l'espace, à des positions ou changement de position dans l'espace. Comme tout enseignement de mathématiques, l'enseignement de la géométrie à l'école primaire devrait poursuivre deux objectifs : la formation de base de tous pour la vie quotidienne et les autres disciplines, la poursuite de la formation en mathématiques et, pour ce qui nous occupe, la préparation à l'enseignement de la géométrie au collège. Berthelot et Salin (1992) disent que les mathématiciens considèrent la géométrie (euclidienne) comme la théorie de l'espace et que les programmes sont conçus comme si l'enseignement de la géométrie devait suffire à assurer les besoins en termes de connaissances spatiales des futurs adultes que sont les élèves. Ils doutent que ça soit le cas et constatent au contraire de grandes déficiences dans les connaissances spatiales des élèves et de beaucoup d'adultes.

Alors que vise et peut viser l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire ? La commission Kahane, après avoir souligné l'importance de l'enseignement de la géométrie pour développer la vision dans l'espace, l'apprentissage du raisonnement, l'éducation esthétique, pour traiter des problèmes de la vie courante, pour la formation des ingénieurs, des techniciens, des scientifiques et des mathématiciens eux-mêmes, prend position à ce sujet (bulletin APMEP n° 430, p. 588) : *"une connaissance familière de l'espace, avec une double fonction : permettre à chacun de maîtriser son environnement et servir de point d'appui pour l'apprentissage de la géométrie (...) repérage, déplacement, mesure mais aussi reconnaissance, représentation et construction d'objets géométriques"*. Le rapport précise ensuite qu'il est important que l'étude des relations spatiales d'un sujet avec son environnement *"reprenne sa place dans l'enseignement, en particulier en primaire, l'objectif étant d'acquérir une certaine familiarité avec les objets du plan et de l'espace avant même de parler de figures de géométrie"* ; qu'il ne faut pas *"sous-estimer cette phase, essentielle dans le développement de l'enfant comme dans l'histoire de l'humanité, dans laquelle les concepts géométriques les plus simples (point, droite, plan, courbe, etc.) peuvent prendre du sens"*. Des thèmes pour cette étude des relations spatiales sont donnés page 574. Le rapport souligne aussi l'importance du travail sur les figures: *"Outre cet aspect d'apprentissage de l'espace, et dans la perspective d'une utilisation plus importante de la figure à tous les niveaux, l'enseignement élémentaire peut aussi être le lieu d'un premier travail spécifique sur le thème "voir sur la figure". On entend essentiellement par ces mots des questions d'analyse et de reproduction de figures (planes). Le type de tâches visé pourrait consister, par exemple, à repérer sur un dessin des intersections et des alignements, à être capable de prolonger ou de déplacer certains éléments, à repérer des éléments non dessinés qui peuvent être utiles pour la construction, à décomposer la figure en sous-figures plus simples etc. Un tel apprentissage, qui n'existe nulle part en tant que tel, serait sans doute très utile pour la pratique de la géométrie au collège."*

2) *Quelles difficultés d'apprentissage ?*

Beaucoup de chercheurs se sont intéressés d'une part à la construction des connaissances spatiales chez les enfants, d'autre part aux difficultés d'apprentissage de la géométrie, notamment aux difficiles relations entre les aspects théoriques et les aspects matériels ou visuels des objets géométriques. Je ne développe pas ce point pour

le moment. Nous y reviendrons lors de l'examen des cadres théoriques et des résultats des recherches.

3) *Quelles situations d'apprentissage ?*

Cette question fait référence aussi à un certain nombre de travaux sur lesquels nous reviendrons. Les situations sont évidemment construites en référence aux objectifs explicites et aux cadres théoriques utilisés. Il est hors de question de dresser une liste des résultats dans ce domaine mais nous en prendrons quelques exemples.

4) *Quelle formation des enseignants ?*

C'est une question largement ouverte. Peu de travaux concernent la formation des enseignants en géométrie. On peut citer le travail de D. Vergnes (2001) concernant les effets d'un stage de formation continue en géométrie mais qui interroge peu la formation elle-même. C. Houdement et A. Kuzniak (2000) travaillent aussi sur la formation des enseignants en géométrie mais leur approche est encore essentiellement théorique.

5) *Quelles sont les pratiques effectives des enseignants en géométrie ?*

Là non plus, il n'y a pratiquement pas de travaux hormis la thèse d'A. Mul. Les travaux sur les pratiques des enseignants soit ont évité de choisir un contenu précis, faisant au contraire varier les thèmes, soit ont pris un thème numérique comme la proportionnalité ou la résolution d'équations, mais ils portent plutôt sur le secondaire.

2- Cadres théoriques pour l'étude de l'enseignement de la géométrie

Les cadres théoriques pour appréhender ces problèmes sont des cadres théoriques généraux de didactique des mathématiques comme la théorie des situations ou la théorie anthropologique du didactique sur lesquels je ne reviendrai pas sauf au besoin pour des points précis et aussi des cadres théoriques plus spécifiques à la géométrie. C'est de ceux-là que je voudrais parler un peu. Je les ai classés en deux catégories : ceux qui sont en liaison forte avec la théorie des situations didactiques et ceux qui reflètent plutôt un point de vue épistémologique ou cognitif.

1) *En liaison forte avec la théorie des situations didactiques*

Un fondement essentiel de la théorie des situations est de modéliser une situation d'apprentissage d'une connaissance par une situation non didactique où un milieu, indépendant du sujet renvoie des rétroactions aux actions du sujet qui les interprète avec ses connaissances anciennes et les fait évoluer pour acquérir la connaissance nouvelle. La situation adidactique est la traduction d'une situation non didactique à l'intérieur d'une situation didactique. Elle a été construite par l'enseignant avec des intentions didactiques mais l'élève doit agir indépendamment de ces intentions didactiques.

Je rappelle rapidement le schéma classique (voir figure 1)

Dans ce modèle, un point très important concerne les modes de validation des actions et des déclarations de l'élève : quelles validations le milieu permet-il ? A quel moment le maître est-il obligé d'intervenir ?

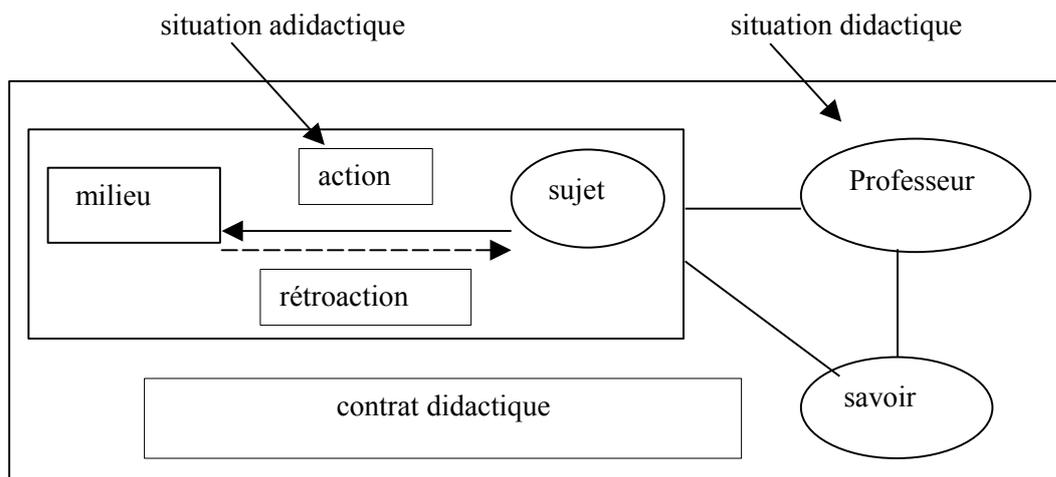


Figure 1

a) Rapports entre géométrie et maîtrise de l'espace

Une situation fondamentale est une situation (c'est-à-dire un jeu) qui modélise une connaissance ou un ensemble de connaissances en ce sens que ce sont les connaissances adaptées pour résoudre le problème posé dans la situation. La connaissance visée doit être le meilleur (voire le seul) moyen d'obtenir la stratégie optimale et la situation fondamentale doit permettre de représenter, par le choix des variables toutes les situations possibles permettant d'apprendre la connaissance visée. Brousseau a introduit la notion de situation fondamentale à propos de la géométrie dans un texte paru au séminaire de Grenoble en 1982 pour distinguer la géométrie comme modélisation de l'espace et la géométrie comme théorie axiomatique. Il propose comme situation fondamentale de la géométrie comme modélisation de l'espace celle du charpentier qui doit découper au sol des pièces de bois qu'il va assembler à 10 m (ou plus) de hauteur et comme situation fondamentale de la géométrie comme théorie axiomatique celle de l'intersection des trois médiatrices d'un triangle.

Trois problématiques

Berthelot et Salin (1992)⁴ reprennent les travaux de Brousseau et distinguent trois problématiques dans l'enseignement de la géométrie :

- *la problématique pratique* : le problème est posé dans l'espace sensible, les rapports à l'espace sont effectifs, "ils sont contrôlés de manière empirique et contingente" par les sens, la validation se fait dans l'espace sensible.

- *la problématique de modélisation ou spatio-géométrique* : le problème est posé dans l'espace sensible mais on ne peut pas le traiter directement dans cet espace : on le traduit dans un modèle géométrique où se fait la résolution ; le résultat est retraduit à son tour dans l'espace sensible et la validation se fait aussi dans l'espace sensible. Pour distinguer les deux, ils donnent l'exemple d'un vitrier qui veut remplacer une vitre en forme de parallélogramme et doit prendre les informations nécessaires pour découper la vitre dans son atelier. Une réponse dans la problématique pratique consisterait à fabriquer sur place un patron de la vitre. Une réponse dans la problématique spatio-géométrique serait de mesurer deux côtés et une diagonale du parallélogramme.

- *la problématique géométrique* : le problème, le traitement et la validation se situent dans le cadre théorique de la géométrie, selon des règles établies. Les rapports à l'espace, par exemple à la figure peuvent être effectifs mais sont régis par les définitions et les règles de fonctionnement des objets théoriques qu'elle représente.

⁴ Voir aussi Berthelot (1993), Berthelot et Salin, 1994, 1995, 1998.

L'identification de ces problématiques les amène à distinguer les connaissances spatiales des connaissances géométriques. Ils retiennent trois variables importantes pour l'analyse des situations de géométrie : le type de problématique, le type de rapport à l'espace : effectif ou intériorisé, le caractère adidactique ou non des situations.

Le rapport à l'espace

Une autre variable repérée et étudiée dans le cadre de la théorie des situations est celle de la taille de l'espace ou plutôt des conceptions de l'espace induites par un type de rapport à l'espace sensible qui est généralement lié à sa taille : ce ne sont pas les mêmes conceptions qui sont utiles suivant qu'on se place

- dans le micro-espace de la feuille de papier que l'on appréhende entièrement dans son champ de vision ou des objets que l'on peut manipuler,

- dans le méso-espace où le sujet dirige et contrôle ses propres déplacements par rapport à son environnement, sous le contrôle de sa vue (par exemple une salle de classe),

- dans le macro-espace où le sujet doit se diriger et contrôler ses déplacements hors du contrôle de la vue. Le sujet ne possède que des informations « visuelles » ou tactiles locales et doit effectuer le recollement de ces informations pour former une connaissance globale de son environnement spatial. Il s'agit bien de conceptions de l'espace ou de rapports à l'espace plutôt que de caractéristiques de l'espace lui-même parce qu'on peut reconstituer dans le micro-espace les conditions du macro-espace (voir la thèse de G. Galvez citée par Berthelot et Salin, 1992).

Ce sont des caractéristiques du milieu qui déterminent le type de rapport à l'espace.

Quelques résultats des travaux dans ce domaine

Berthelot & Salin soulignent dans leur thèse le déficit des connaissances spatiales y compris chez les adultes, en particulier dans le méso-espace, et l'absence de prise en charge de ces connaissances par l'enseignement. Ce déficit de connaissances spatiales se manifeste aussi bien dans la vie courante que dans l'enseignement de la géométrie ou d'autres disciplines.

D'autre part, ils identifient la problématique pratique comme faisant obstacle à la mise en place de la problématique géométrique, en particulier dans le micro-espace de la feuille de papier.

Ils proposent la problématique spatio-géométrique comme moyen d'entrer dans la géométrie à partir de problèmes posés dans l'espace mais avec blocage des procédures spatiales naturelles, et construisent quelques ingénieries didactiques dans ce domaine, notamment concernant les angles. Un moyen de bloquer les procédures spatiales naturelles est de travailler dans le méso-espace. Ils montrent en effet que 50% des élèves de CM2 sont incapables de prévoir la position qu'occuperont les pieds d'un banc après déplacement alors que la majorité d'entre eux sont capables de tracer un rectangle sur une feuille de papier où ils peuvent utiliser continûment le contrôle de la vue.

Sophie Gobert (2001) a prolongé les travaux de Berthelot & Salin. Elle a en particulier étudié différentes variables de la situation "terrain et tige" ainsi que les contraintes que ce type de situation apporte au rôle du maître. Pour les situations de modélisation, elle insiste sur l'importance de la crédibilité spatiale de la situation adidactique de référence dans laquelle les élèves sont dans un rapport effectif à un environnement spatial (ici dans le méso-espace) et de l'articulation de l'environnement spatial et de l'environnement graphique de la feuille de papier (micro-espace), lieu à la fois de représentation de la situation spatiale et des actions prévues pour la résolution du problème spatial. Elle observe aussi que les élèves restent dans un rapport pratique, tout

en utilisant des arguments de nature géométrique mais de manière partielle. Les interventions du maître sont nécessaires pour ramener les élèves sur le terrain de l'argumentation et du géométrique. Toute la question est de savoir à quel moment introduire dans le milieu objectif les savoirs géométriques indispensables pour certaines rétroactions.

b) l'ostension

Une caractéristique fréquente des situations d'enseignement en géométrie est l'utilisation de l'ostension. Ce point a été étudié en géométrie notamment par Dilma Fregona (1995), René Berthelot et Marie-Hélène Salin (1992) et Sophie Gobert (2001). Dans une pratique ostensive, l'enseignant présente les éléments constitutifs de la notion visée en s'appuyant sur l'observation dirigée d'exemples, l'élève est supposé capable d'étendre l'usage à d'autres situations. Une caractéristique de l'ostension est de présenter les objets dans la forme aboutie, avec les propriétés que l'on veut institutionnaliser. En particulier, Berthelot et Salin (1992) montrent que l'ostension couramment utilisée en géométrie entretient des malentendus fondamentaux entre enseignants et élèves dans l'interprétation d'une situation géométrique de type adidactique, les uns se plaçant dans une problématique géométrique tandis que les autres se placent dans une problématique pratique. Ils distinguent l'ostension assumée et l'ostension déguisée qui tend à la supplanter dans l'enseignement actuel. Dans l'ostension déguisée, au lieu de montrer à l'élève ce qui est à voir, l'enseignant le lui fait découvrir à travers des objets spatiaux soumis à son observation ou à son action. Cependant, il est obligé de manipuler le milieu matériel pour faire voir ces propriétés, l'élève est incité à décoder les intentions didactiques du maître.

Dans sa thèse, Sophie Gobert a repris ces travaux et a cherché à définir des usages de ce qu'elle a appelé l'ostension maîtrisée et la possibilité d'articuler cet usage de l'ostension à des situations à caractère adidactique dans lesquelles les savoirs introduits par ostension sont transformés en connaissances par les élèves, pour agir sur ces nouvelles situations. L'ostension est contrôlée par le maître en particulier par le choix d'un milieu qui permettra la mise en place d'une situation adidactique ultérieure. Comme dans les travaux précédents, l'ostension se caractérise par le fait que le savoir qu'on veut enseigner se trouve présent dans le milieu et que l'élève a à le reconnaître mais la différence essentielle avec les caractéristiques de l'ostension assumée relevées par Berthelot et Salin c'est qu'ici on restitue un milieu matériel avec lequel les élèves ont une interaction effective. S. Gobert distingue ainsi trois types d'ostension avec les conditions d'un contrôle par le maître de certaines variables qu'elle applique au cas des patrons de solides et à celui de la symétrie axiale : dans les deux premiers, les savoirs sont introduits dans le milieu par le maître, par une démonstration visuelle dans le premier cas, comme contrainte pour une tâche à réaliser par les élèves dans le second cas ; dans le troisième cas, les savoirs sont suggérés par le milieu qui est un milieu allié et non antagoniste mais le maître organise le milieu de façon que les propriétés qu'il veut faire formuler aux élèves soient bien visibles, et celles-là seulement. (voir sa communication dans ce même colloque)

c) Le jeu sur les instruments

Denise Grenier dans sa thèse sur la symétrie orthogonale en sixième avait déjà joué sur les instruments disponibles pour bloquer certaines procédures et en favoriser d'autres et ainsi provoquer la mise en œuvre de certaines connaissances géométriques. Henri-Claude Argaud joue aussi dans le même but sur le choix des instruments pour des tracés papier crayon mais aussi surtout à l'aide du logiciel Cabri-géomètre. Les problèmes

proposés aux élèves de CM2 sont dans le domaine spatio-graphique mais choisis de telle manière qu'une résolution efficace nécessite la mobilisation de connaissances géométriques. Ainsi, H.C. Argaud vise l'acquisition non seulement de connaissances spatio-géométriques mais aussi théoriques, notamment la prise en compte de relations de nécessité entre certaines conditions. Une de ses hypothèses est que l'environnement Cabri apporte des moyens supplémentaires par rapport à l'environnement papier-crayon pour vérifier que l'élève mobilise des connaissances géométriques et pour donner aux élèves les moyens de valider eux-mêmes leurs productions d'une part en raison de la nécessité d'utiliser un vocabulaire géométrique, d'autre part parce qu'il amplifie la perception et permet une meilleure efficacité des rétroactions du milieu, notamment grâce au déplacement et à la déformation des objets : pour être valide, une production Cabri doit résister au déplacement des objets de base. Argaud a conçu des situations adidactiques d'action autour des tâches de construction et de reproduction de figures, précisément passage d'un texte à un dessin ou à un Cabri-dessin et passage d'un dessin à un Cabri-dessin. Les résultats de l'expérimentation montrent que la validation sans intervention du maître est très difficile dans les situations papier crayon, même quand les situations ont été construites avec cette intention, alors qu'elle fonctionne le plus souvent dans les situations Cabri. Ils montrent aussi la prise en compte par les élèves de relations de nécessité dans l'environnement Cabri et peut-être même un transfert dans l'environnement papier-crayon. Les situations qu'il a construites me paraissent simples, centrées sur l'utilisation de quelques propriétés comme celle de la perpendiculaire commune, ce qui devrait contribuer à leur robustesse. Je ne sais pas si elles ont été reprises dans l'enseignement ordinaire au CM2 ou en sixième.

2) *D'autres cadres théoriques : points de vue épistémologiques et cognitifs.*

a) *"figural concept".*

Fischbein (1993) considère que les objets géométriques sont d'ordre conceptuel mais qu'ils ont intrinsèquement une nature figurale. Il introduit pour eux la notion de concept figural qui possède à la fois les propriétés d'un concept (idéalité, abstraction, généralité ...) et des propriétés spatiales (forme, position, taille...). Ils ne sont réductibles ni aux images ni aux concepts. Il est important de remarquer que le concept figural constitue la limite idéale d'un processus de fusion et d'intégration entre les facettes logique et figurale : ce sont des figures dont les propriétés sont entièrement déterminées par les définitions dans le cadre d'un système axiomatique. Mais cette fusion n'est réalisée que chez l'expert et, souvent, surtout pour les apprentis, la figure désobéit au dictat du concept et a tendance à conserver des caractéristiques de la Gestalt (liées à la perception) et à les imposer au raisonnement géométrique. Beaucoup d'erreurs d'élèves peuvent s'expliquer par un divorce (ou manque de congruence) entre l'aspect figural et l'aspect conceptuel du concept figural.

Pendant le processus d'invention, on est en général guidé par l'intuition. C'est essentiellement en ayant recours à des figures intrinsèquement contrôlées par les contraintes conceptuelles (les définitions, axiomes, théorèmes...) que le processus d'invention peut progresser de manière créative en géométrie. Mais les concepts figuraux ne se développent pas naturellement et nécessitent un apprentissage. Il faut créer des situations didactiques qui demandent une forte interaction entre les deux

aspects. Il propose dans cet article les problèmes de lieux géométriques, les situations menant à des conflits et les problèmes de patrons.

b) Différents paradigmes de la géométrie : géométrie 1 / géométrie 2.

Catherine Houdement et Alain Kuzniak s'appuient sur les travaux de Gonseth pour distinguer trois paradigmes de la géométrie qui sont chacun des synthèses dialectiques organisées autour de trois modes d'accès aux connaissances : l'intuition, l'expérience et la déduction. Ils reprennent la définition de l'intuition de Fischbein comme *"une sorte de théorie première basée sur un lot d'évidences, qui gomme les incertitudes et qui permet au sujet de structurer une situation en un tout complet, cohérent qu'il utilise comme socle pour son raisonnement"* (Houdement et Kuzniak, 2000, p.94). Elle peut être source d'erreurs comme de découvertes. Elle se différencie de la perception par cet aspect de structuration. *"L'expérience s'oppose à l'intuition dans la mesure où elle n'est pas immédiate. Une action physique ou mentale est nécessaire pour découvrir ou valider telle proposition."* *"L'expérience nourrit l'intuition et l'intuition structure l'expérience"* (Houdement et Kuzniak, 2000, p.95). La déduction permet de tirer de nouvelles connaissances, à partir d'autres déjà acquises. Pour Houdement et Kuzniak, ces trois aspects existent dans chaque niveau de géométrie.

La géométrie 1 est la géométrie naturelle qui se confond avec la réalité ; elle repose sur le sensible.

La géométrie 2 est la géométrie axiomatique naturelle : les axiomes sont tirés de l'observation du réel ou de l'action sur le réel. L'axiomatique est en général partielle, voire locale.

La géométrie 3 ou géométrie axiomatique formaliste, repose sur une axiomatique intrinsèque qui ne réfère plus au réel et qui est totale comme l'axiomatique de Hilbert ou l'axiomatique des espaces euclidiens.

Pour les questions qui nous occupent, ce dernier paradigme n'intervient pas ou très peu, les enjeux aussi bien pour les élèves que pour la formation des maîtres se situent entre la géométrie 1 et la géométrie 2. On peut à la rigueur trouver des traces d'une axiomatique d'espace euclidien en formation des maîtres dans l'utilisation des vecteurs et du produit scalaire. Parzysz (2001) reprend ces paradigmes et les situe par rapport aux niveaux de Van Hiele. Il distingue aussi la géométrie purement concrète G0 sur les objets matériels, de la géométrie spatio-graphique G1 qui s'appuie sur des situations concrètes idéalisées, des représentations.

De plus, Houdement et Kuzniak refusent de considérer que la géométrie limitée à la feuille de papier ou à l'écran d'ordinateur se situe dans le micro-espace en considérant que l'espace de la feuille de papier qui les intéresse est un espace de travail dans lequel on peut ramener tous les autres, modulo des transformations géométriques, ce qu'ils appellent l'espace normal de la géométrie élémentaire qui permet d'utiliser des réductions et agrandissements et apparaît comme une carte locale de l'espace affine total. Cette notion, explicitée dans une communication de Kuzniak (2000), est encore floue pour moi dans la mesure où il y inclut aussi les instruments. Elle serait sans doute à mettre en relation avec la notion de milieu mais ne peut s'y réduire parce qu'elle comprend, me semble-t-il, une dimension cognitive.

Houdement et Kuzniak différencient le rôle de la figure (du dessin) dans les trois paradigmes : en géométrie 1, le dessin est l'objet de l'étude et le moyen de validation ou c'est le représentant d'un objet matériel ; en géométrie 2, il est support du raisonnement, contrôlé par les définitions (voir ci-dessous le figural concept de Fischbein) ; en géométrie 3 c'est aussi un support du raisonnement mais c'est un représentant d'un objet théorique.

Si l'on essaie de situer ce cadre théorique par rapport à celui de Salin & Berthelot, il me semble qu'on peut dire deux choses :

- la problématique pratique de Salin et Berthelot se situe dans la géométrie 1 de Houdement & Kuzniak ; la problématique géométrique se situe dans la géométrie 2 ; mais la problématique spatio-géométrique est à l'articulation de ces deux paradigmes et c'est, me semble-t-il, ce qui fait son intérêt pour l'enseignement élémentaire : en jouant sur des variables didactiques, on bloque le traitement du problème dans la géométrie 1, ce qui oblige un recours à certains éléments de géométrie 2 ; en validant dans le sensible, on valide à la fois l'adéquation du modèle théorique choisi au problème posé dans le sensible et la réalisation de la solution dans le sensible. Dans l'enseignement, ces deux validations ont besoin d'être distinguées. Par exemple pour le problème du vitrier : a-t-il pris les bonnes mesures, les a-t-il bien prises ? A-t-il bien réalisé les découpes ? Certaines des questions sont des questions géométriques dans le modèle (quelles longueurs caractérisent un parallélogramme ?) ; certaines sont des questions technologiques ou d'adresse.

- Brousseau ainsi que Berthelot & Salin distinguent les trois tailles d'espace en disant que ce ne sont pas les mêmes compétences spatiales qui sont nécessaires dans chaque cas. Leur réflexion porte sur les connaissances spatiales, éventuellement dans leur relation avec les connaissances géométriques et non sur les connaissances géométriques elles-mêmes. Ce qu'ils disent surtout, c'est que, dans l'espace de la feuille de papier, on peut trouver la solution à des problèmes en ne mettant en jeu que des compétences spatiales et non des connaissances géométriques alors que les compétences spatiales font défaut dans le méso-espace et dans le macro-espace d'où l'utilisation qu'ils font de la taille de l'espace comme une variable didactique. Ils repèrent aussi que la construction de connaissances spatiales est très peu prise en compte dans l'enseignement et que l'enseignement usuel de la géométrie suppose acquises certaines compétences spatiales qui ne sont jamais enseignées mais laissées au développement naturel.

Houdement et Kuzniak ont développé leur cadre théorique dans la perspective de la formation des enseignants. Ils formulent l'hypothèse que les futurs enseignants en formation, les enseignants en exercice et les élèves de l'école primaire ne se situent pas dans le même paradigme de la géométrie, ce qui est source de malentendus. A l'appui de cette hypothèse, ils fournissent différentes analyses, notamment les réponses à un questionnaire, des analyses de manuels et de problèmes posés au concours de recrutement des professeurs des écoles. La résolution d'un même problème de géométrie peut se faire dans les différents paradigmes. La nature de la solution dépend du paradigme choisi. Celui qui est attendu n'est pas toujours indiqué et c'est la nature de la figure fournie qui induit un paradigme ou un autre suivant que les informations sont à lire sur la figure, fournies dans un texte ou codées, mais il peut y avoir ambiguïté sur les attentes comme le montre l'analyse des manuels scolaires et des textes des concours de recrutement des P.E..

La vision de la géométrie comme trois modes de connaissance identiques (intuition, expérience, déduction) mais évoluant dans le temps leur paraît importante pour la formation des enseignants, pour qu'ils soient à même de repérer les malentendus éventuels et d'y apporter une solution.

c) Distinction dessin / figure et conflit voir /savoir.

Je ne m'attarde pas sur la distinction entre dessin et figure géométrique utilisée par la plupart des chercheurs : la figure géométrique est un objet théorique défini par un texte et le dessin est un objet matériel sur une feuille de papier ou un écran d'ordinateur qui représente la figure géométrique. Laborde et Capponi (1994) précisent cette distinction à l'aide de la triade référent, signifié, signifiant : l'objet géométrique est le référent de la

représentation, le dessin le signifiant. La figure géométrique est alors l'ensemble de tous les couples formés du référent et d'un dessin parmi tous les dessins possibles qui le représentent. Le signifié de la figure géométrique est quant à lui constitué des rapports construits par le sujet entre le référent et les dessins, il correspond à ce que Fischbein appelle *figural concept*.

Dans ses travaux, portant surtout sur la géométrie dans l'espace, Bernard Parszyz souligne le conflit entre voir et savoir concernant la représentation plane des figures de l'espace. Ce conflit est aussi souligné en géométrie plane par des nombreux auteurs à propos des difficultés d'usage de la figure que rencontrent les élèves dans les démonstrations.

d) Articulation de représentations sémiotiques.

Dans ses travaux portant sur l'étude des représentations sémiotiques, Raymond Duval s'est beaucoup intéressé à la géométrie, qui suppose l'articulation de deux registres : celui du langage naturel et celui du graphique. J'en retiendrai principalement trois aspects :

Différentes appréhensions de la figure.

La géométrie élémentaire nécessite un travail sur les figures. Duval (1994) distingue quatre modes d'appréhension des figures géométriques :

* l'appréhension perceptive correspond à ce qui apparaît au premier regard (par exemple on perçoit mieux des formes fermées que des formes ouvertes) ; elle se fait en fonction des lois de la Gestalt par des traitements automatiques et inconscients.

* l'appréhension discursive correspond à une description de la figure par un texte. Le raisonnement consiste alors à produire du discours en utilisant des définitions, théorèmes ...

* l'appréhension séquentielle correspond à une construction avec des instruments, ce qui demande de mettre un ordre dans les unités figurales en fonction des propriétés mathématiques de la figure mais aussi des contraintes techniques des instruments.

* l'appréhension opératoire est l'appréhension d'une figure donnée en ses différentes modifications possibles en d'autres figures ; Duval distingue les modifications méréologiques fondées sur la relation entre un tout et ses parties (décomposition en sous figures et recombinaison), les modifications optiques (agrandissement, réduction) et les modifications positionnelles (déplacement de la figure entière).

Duval constate les difficultés persistantes, souvent soulignées par les enseignants, des élèves de l'enseignement secondaire concernant l'usage de la figure : la difficulté à se détacher des formes perçues au premier coup d'œil et qui rend inutile toute démonstration (ça se voit sur la figure) et la difficulté à discerner dans une figure des éléments possibles d'une solution, c'est-à-dire à s'en servir de manière heuristique. Il relie la résistance de ces difficultés au fait que dans l'enseignement secondaire, on travaille surtout sur l'appréhension discursive et l'appréhension séquentielle de la figure et que ces deux appréhensions s'appuient sur une structure dyadique de la représentation qui associe directement le signe au référent, alors que les autres appréhensions s'appuient sur une structure triadique de la représentation : le référent est associé à un signe lui-même composé d'un signifiant et d'un signifié. Le travail séquentiel sur une figure qui est bien travaillé dans l'enseignement n'aurait ainsi que peu d'effet sur l'appréhension opératoire de la figure, nécessaire au traitement heuristique de la figure dans la résolution de problèmes de géométrie. Pour Duval, il existe des facteurs qui jouent sur la visibilité de la modification heuristiquement pertinente de la figure et on peut travailler directement sur ces facteurs pour améliorer l'appréhension opératoire des

figures. C'est ce qui a été fait dans plusieurs thèses qu'il a dirigées (A. Mesquita, V. Padilla Sanchez, E. Lemonidis.)

Les changements de dimension

Une des difficultés d'articulation entre les différentes appréhensions d'une figure plane est qu'elle nécessite de jouer sur des changements de dimension des figures : passage d'une vision en dimension 2 (figure comme surface et assemblage de surfaces) à une vision en dimension 1 (lignes délimitant ces surfaces ou joignant des points) ou en dimension 0 (points comme intersections de lignes ou sommets de surfaces).

Articulation texte / figure

On ne peut accéder à une figure géométrique par le dessin seul puisqu'il faut spécifier les propriétés qui permettent de définir la figure ; cela se fait par un texte, éventuellement suppléé par un codage de la figure. Le traitement d'un problème de géométrie nécessite des allers et retours incessants entre texte et figure et l'articulation de ces deux types de représentations de la figure géométrique.

Les travaux de Duval portent surtout sur l'enseignement secondaire mais le travail de la perception opératoire de la figure et du changement de dimension concerne directement le primaire à tous les niveaux et la question de l'articulation du texte et de la figure se pose dès le cycle 3. Ce sont des aspects travaillés dans une recherche en cours à l'IUFM Nord-Pas-de-Calais dont je vous présenterai quelques éléments dans le paragraphe suivant.

Les travaux de Jean-Claude Rauscher et Danielle Vergnes portent aussi sur la géométrie mais je les ai plutôt situés dans la perspective générale de l'étude des pratiques enseignantes, c'est donc dans cette partie qu'ils seront abordés.

3- La problématique de reproduction de figures. Une recherche en cours

1) Remarques préliminaires

- Un des constats qui motive cette recherche est la difficulté connue des élèves de collège à se servir de manière pertinente de la figure pour traiter des problèmes de géométrie non seulement parce qu'ils se fient à ce qu'ils voient sur la figure mais surtout parce qu'ils ne voient pas des éléments qui seraient pertinents et pourraient les aider à résoudre le problème et à trouver une démonstration. Notre objectif est de travailler l'analyse de figures au niveau de l'école élémentaire parce que nous pensons que le rapport aux figures est un point clé dans le rapport des élèves à la géométrie.

- La géométrie de référence est la géométrie euclidienne même si selon le cas, c'est une sous-géométrie qui est pertinente (projective, affine).

- On veut ici distinguer géométrie et mesure souvent confondues à l'école primaire et on veut développer une géométrie sans mesure. On peut faire des reports de longueurs et des reports d'angles mais pas des mesures. Les élèves ne disposeront pas de règle graduée.

- On travaille dans le contexte de passage de figure à figure, sans intermédiaire d'un texte. Les propriétés pertinentes sont à repérer sur la figure.

2) Qu'entend-on par figure et reproduction de figures dans notre recherche ?

Il s'agit de figures planes en un sens large : aussi bien traces d'objets de l'espace que représentation d'assemblages de surfaces type puzzle ou figure comme ensemble de

lignes. On s'intéresse à des figures qui sont composées par juxtaposition ou superposition de figures simples, en donnant à figure simple le sens de figure qu'on peut obtenir par le tour d'un gabarit ou d'un pochoir. Les figures auxquelles on s'intéresse relèvent de différents modes de production : par empreintes de solides, tour de gabarit, de pochoir, tracées à main levée ou avec des instruments usuels de géométrie.

On se place sur le plan du dessin mais il s'agit d'un type de dessin particulier porteur potentiel de connaissances géométriques, dessin qui peut être interprété comme une figure de géométrie avec des propriétés géométriques. Pour les élèves c'est un dessin, pour le professeur c'est une figure. L'élève est dans le cadre de la géométrie 1 au sens de Houdement et Kuzniak ou plutôt de la géométrie spatio-graphique dont parle Parzysz. Cependant, pour construire les figures, le maître doit se placer, lui, dans la géométrie 2 pour que les propriétés graphiques qu'utilisent les élèves correspondent à des propriétés géométriques de la figure et que la figure n'ait pas des propriétés graphiques qui ne correspondent pas à des propriétés géométriques.

3) *Quels objectifs, quels savoirs, quelles connaissances ?*

Entre la maternelle et la sixième les élèves doivent passer d'une vision des figures en termes de surfaces à manipuler découper, colorier sous forme de gabarits, à une vision en termes de points et lignes qui permettent de caractériser la figure pour une construction à l'aide d'instruments qui sont eux-mêmes porteurs de connaissances géométriques. L'enjeu est d'amener les élèves, tout au long de l'école et au début du collège, à un changement de regard progressif sur les figures-dessins et sur les formes géométriques, pour les amener, au bout du compte, à concevoir les objets géométriques, et ce, en choisissant des situations qui « forcent » ce changement de regard et amènent obligatoirement à la perception de propriétés géométriques. Ce changement de regard se fait conjointement avec un début de construction d'objets géométriques théoriques et du vocabulaire pertinent.

Nous visons donc des connaissances spatiales ou plutôt graphiques mais aussi des connaissances géométriques dans le sens que les connaissances spatiales ou graphiques que nous visons nous paraissent indispensables à la mise en place de la géométrie 2. Par exemple, si l'on veut découper une étoile sans déchirer le papier, il ne faut pas suivre le contour de l'étoile mais partir des sommets des angles saillants vers ceux des angles rentrants et donc voir le sommet de l'angle rentrant comme intersection de demi-droites.

Un autre objectif est le détachement des objets géométriques des instruments qui servent à les produire comme droite et règle, cercle et compas, équerre et angle droit.

Les connaissances géométriques en jeu sont celles de direction, droite comme support de segment, comme passant par deux points, points comme intersections de lignes (droites ou cercles), repérages par longueurs, angles, milieu, perpendiculaire, cercle, symétrie, carré, dans leur action dans le domaine spatio-graphique.

4) *Des hypothèses sur l'apprentissage*

Nous faisons l'hypothèse que les enfants perçoivent d'abord les surfaces, les lignes et les points sont à construire.

Différentes conceptions de lignes et en particulier de lignes droites coexistent : la ligne comme bord de surface ou séparation entre deux régions est plus facilement perçue que la ligne joignant deux points.

De même, on a différentes conceptions de points : l'extrémité d'un segment ou le "coin" d'une surface (saillant, rentrant, plus ou moins plat...) est reconnu plus facilement que le point comme intersection de lignes

Dans une figure composée, les élèves de cycle 2 peuvent facilement identifier des sous figures simples quand la figure représente quelque chose à quoi ils peuvent donner un nom ; si c'est une figure abstraite ce n'est pas évident quand les figures simples ne sont pas coloriées.

Les enfants peuvent être capables de réaliser des tracés à main levée qu'ils ne sont pas capables de réaliser aux instruments.

Le rôle du langage pendant l'analyse et pendant le tracé, est sûrement important et à étudier mais on ne l'a pas fait.

Nous avons choisi de nous placer dans la problématique de la reproduction de figures qui nous paraît adaptée pour atteindre nos objectifs en jouant sur le choix des figures et le choix des outils, instruments usuels mais aussi outils non standardisés. Nous avons construit plusieurs milieux suivant le choix de variables qui ont un effet sur les procédures possibles et les connaissances mises en jeu.

5) Milieux pour la reproduction de figures

Le problème considéré est toujours de reproduire une figure donnée. On peut envisager différents milieux (au sens de la théorie des situations didactiques) pour différents objectifs d'apprentissage. Après examen des variables possibles, je présente rapidement les trois types de milieux que nous avons mis au point et commencé à expérimenter.

a) Les éléments constitutifs des différents milieux qu'on va considérer :

Les constantes :

- feuille de papier : toutes les situations vont être des tracés de figures sur une feuille de papier donc dans l'environnement microspatial. Cependant la problématique n'est pas forcément microspatiale parce que justement il y aura à voir des éléments qui ne se voient pas au premier coup d'œil.

- une figure modèle à reproduire toujours présente

- la figure à obtenir, le but, est disponible sur transparents pour la validation avec différentes épaisseurs de trait qui fixent un niveau de rigueur pour la reproduction.

- existence d'une trame sous-jacente à découvrir au moins partiellement pour reproduire la figure.

Les variables :

- les éléments donnés : partie de figure ou de réseau déjà disponible sur le papier

- instruments disponibles pour la reproduction :

- + classiques : règle non graduée, équerre compas

- + liés à l'objet à reproduire : gabarit, morceau de gabarit

- + non standard : morceau de carton rigide (surface sans lien avec ce qui est à reproduire et sans bord droit) pour report de longueur et pour report d'angles ; bande de papier qu'on peut plier pour chercher un milieu par exemple.

- règle du jeu pour la reproduction avec éventuellement système de points permettant de favoriser le recours à un instrument plutôt qu'à un autre.

b) Différents choix de milieux pour différentes classes de situations :

Dans chacun des trois cas étudiés, je ne reprends que les éléments variables.

1. Restauration de figures

Données : figure partiellement effacée (effacement de lignes).

Reproduction à l'identique. Exemple figure Picasso (figures 2 et 3)

Instruments : règle non graduée, éventuellement gabarits et/ou bande de papier (report de longueurs et/ou d'angles, milieux), éventuellement instrument de tracé de

Vingt ans de didactique en 1993 ! Où en est-on dix ans après ?

perpendiculaires (équerre ou papier qu'on peut plier), suivant le choix des éléments effacés

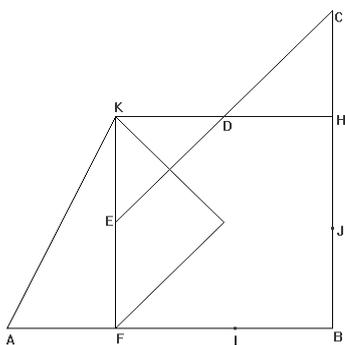


Figure 2 : Figure Picasso (modèle)

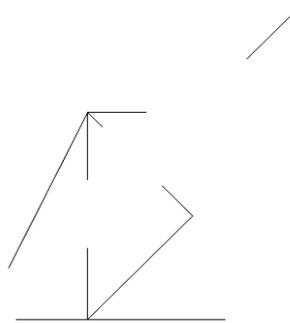


Figure 3 : Figure Picasso (donnée)

2. Reconstitution de figure à partir d'une partie

Données : une partie de la figure (certaines pièces de la figure vue comme juxtaposition de surfaces)

Reproduction à l'identique. Exemple Assemblage (figures 4 et 5).

Instruments : règle non graduée, éventuellement gabarits et/ou bande de papier (report de longueurs et/ou d'angles, milieux), éventuellement instrument de tracé de perpendiculaires (équerre ou papier qu'on peut plier), suivant le choix de la figure et des données.

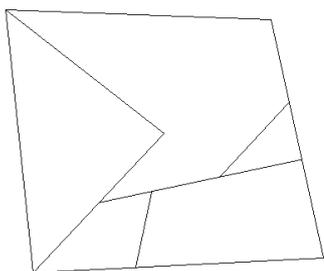


Figure 4 : Assemblage (modèle)

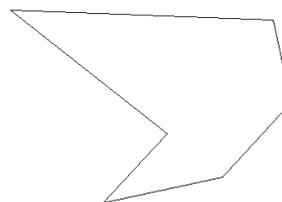


Figure 5 : Assemblage (donnée)

3. Reproduction de la forme

Reproduction à une taille différente.

Données : une partie de la figure à la taille voulue. Exemple quadrilatères emboîtés (voir figures 6, 7, 8).

Instruments : règle non graduée, éventuellement gabarits et/ou bande de papier (report d'angles, milieux), éventuellement instrument de tracé de perpendiculaires (équerre ou papier qu'on peut plier), suivant le choix de la figure et des données (inutiles dans l'exemple ci-dessous).

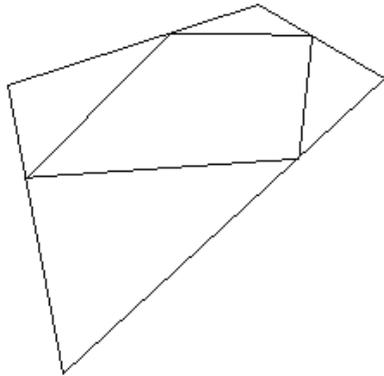


Figure 6 : Quadrilatères (modèle)

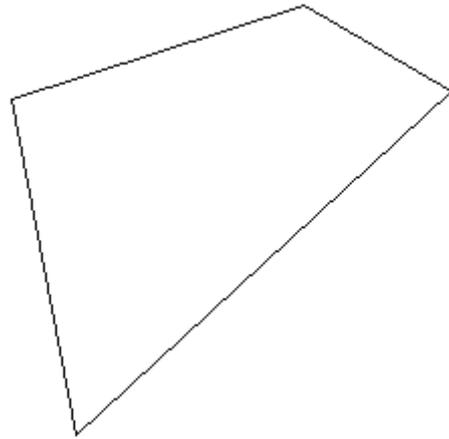


Figure 7 : Quadrilatères (donnée)

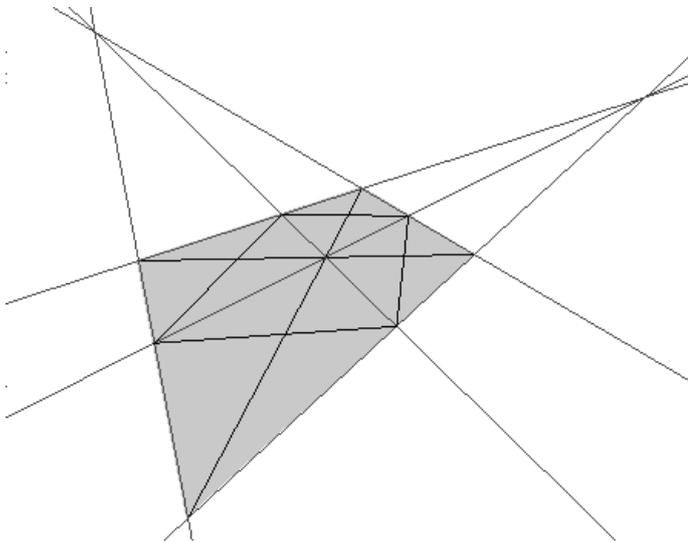


Figure 8 : constructions à réaliser pour reproduire la figure

Dans la restauration, on n'a pas à trouver des directions qui ne sont pas données dans la figure à restaurer : la droite qui porte un segment à restaurer n'a pas complètement disparu alors que c'est le cas dans la reconstitution et dans la reproduction de la forme.

Quelques résultats

Les résultats se situent à plusieurs niveaux :

- procédures observées des élèves et analyse des difficultés éventuelles. Ces résultats ont été intégrés au niveau des grilles d'analyse sur l'identification des variables didactiques. Par exemple, pour la restauration de figures, nous avons observé qu'un coin est plus difficile à restaurer qu'une intersection parce que les enfants résistent à prolonger leur tracé au-delà du point cherché pour effacer ensuite.

- identification de critères pour produire les milieux : quelles figures choisir ? Quelles données pour la reproduction, par exemple comment effacer pour la restauration, quelle partie donner pour la reconstitution ?

- possibilité d'utilisation dans l'enseignement ordinaire. Pour l'instant, dans les classes où la séance a été menée par une personne extérieure, les enseignants constatent l'intérêt qu'y prennent les élèves ; ils y prennent eux-mêmes beaucoup d'intérêt quand on leur propose ce genre d'activité dans un stage de formation continue mais peu semblent prêts à reprendre une activité de ce type dans leur

propre classe. En parallèle nous avons fait passer un questionnaire pour mieux connaître les pratiques effectives en géométrie, il n'est pas encore dépouillé. La perspective de notre recherche est de voir comment des enseignants peuvent reprendre ce type de situations. A quelles conditions ? Avec quels effets sur les connaissances des élèves en géométrie ?

III. LES ÉTUDES CONCERNANT L'ENSEIGNANT

Pour cette partie, je m'appuierai sur une note de synthèse sur les stratégies de l'enseignant en situation d'interaction, réalisée sous la direction de Pascal Bressoux dans le cadre du programme cognitique, et dans laquelle j'ai rédigé le chapitre 8 consacré à la didactique des mathématiques. Je n'ai gardé, pour l'essentiel, que ce qui concernait l'enseignement du premier degré ou le tout début du collège, notamment dans les exemples cités.

1- L'évolution des recherches au niveau international

1) Une préoccupation récente

Les études concernant l'enseignant ne se sont vraiment développées que depuis une quinzaine, voire une dizaine d'années. Je retiendrai deux facteurs principaux d'explication :

- les didacticiens des mathématiques étant pour la plupart aussi enseignants de mathématiques, ils ont tendance dans leurs premiers travaux à se placer eux-mêmes du point de vue de l'enseignant et il leur est plus difficile de prendre celui-ci comme objet d'étude ;

- la didactique des mathématiques s'est développée dans la foulée des grands mouvements de réforme qui ont secoué l'enseignement des mathématiques dans le monde entier dans les années 60 et 70, c'est plutôt le savoir et le rapport des élèves au savoir qui est alors questionné.

Romberg et Carpenter (1986) notent qu'il existe d'une part des recherches sur l'apprentissage des mathématiques qui se placent d'un point de vue cognitiviste mais dont il est difficile de tirer des informations sur la manière d'enseigner les mathématiques, notamment parce qu'elles ne prennent pas en compte les contraintes de l'enseignement en classe et d'autre part des recherches sur l'enseignement qui cherchent à associer directement des pratiques d'enseignants à des performances d'élèves mais qui s'occupent assez peu du contenu, manquent de cadre théorique relatif à l'apprentissage et surmontent difficilement les problèmes méthodologiques soulevés par ce type d'études. Ils insistent sur la nécessité de dépasser cette dichotomie et de mettre en relation les deux approches pour poser de nouvelles questions ; ils dégagent sept pistes pour les recherches futures, parmi lesquelles la prise en compte du contenu à enseigner et le développement de modèles faisant le pont entre enseignement et apprentissage. Ces deux soucis sont effectivement présents dans les recherches qui relèvent du courant de "Mathematics Education" ou de celui de didactique des mathématiques.

Depuis 1986, en revanche, au niveau international, l'enseignant est de plus en plus pris en compte dans les recherches, voire objet d'étude. Dans leur recension de travaux conduits sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques entre 1986 et 1998, Ball, Lubienski et Mewborn (2001) trouvent que près de la moitié des travaux se focalisent sur les seuls enseignants. Comme le soulignent plusieurs auteurs (par

exemple Hoyles 1992, Da Ponte, 1994, Lerman, 1997), divers facteurs ont contribué à ce que les chercheurs s'intéressent de plus près au rôle de l'enseignant dans le système didactique, notamment la volonté dans la plupart des pays de mettre en place des réformes pour étendre à tout le système d'enseignement des méthodes jugées plus efficaces d'après les résultats des recherches ; la volonté de promouvoir l'implantation des nouvelles technologies dans l'enseignement des mathématiques ; les besoins de la formation des enseignants. Hoyles (1992) repère dans les interventions à la conférence annuelle de PME deux tendances très nettes au cours des douze années précédentes : un accroissement des recherches considérant le professeur comme un facteur à part entière et crucial de l'apprentissage des élèves et une suite de changements qualitatifs sur la manière dont l'enseignant et le rôle de l'enseignant sont conceptualisés.

L'évolution des problématiques dans le monde

Dans la synthèse qu'ils font en 1992, Schatz-Koehler et Grouws distinguent différents niveaux de complexité dans les recherches sur l'enseignant. Au départ, il s'agissait plutôt de rechercher des pratiques efficaces dans une problématique de type processus produit qui cherche à évaluer directement les effets de certaines caractéristiques des professeurs sur les résultats des élèves. Plus récemment, se sont développées des recherches qui ont un fondement théorique plus solide et prennent en compte un grand nombre de facteurs (caractéristiques des professeurs et des élèves mais aussi connaissances, attitudes, croyances) pouvant agir sur les comportements en interaction des professeurs et des élèves et finalement sur les résultats mais aussi sur les attitudes des élèves à l'égard des mathématiques. Les études sont plus fines mais portent sur un nombre plus restreint de sujets ou de classes. Dans leur conclusion, Schatz-Koehler et Grouws (1992) soulignent que, malgré les points d'accord, il reste une grande latitude dans l'interprétation de ce qu'est un enseignement efficace, dans la manière de déterminer les acquisitions des élèves, même en se limitant, comme la majorité des recherches, à l'enseignement élémentaire et moyen.

Les résistances des enseignants à changer leurs méthodes ont amené les chercheurs à s'intéresser aux processus de prise de décision des enseignants et notamment à leurs conceptions des mathématiques et de l'enseignement des mathématiques, ce qu'on a communément appelé "beliefs" dans le monde anglo-saxon et "représentations" en France avec plutôt une référence aux représentations sociales. Les difficultés de transfert ont aussi amené à préciser des conditions de réussite de certains types d'enseignements innovants comme l'appui sur la résolution de problèmes ou sur l'histoire des mathématiques ou encore l'utilisation de logiciels. Les recherches sur la formation des enseignants, reposent aussi en général sur une idée implicite de ce doit être un enseignant idéal, mais les résistances rencontrées face à la volonté de faire évoluer les pratiques ont conduit à tenter de mieux connaître les pratiques effectives des enseignants. Elles ont ainsi amené les chercheurs à une prise en compte de l'existant, des contraintes du terrain et à être à l'écoute des enseignants pour comprendre les raisons des pratiques courantes. De grandes enquêtes comparatives ont cherché à décrire et à comparer les pratiques dans le système d'enseignement tel qu'il est, dans une grande variété de pays (par exemple les enquêtes SIMS et TIMSS⁵).

Les travaux sur croyances et connaissances ne prennent que rarement en compte l'effet de ces croyances sur les pratiques des enseignants en classe et encore moins sur l'apprentissage des élèves. Les travaux les plus récents dans ce domaine, contrairement

⁵ SIMS : Second International Mathematics Study ; TIMSS : Third International Mathematics and Science Study

aux premiers travaux, considèrent que les croyances ne sont pas des systèmes statiques à découvrir et que la relation entre croyances et pratiques n'est pas une simple relation linéaire causale. Thompson (1992) met l'accent sur la complexité et la nature dialectique des relations entre croyances et pratiques : les croyances agissent comme des filtres à travers lesquels les professeurs interprètent leurs expériences quand ils interagissent avec les enfants et avec la discipline et, en même temps, beaucoup de croyances semblent prendre leur origine dans l'expérience en classe ou être modelées par cette expérience.

Dans leur synthèse, Fennema et Loef Franke (1992) remarquent de même que tous les chercheurs sont persuadés de l'influence des connaissances du professeur sur son enseignement mais qu'il n'y a pas d'accord sur ce que serait un savoir critique assurant un enseignement efficace. On identifie en général au moins trois types de connaissances nécessaires au professeur : des connaissances mathématiques, des connaissances sur les élèves et des connaissances sur la pédagogie des mathématiques. Des recherches ont été menées pour étudier une composante ou plusieurs composantes du savoir du professeur et ses effets éventuels sur son enseignement. Quand on a étudié le savoir mathématique des professeurs, c'est souvent pour constater (généralement dans le cadre de la formation des maîtres) son insuffisance au niveau du primaire (qui comprend dans certains pays les premières années de notre enseignement secondaire). On peut remarquer en passant qu'il y a très peu de choses sur le savoir mathématique des professeurs du secondaire, sauf quand ils sont encore en formation initiale et n'ont pas encore le statut de professeur. Cependant aucune étude n'a montré de relation directe entre les connaissances mathématiques du professeur et l'efficacité de son enseignement. S'il semble ressortir des travaux qu'un enseignement riche du point de vue mathématique est lié à un bon niveau du professeur en mathématiques, la relation avec l'apprentissage des élèves n'est pas faite. Pour ce type de question, il est nécessaire d'étudier le savoir mathématique du professeur en relation avec les autres savoirs du professeur, par exemple concernant les situations ou les matériels qui permettent de mettre en scène le savoir, des compensations d'un domaine dans un autre pouvant se faire. Cependant, la structuration du savoir mathématique du professeur, son insertion dans un domaine de connaissance plus large ont été mises en relation avec la mise en œuvre d'un enseignement plus conceptuel.

Ball, Lubienski et Mewborn (2001) font une synthèse des travaux (surtout américains) concernant les enseignants, et plus spécialement les connaissances des enseignants. Ils notent que depuis une quarantaine d'années, il y a eu beaucoup de réformes mais que les pratiques n'évoluent pas vraiment. Ils invoquent beaucoup de facteurs culturels et institutionnels et s'intéressent à la formation des enseignants. Ils constatent le faible impact de la formation initiale : ce qui a été appris à l'université tend à être lessivé dès que les nouveaux enseignants entrent dans les classes et la formation continue, épisodique et fragmentée, reste superficielle. Aux Etats Unis, il n'y a pas d'infrastructure cohérente pour la formation professionnelle des enseignants. Une question largement ouverte est celle du savoir mathématique qu'il faut pour enseigner les mathématiques. Les premières études il y a une vingtaine d'années ont étonné en montrant qu'il n'y avait que peu de lien entre le niveau de diplôme mathématique atteint par les professeurs et les résultats des élèves, ou plutôt il y a un effet de seuil : il y a un lien positif jusqu'à un certain point, au-delà duquel le lien baisse. Le fait d'avoir suivi des cours en méthode et pédagogie mathématique semble avoir plus d'effet.

Plus récemment des études ont été faites concernant les connaissances des professeurs sur des domaines mathématiques précis ; elles se limitent souvent au primaire et montrent des insuffisances dans les connaissances des professeurs qui,

quand ils savent faire les exercices, ne peuvent pas donner d'explication se rattachant à un cadre mathématique cohérent. Quelques études sur les professeurs du secondaire (école moyenne) ont montré que les connaissances des professeurs du secondaire étaient moins robustes qu'on ne le pensait. Certains chercheurs ont attiré l'attention sur le savoir qu'on pourrait qualifier de didactique, qui lie pédagogie et contenu. Cependant les auteurs remarquent que les études sur les pratiques enseignantes laissent ouverte la question des savoirs nécessaires pour l'efficacité de l'enseignement dont le savoir mathématique des enseignants et que les études centrées sur les savoirs mathématiques des enseignants ne font pas le lien avec l'enseignement dispensé. Ces études ne suffisent pas pour définir le savoir nécessaire pour enseigner. Des travaux récents (Swafford, Jones, Thornton, 1997 et Sowder, Philipp, Armstrong et Schappelle, 1998) donnent des résultats encourageants sur l'effet positif sur les pratiques et les performances des élèves de formations assez lourdes (école d'été dans le premier cas, participation de deux ans à un projet de recherche dans l'autre) sur des thèmes mathématiques précis (géométrie dans le premier cas, rationnels et proportionnalité dans l'autre).

Ces derniers temps, se sont développés des travaux visant à étudier le travail de l'enseignant dans des classes ordinaires, dans toute sa complexité. Ces travaux, accompagnés de réflexions méthodologiques et théoriques importantes, qui cherchent par exemple à modéliser la fonction enseignante, se sont particulièrement développés en France et dans des équipes en forte relation avec les recherches françaises, mais sont présents aussi dans le monde anglo-saxon. Je vais maintenant tenter de dégager quelques lignes de force des travaux français.

2- Les recherches françaises sur l'enseignement dans les classes ordinaires

1) Les premières prises en compte de l'enseignant

Comme le remarquent Margolinas et Perrin-Glorian (1997) ainsi que Bodin et Capponi (1996), on trouve peu de recherches concernant explicitement l'enseignant avant 1990, mais elles se développent progressivement à partir de 1989 et beaucoup plus nettement depuis 1993. On peut en trouver une des raisons dans la difficulté de transmission des situations construites lors d'ingénieries didactiques, déjà en situation expérimentale et plus encore dans les classes ordinaires. Dès 1981, Brousseau avait pointé le phénomène d'obsolescence des situations. Peu après, il différencie les situations adidactiques, principalement étudiées jusque là, des situations didactiques et il précise le rôle du maître (déjà bien balisé dans Brousseau, 1981, p.99-102) dans les processus de dévolution et d'institutionnalisation. Margolinas (1992) étudie le rôle du maître dans les phases de conclusion. L'étude de la reproductibilité des situations didactiques (Artigue, 1986, 1990) et les tentatives de transmission des produits de l'ingénierie didactique dans des classes ordinaires, voire dans des classes faibles (Perrin-Glorian, 1993) mettent plus encore en évidence la nécessité de préciser les différentes dimensions du travail de l'enseignant en montrant l'imbrication des difficultés d'apprentissage des élèves, des contraintes diverses qui pèsent sur les professeurs et de leurs conduites non conformes au projet d'ingénierie. En réponse à ces difficultés, l'enseignement dans des classes ordinaires commence à être pris comme objet d'étude pour comprendre les résistances et les contraintes du système didactique, cela amène à retravailler les cadres théoriques. Certains chercheurs tentent alors de rechercher des explications du côté de l'enseignant lui-même, en important éventuellement des concepts issus d'autres disciplines, comme les représentations des enseignants sur les

mathématiques et leur enseignement (Robert et Robinet, 1992 ; Bailleul, 1995), adaptation des représentations sociales (Jodelet, 1989). D'autres prennent en compte la dimension psychanalytique dans la position d'enseignant de mathématiques. (Blanchard-Laville, 1989, 1996).

L'étude des pratiques des enseignants dans des classes ordinaires pose de sérieux problèmes sur les plans théorique et méthodologique. Les premières recherches s'intéressant aux pratiques ordinaires des enseignants travaillent sur des déclarations des enseignants ou des choix provoqués. Par exemple, Rauscher (1993) cherche à déterminer les objets d'enseignement que se donnent des professeurs de sixième en géométrie à travers leurs pratiques d'évaluation. Il leur demande de proposer un test de fin d'année pour évaluer les acquisitions de leurs élèves et mesurer leurs progrès par rapport à l'évaluation nationale de début d'année. Il constate une relation entre l'évolution des élèves et la nature des tests proposés par les professeurs. Les professeurs qui permettent une meilleure évolution des élèves sont ceux qui proposent une évaluation multidimensionnelle des compétences des élèves, prenant en compte une variation de registres et une gradation dans la complexité. Des entretiens ont montré de plus que les enseignants qui proposent un champ d'évaluation très étroit sont capables comme les autres de repérer les difficultés mais les premiers les identifient comme des objets d'apprentissage et les seconds comme des obstacles à éviter. Cependant, dans tous les cas, l'évolution favorable est rare quand les élèves les plus avancés en début d'année sont trop peu nombreux dans la classe. Bolon (1996) a aussi mené une étude indirecte des pratiques des enseignants de l'école et de sixième en regardant les raisons qui leur faisaient adopter ou rejeter un scénario d'enseignement sur les décimaux ou la manière dont il était transformé. Les recherches ultérieures vont davantage s'intéresser à des pratiques observées.

Les questions abordées

Contrairement à ce qui se passe au niveau international, les recherches sur les croyances des enseignants de mathématiques, présentes dans les recherches françaises au début des années 90 dans la recherche des représentations sur les mathématiques, la manière de les enseigner ou de les apprendre, sont pratiquement inexistantes actuellement. Depuis 1993, les différentes recherches abordent les questions par des entrées diverses liées aux cadres théoriques et aux méthodes choisis, mais on peut retrouver des préoccupations communes ou largement partagées dans les recherches, même si la formulation de la question peut faire référence à un cadre théorique plutôt qu'à un autre. Remarquons qu'il n'y a en général pas dans ces travaux de recherche des effets sur les élèves.

Déterminer des contraintes et des marges de manœuvre de l'enseignant

L'enseignant est soumis à un certain nombre de contraintes qui viennent de l'institution scolaire, de l'établissement, des nécessités de l'enseignement (évaluation...), des élèves, et de lui-même. Il lui reste cependant certaines marges de manœuvre pour s'adapter à ces contraintes. Rechercher les contraintes revient aussi à identifier des institutions auxquelles l'enseignant est assujéti et qui risquent d'avoir un effet sur la viabilité de certaines stratégies qu'il pourrait mettre en place.

Rechercher des régularités et des variabilités

Ce type de recherche suppose qu'on a identifié un certain nombre de variables qui permettraient de caractériser l'action de l'enseignant en classe et un certain nombre de contraintes qui pourraient avoir un effet sur ces variables. Les régularités peuvent être recherchées chez un même enseignant d'une séance à l'autre, sur un même contenu, sur

des contenus différents, ce qui permet d'identifier certains niveaux de routines. Les régularités entre enseignants différents correspondraient à des caractéristiques de la fonction enseignante. Elles peuvent se chercher à différents niveaux et être liées à un contexte donné (niveau, environnement scolaire, contenu ...). On peut par exemple trouver des régularités dans une école de ZEP qui ne se retrouvent pas dans une école de centre ville. Les variabilités correspondraient à la part personnelle de l'enseignant, l'investissement de ses marges de manœuvre.

Rechercher des caractéristiques de la position d'enseignant dans une institution didactique

Il s'agit ici de déterminer des caractéristiques générales de la fonction de l'enseignant dans la transmission des savoirs, en tenant compte éventuellement du type d'établissement et du niveau scolaire donné et du contenu précis enseigné. On cherche par exemple comment peuvent se constituer des routines et quelles sont leurs raisons d'être. L'enseignant est alors vu comme un sujet générique, on cherche à caractériser la fonction enseignante en termes de contraintes externes liées aux institutions en jeu ou internes à la situation d'enseignement. Les réponses à ces questions sont en général d'ordre théorique.

Identifier les moyens utilisés par l'enseignant pour gérer son projet d'enseignement et la place laissée à l'élève dans la réalisation de ce projet

Il s'agit de déterminer des procédés concrets qu'utilise l'enseignant pour gérer sa classe. Pour aborder cette question, il faut d'abord déterminer le projet de l'enseignant qui ne se ramène ni aux programmes, ni aux textes qu'il utilise ou fournit aux élèves, ni même à ce qu'il déclare de ce projet. Ce projet peut aussi être défini à différents grains : sur l'année, sur un contenu d'enseignement, sur une séance, sur un exercice, sur une intervention. De même l'activité mathématique de l'élève n'est pas accessible directement : on peut seulement identifier des problèmes, des tâches, c'est-à-dire des activités potentielles de l'élève ou repérer des actions d'un élève, des prises de parole, c'est-à-dire des indices de l'activité⁶ des élèves qui restent à interpréter en termes de connaissances mises en jeu. Enfin les moyens didactiques eux-mêmes peuvent être d'ordres très divers : choix de problème, mise en place de dispositifs, discours, organisation du travail des élèves, de leurs prises de parole... De plus, ces moyens de gestion peuvent relever de prévisions, de routines professionnelles ou de régulations de ces prévisions et routines. Aborder la question de la gestion par l'enseignant de son projet d'enseignement et de l'apprentissage des élèves suppose la mise en place de cadres théoriques et de méthodes adaptées qui ont un effet sur le type de réponse obtenu.

Comprendre comment se construisent les connaissances de l'enseignant

L'enseignant dispose de savoirs théoriques concernant les mathématiques elles-mêmes et leur enseignement et aussi de connaissances issues de l'expérience. Différents facteurs peuvent contribuer à modifier ces connaissances y compris la pratique professionnelle elle-même. La question de la construction des connaissances professionnelles des enseignants est intéressante à la fois pour comprendre les pratiques des enseignants et pour envisager leur formation. En effet, d'une part ces connaissances sont supposées avoir une influence sur les pratiques, d'autre part, des recherches et la

⁶ Le terme "activité" peut être pris à plusieurs niveaux : activité "matérielle" de l'élève, action sur le milieu, productions, écritures... ou activité conceptuelle. En général, seule la première est visible et la deuxième sujette à interprétation, à travers le jeu entre ostensifs et non ostensifs qui les gouvernent.

pratique des formateurs montrent qu'il est difficile de faire évoluer les pratiques par la formation. L'explication donnée par certains chercheurs est que les connaissances de l'expérience contribuent à automatiser la pratique de l'enseignant, par la mise en place de routines et d'un système d'inter-régulations de ces routines. Ainsi, ces connaissances seraient un des déterminants de la stabilité de la pratique.

Les méthodes d'étude et cadres théoriques de référence

J'ai esquissé dans la première partie le développement des cadres théoriques de la didactique des mathématiques en France. Les méthodes sont bien sûr liées à la question et aux outils théoriques utilisés. Cependant presque toutes les recherches utilisent des méthodes qualitatives, souvent des études de cas. Elles s'appuient sur des pratiques observées. Je distinguerai trois grandes catégories de recherches.

Etude approfondie de l'enseignement d'un contenu particulier

De telles études partent généralement d'une analyse épistémologique du contenu, complétée souvent d'une étude de l'évolution de son enseignement et s'intéressent principalement aux pratiques mathématiques concernant ce contenu, de l'organisation de l'enseignement jusqu'à la gestion concrète des situations en classe par l'enseignant. L'étude peut porter sur une seule classe ou comparer quelques études de cas. Des contraintes institutionnelles sont dégagées en même temps qu'un espace de liberté pour l'enseignant. L'étude de la manière dont est investi cet espace de liberté s'appuie sur des observations de classes qui sont généralement combinées avec des entretiens avec les enseignants, mais les lignes d'analyse sont déterminées par les cadres théoriques utilisés et amènent à un découpage du corpus analysé à différentes échelles de durée. L'étude se fait parfois avec une finesse telle qu'une seule séance est étudiée (Sensevy, Mercier, Schubauer-Leoni, 2000). Les enjeux très précis de la situation peuvent alors être dégagés et une analyse presque ligne à ligne de la transcription du déroulement permet d'identifier très précisément des gestes de l'enseignant pour gérer son projet ou des phénomènes didactiques imprévus.

Etudes comparatives et dispositifs spécifiques

D'autres études ne se centrent pas sur un contenu particulier et abordent la question des pratiques par une question plus transversale, portant directement sur les pratiques ou sur la formation ou encore par une méthode d'étude particulière. Par exemple, un moyen d'étudier les pratiques des enseignants en classe est de voir comment ils s'emparent des contenus d'une formation visant à mettre en place certains types de pratiques. Il existe encore peu d'études de ce type ; elles portent sur la formation initiale (Masselot, 2000) ou la formation continue (Vergnes, 2001) des professeurs des écoles, mettant en jeu un contenu précis ou comparant deux contenus différents. Beaucoup de ces études font appel à l'ergonomie cognitive (Robert, 2001, Rogalski, 1999)

Les recherches de variabilités et de régularités amènent des études comparatives, où on fixe certains paramètres en en faisant varier d'autres, par exemple on observe un même enseignant sur des contenus différents, un même enseignant dans des classes ayant des caractéristiques différentes (forte, faible...), des enseignants différents sur un même contenu.... On peut bien sûr combiner plusieurs des paramètres et utiliser une comparaison en liaison avec l'étude d'un contenu particulier (par exemple Roditi, 2001).

Il arrive aussi qu'un dispositif particulier soit mis en place, permettant une observation plus précise des interactions. Ainsi, Soury-Lavergne (2003) observe-t-elle les interactions d'un enseignant en situation de préceptorat à distance, communiquant avec un élève par l'intermédiaire d'un dispositif informatique qui oblige à des formulations plus explicites.

Articulation de plusieurs approches : pluridisciplinarité et codisciplinarité.

Les études de didactique comparée (Mercier, Schubauer-Leoni, Sensevy, 2002) qui se développent actuellement, se rattachent principalement à la théorie anthropologique mais en y intégrant des éléments d'autres sciences humaines et de didactiques de plusieurs disciplines ; ils cherchent notamment à modéliser l'action du professeur en distinguant ce qui est générique de ce qui est spécifique d'un contenu donné.

Par ailleurs, des équipes pluridisciplinaires ont tenté d'articuler différentes approches cliniques en menant des analyses conjointes sur un même corpus : une ou plusieurs approches de didactique des mathématiques et diverses approches de sciences de l'éducation y compris des approches sociologiques et des approches d'inspiration psychanalytique (Blanchard Laville et al., 1997, CREF, 2001). Il ne s'agit pas de juxtaposer des analyses de différents points de vue mais de les articuler, chacune venant éclairer des éléments étudiés dans l'une ou l'autre des analyses conjointes.

Les résultats

En plus des avancées théoriques dont nous avons déjà parlé, les résultats peuvent être non seulement une réponse à une question posée mais aussi la formulation de nouvelles questions ou une nouvelle manière de poser une question, tout ce qui fait avancer la didactique des mathématiques. Je retiendrai ici plus particulièrement les résultats qui concernent le premier degré ou la sixième.

Régularités et diversités. Systèmes de contraintes.

Les recherches permettent à la fois de relever des régularités en même temps qu'une grande diversité dans les pratiques analysées. Des régularités modulo de petites adaptations au niveau global en ce qui concerne par exemple le respect de certaines contraintes comme les programmes ou le temps consacré à l'enseignement d'une question ou certains types d'exercices abordés dans l'enseignement d'un contenu donné. Mais une grande variabilité au niveau local sur l'ordre de présentation, la répartition dans le temps et le développement des différents points. Les premières études dans ce sens ont porté sur le discours de l'enseignant mais les travaux plus récents prennent en compte plus de variables. Ainsi, sur l'enseignement des décimaux dans quatre classes de 6^{ème}, Roditi (2001) dégage, pour des enseignants placés dans des conditions analogues, une grande convergence des projets expliquée par les contraintes et des variations dans les pratiques pour lesquelles il peut reconstruire les lignes personnelles de cohérence de chaque professeur. Des études en REP et en ZEP (Butlen, D., Peltier, M.L. & Pezard, M., 2002) semblent montrer des régularités chez des groupes d'enseignants qui semblent apporter une réponse collective à un ensemble de contraintes.

Ces travaux se situent dans l'approche définie par Robert (2001). L'analyse amène à distinguer différentes composantes qui interagissent dans les pratiques. Les unes concernent l'organisation du travail mathématique des élèves et l'accompagnement qu'en fait le professeur ; elles sont déterminées essentiellement à partir de l'analyse du déroulement de la classe à l'aide d'outils de didactique ; d'autres composantes concernent les dimensions institutionnelles et sociales et combinent une analyse de type ergonomique et des outils usuels en didactique comme les analyses de programmes ou manuels ; une composante personnelle (atteinte par des entretiens complétant les observations) permet de mieux comprendre la cohérence d'ensemble.

Une régularité qui interroge : les pratiques ostensives

Le recours des enseignants à l'ostension a été relevé par de nombreux chercheurs, y compris dans des situations expérimentales où est organisé un apprentissage par adaptation à une situation voulue adidactique. Nous en avons parlé à propos de la

géométrie. La résistance des pratiques ostensives malgré les inconvénients relevés par les chercheurs au niveau de l'apprentissage a conduit à étudier quelles fonctions elles remplissent pour les enseignants et pour les élèves. Salin (1999) note en particulier, à la suite de Margolinas (1992), l'apparition constante de l'ostension dans les phases de conclusion. Pour expliquer cette prégnance de l'ostension, souvent sous forme d'ostension déguisée, elle évoque la complexité de la situation de l'enseignant dans les phases d'interactions collectives avec ses élèves et l'efficacité de la pratique d'ostension dans la vie courante et elle remarque aussi que les théories didactiques ne distinguent pas le cas où l'enseignant s'adresse à un seul élève et celui où il s'adresse à la classe.

Importance de la mémoire didactique de l'enseignant

Le rôle de la mémoire didactique gérée par l'enseignant avait été identifié par Brousseau et Centeno (1991) à partir d'un dispositif amenant des enseignants se succédant dans une même classe à se transmettre explicitement des informations sur le déroulement des situations. Ils ont montré que, pour gérer correctement la classe dans le cas d'un enseignement de type constructiviste, la mémoire du savoir enseigné ne suffit pas, les enseignants ont besoin de connaître non seulement les situations proposées aux élèves mais aussi ce que chacun d'eux a produit pour pouvoir gérer ce qu'il y a lieu de rappeler ou au contraire d'oublier en fonction de la progression des connaissances des élèves. Dans le cas d'une transmission directe des savoirs, la mémoire des savoirs pourrait suffire. Sensevy (1998) pose la question de l'articulation de la mémoire didactique et de la mémoire de l'élève. C'est à ce genre d'articulation qu'il travaille dans sa thèse autour du journal des fractions. Matheron (2000) reprend dans l'enseignement secondaire la question de la mémoire d'un point de vue anthropologique tenant compte du rôle des ostensifs dans l'activité mathématique (Bosch et Chevallard, 1999). Il distingue une mémoire pratique qui est celle des gestes de la pratique mathématique et a une certaine parenté avec les notions de schème et d'instrumentation (Rabardel, 1995), et une mémoire ostensive "qui est délibérément donnée à voir, de manière revendiquée, et par des moyens appropriés, à ses propres sujets ou à d'autres personnes par une institution ou un individu" (Matheron, 2000, p.102). Une des fonctions de l'institutionnalisation est d'homogénéiser les pratiques par une reconstruction du passé et donc un double travail de mémoire sur les pratiques: "public, en ce qui concerne la mémoire didactique ostensive de l'institution, et privé en touchant à la mémoire pratique personnelle (...) afin d'atteindre à nouveau à une compatibilité de ces deux types de mémoire" (Matheron, 2000, p. 304). Matheron et Salin (2002) soulignent la fonction de l'ostension pour rendre publiques des pratiques et constituer la mémoire officielle de la classe, en appui sur les ostensifs de l'activité mathématique.

La gestion du temps : le temps d'horloge et le temps didactique

L'identification du *temps didactique*, la chronogenèse, distinct du temps d'horloge et des contraintes temporelles de l'enseignement ainsi que la distinction entre le temps de l'enseignement et le temps de l'apprentissage remontent au début des années 80 (Chevallard, 1985). Mercier (1995, 1998) fait de la chronogenèse un des éléments essentiels de l'étude de la relation professeur - élèves. En étudiant l'avancée du temps didactique pour un élève particulier, c'est-à-dire l'articulation du temps de l'enseigné au temps didactique, il montre qu'un élève donné peut être amené à réaliser de lui-même un apprentissage utile pour sa réussite, mais invisible de l'enseignant parce que relatif à des savoirs qui ne sont pas les objets actuels de l'enseignement. Un tel apprentissage peut se produire quand un élève rencontre personnellement une ignorance correspondant à un rapport institutionnel nouveau à un objet ancien donc en liaison avec le fonctionnement temporel de l'enseignement. Mercier appelle *épisode didactique* un tel moment qui

correspond aussi à la rencontre d'un élève avec une dimension adidactique. Il pose la question de la gestion didactique de ces moments, ce qui permet d'identifier des manques didactiques pour certains élèves et amène de nouvelles questions sur le rôle du professeur, en particulier celle de la gestion publique de certains épisodes didactiques concernant un élève particulier et le rôle qu'y fait jouer le professeur à d'autres élèves. Sensevy (1998) montre comment le maître peut, à travers la gestion dans le temps d'un dispositif spécifique, laisser les élèves prendre une part à l'institutionnalisation, en laissant vivre des énoncés intermédiaires qui sont proposés aux élèves pour un nouveau travail. On voit ici une interpénétration entre les processus de dévolution et d'institutionnalisation, repérée aussi par Perrin-Glorian (1993) dans les situations de rappel.

Les régulations du contrat didactique

Le contrat didactique reflète les attentes réciproques de l'enseignant et de l'élève par rapport au savoir. Il permet que puisse s'installer une interaction entre les élèves et un milieu construit par l'enseignant pour que l'action des élèves sur le milieu et les rétroactions de celui-ci permettent la production de connaissances nouvelles pour les élèves. Brousseau (1996, 1997) s'intéresse aux équilibres à maintenir dans la relation didactique⁷ et aux régulations que l'enseignant doit effectuer pour maintenir ces équilibres. S'appuyant sur un principe d'économie, il fait l'hypothèse que, autant que possible, l'enseignant va rester dans l'orthodoxie, c'est-à-dire effectuer des régulations qui ne mettent pas en cause son projet, mais il peut être amené à sortir de cette logique et par là même à changer de situation en agissant sur le milieu ou en changeant le contrat didactique. De nombreux travaux ont utilisé ce cadre théorique pour analyser des séquences de classe. Ainsi, Comiti et Grenier (1995) et Comiti, Grenier et Margolinas (1995) identifient et analysent en termes de milieu des phénomènes liés au décalage entre la situation prévue par l'enseignant et la situation qu'il a réellement à gérer : la "résonance" explique l'importance particulière accordée au traitement de certaines erreurs et le "dédoublage de situation" correspond au cas où enseignant et élèves évoluent dans des situations différentes. Par la suite (Comiti et Grenier, 1997), elles étudient plus finement les régulations de l'enseignant pour faire face à ces décalages et précisent quelques contrats locaux, notamment le contrat d'adhésion et le contrat de production collective. Perrin-Glorian et Hersant (2003) poursuivent dans cette voie et distinguent différentes composantes du contrat : la partie liée au domaine de contenu, la partie liée au statut du savoir et la partie liée au partage de responsabilité du professeur et des élèves pour mieux caractériser les modes d'intervention du professeur au cours des interactions didactiques.

L'action de l'enseignant pour gérer la classe

Un travail précurseur est celui de Margolinas (1992) qui pose des jalons dans l'étude de l'institutionnalisation en identifiant deux modalités pour mener une phase de conclusion d'une situation : l'évaluation (à la charge du maître) ou la validation (sous la responsabilité des élèves). Elle étudie le deuxième cas à travers l'analyse de situations expérimentales publiées, identifie des conditions pour qu'une telle situation puisse fonctionner et la nécessité où peut se trouver l'enseignant de se replier sur une modalité d'évaluation, notamment dans le cas d'une situation de formulation ou de validation. Elle soulève aussi des manques théoriques et méthodologiques pour l'analyse a

⁷ En fait Brousseau examine ces équilibres et ces régulations non seulement au niveau d'un enseignant gérant une classe mais aussi au niveau du système didactique, ce qui dépasse notre propos.

posteriori qui amèneront certains des développements théoriques dont nous avons parlé. Depuis, beaucoup des travaux mentionnés dans les paragraphes précédents, notamment ceux qui recherchent des diversités et des régularités dans les pratiques des enseignants, et ceux qui ont cherché à spécifier la négociation du contrat didactique, ont contribué à identifier des gestes de l'enseignant pour gérer sa classe et produit des grilles d'observation et d'analyse de séquences de classes ordinaires. Il serait trop long d'en faire l'inventaire. Nous ne reprendrons ici que le travail de Sensevy, Mercier, Schubauer-Leoni (2000) parce qu'ils se placent dans une perspective de modélisation de l'action du professeur, qu'ils structurent en quatre grands axes qui peuvent chacun se décliner de multiples façons : définir, réguler, dévoluer, instituer. Ils font l'hypothèse que ces processus d'action concourent à déterminer la place de l'enseignant et celle de l'élève, le temps de l'enseignement et celui de l'apprentissage ainsi que les milieux des situations et les rapports aux objets de ces milieux. Leur modèle s'appuie à la fois sur la théorie des situations et la théorie anthropologique mais en proposant des prolongements et des adaptations de ces cadres théoriques pour prendre en compte la complexité de l'action du professeur. Ils analysent les actions d'un enseignant qui gère une séquence d'une situation expérimentale largement étudiée par ailleurs ("la course à vingt") mais qu'il ne connaissait pas. Ils observent que si l'on peut repérer des manières de faire qu'on pourrait identifier à des techniques, les types de tâches correspondants restent le plus souvent implicites. Ils procèdent à une double analyse à un grain très fin de l'action : l'une dans les termes où un praticien pourrait la faire, l'autre dans leur modèle, et ils augmentent le grain, ce qui permet de dégager ce qu'on pourrait appeler des types de tâches et des techniques mais sans que les types de tâches soient définis a priori, et sans qu'il y ait correspondance entre les deux : plusieurs techniques peuvent concourir à réaliser un même type de tâches.

L'effet des formations. Questions pour la formation

L'analyse de pratiques d'enseignants débutants (Masselot, 2000) montre qu'une certaine cohérence s'établit assez vite mais de façon inégale selon les enseignants et que, dans certains cas au moins, ces pratiques peuvent être déstabilisées et modifiées par un changement de niveau et d'environnement scolaire. De plus, on peut repérer différentes composantes dans les pratiques (choix de la situation et de l'activité prévue des élèves, travail autour de la consigne, travail lors des phases de recherche des élèves, travail lors des phases de mise en commun) qui sont inégalement influencées par la formation et avec des variations entre les enseignants. Se pose ainsi la question des connaissances initiales des futurs enseignants et de leurs attentes vis à vis de la formation. En formation continue (Vergnes, 2001), les effets des stages sur les pratiques semblent encore plus difficiles à cerner. Dans ce cas des études permettant de connaître le rapport au savoir des enseignants et la cohérence installée de leurs pratiques semblent encore plus nécessaires pour définir des conditions d'efficacité d'une formation qui doit prendre en compte non seulement ce qui est déterminant pour l'apprentissage des élèves mais aussi ce qui est transposable dans la classe du formé. Ces recherches portaient sur le premier degré, c'est-à-dire des enseignants polyvalents.

IV. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Au cours des dix dernières années, il me semble qu'on peut observer des avancées significatives :

- On a progressé dans la définition des cadres théoriques et dans leur articulation.

- On est sorti de l'enfermement dans l'étude des moments héroïques pour s'intéresser à celle des moments ordinaires.
- On commence à prendre en compte ce qui se passe hors de la classe
- On s'intéresse de plus en plus à l'enseignement dans les classes ordinaires mais le défi de la scolarité obligatoire et de l'enseignement pour tous reste un défi
- L'étude de l'enseignant s'est beaucoup développée mais dans des directions diverses qu'il reste à coordonner.

Cependant, comme le soulignait le rapport Prost, les résultats restent parcellaires et isolés. En essayant de réfléchir à ce qui me paraissait aujourd'hui des questions fondamentales posées par la didactique des mathématiques dans le premier degré, j'ai identifié cinq grands types de questions :

1) Quels objectifs et quelles situations pour l'enseignement dans des classes ordinaires ? Que sait-on sur l'apprentissage des différents contenus ? La problématique de l'étude des objectifs d'enseignement et de l'ingénierie didactique, c'est-à-dire la production de situations pertinentes et résistantes pour cet enseignement, me paraît toujours d'actualité. Il me semble qu'on a pas mal de choses sur le numérique mais beaucoup moins sur la géométrie. Cette problématique comprend l'ingénierie didactique expérimentale mais aussi l'étude de la viabilité des situations dans des classes ordinaires. Dès qu'on inclut ce dernier point, on rencontre les autres questions fondamentales.

2) Plus généralement, comment obtenir l'apprentissage de tous ? Qu'est-ce qu'un enseignement efficace des mathématiques ?

3) Quelles sont les pratiques effectives sur les contenus ? Que sait-on des pratiques effectives des enseignants en primaire ? Quelles régularités, quelles variabilités, suivant le contenu, l'environnement, la formation... ?

4) Comment décrire l'action de l'enseignant ? Y a-t-il des spécificités du primaire ?

Que sait-on du travail effectif de l'enseignant de mathématiques ? Peut-on trouver un modèle qui permette de décrire et prévoir l'action de l'enseignant ? Y a-t-il des spécificités du primaire ? Quel est l'effet de la polyvalence du maître, par exemple ? Peut-on avancer sur ces questions dans chacune des didactiques par la didactique comparée ?

5) Questions sur la formation des maîtres :

- en amont : quels sont les savoirs utiles pour enseigner efficacement les mathématiques ?

- quelle formation à la discipline elle-même, rapport aux mathématiques suivant l'origine des futurs maîtres ? De toute façon il y a un changement de rapport aux mathématiques pour passer d'un rapport d'usager des mathématiques à un rapport d'enseignant de mathématiques.

- acquisition d'outils d'analyse de situations d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques : quels outils, comment les acquérir ?

- en formation initiale : mise en place de pratiques d'enseignement des mathématiques, ce qui pose la question de la formation des pratiques.

- en formation continue : évolution des pratiques d'enseignement, par quels dispositifs peut-on les faire évoluer, dans quel sens peut-on les faire évoluer ?

RÉFÉRENCES

- Argaud H.C. (1998) *Intérêts et limites de l'environnement Cabri-géomètre en géométrie plane pour l'enrichissement de l'espace des problèmes et dans la constitution des milieux pour la validation dans des situations d'apprentissage à l'école élémentaire autour des relations de parallélisme, de perpendicularité et d'égalité*. Thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- Artigue, M. (1986) Etude de la dynamique d'une situation de classe : une approche de la reproductibilité. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7/1, 5-62.
- Artigue, M. (1990) Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9/3, 281-307.
- Bailleul, M. (1995) Une approche statistique des représentations de l'enseignement des mathématiques chez des enseignants de mathématiques de collège et de lycée. *Recherches en didactique des mathématiques*, 15/2, 9-30.
- Ball, D. L., Lubienski, S. T. et Mewborn, D.S. (2001) Research on teaching mathematics : the unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In Richardson, V. (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th edition) pp. 433-456, Washington, D.C., American Educational Research Association.
- Berthelot, R. (1993) Apport des recherches didactiques récentes sur l'enseignement de la géométrie *Actes du colloque COPIRELEM d'Aussois*.
- Berthelot, R. & Salin, M.H (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux I.
- Berthelot, R. & Salin, M.H (1994) L'enseignement de la géométrie à l'école primaire, *Grand N*, 53, 39-56.
- Berthelot, R. & Salin, M.H (1995) Savoirs et connaissances dans l'enseignement de la géométrie, in Arsac, G., Gréa, J., Grenier, D. & Tiberghien, A. (éditeurs) *Différents types de savoirs et leur articulation*, 187-204, La Pensée Sauvage Editions, Grenoble.
- Berthelot, R. & Salin, M.H (1998) the role of pupils' spatial knowledge in the elementary teaching of geometry in Mammana, C. & Villani, V. (eds) (1998) *Perspective on the teaching of geometry for the 21st century*, pp. 71-78. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.
- Blanchard-Laville, C. (1989) Questions à la didactique des mathématiques. *Revue française de psychologie*, 89,
- Blanchard-Laville, C. (1996) L'enseignant en classe : point de vue de l'approche clinique d'inspiration psychanalytique *Actes du colloque COPIRELEM de Montpellier*
- Blanchard-Laville, C. (Ed.) (1997) *Variations autour une leçon de mathématiques à l'école élémentaire, l'écriture des grands nombres*. Paris : L'harmattan.
- Bloch, I. (1999) L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19/2, 135-193.
- Bodin, A. & Capponi, B. (1996) Junior Secondary School Practices. In Bishop A.J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J. & Laborde, C. (Eds) *International Handbook of Mathematics Education*, (pp. 565-614), Kluwer Academic Publishers.
- Boero, P. (1994) Situations didactiques et problèmes d'apprentissage : convergences et divergences dans les perspectives de recherche. In Artigue, M. Gras, R., Laborde, C. & Tavnigot, P. *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à G. Brousseau et G. Vergnaud*, La pensée sauvage, Grenoble.

Vingt ans de didactique en 1993 ! Où en est-on dix ans après ?

- Boero, P., Dapueto, C. & Parenti, L. (1996) Didactics of mathematics and the professional knowledge of teachers. In Bishop A.J., Clements, K., Keitel C., Kilpatrick J. & Laborde C. (Eds) *International Handbook of Mathematics Education*, 1097-1121, Kluwer Academic Publishers.
- Bolon, J. (1996) *Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière école-collège*, Thèse Université René Descartes- Paris V.
- Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19/1, 77 - 123.
- Brousseau, G. (1981) Problèmes de didactique des décimaux, *Recherches en didactique des mathématiques*, 2/1, 37 - 127.
- Brousseau G., (1982), Les objets de la didactique des mathématiques. Ingénierie didactique, *Deuxième école d'été de didactique des mathématiques, Olivet (texte non publié)*.
- Brousseau G., (1990), Le contrat didactique : le milieu, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 9 /3, 309-336.
- Brousseau, G. (1994) Perspectives pour la didactique des mathématiques. In Artigue, M. Gras, R., Laborde, C. & Tavnignot, P. *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à G. Brousseau et G. Vergnaud*, La pensée sauvage, Grenoble.
- Brousseau, G. (1996) L'enseignant dans la théorie des situations didactiques. In Noirfalise, R. & Perrin-Glorian, M.J. (Eds) *Actes de la VIIIème Ecole d'été de didactique des mathématiques à Saint-Sauves d'Auvergne*, (pp. 3-46) IREM de Clermont-Ferrand.
- Brousseau (1997) Intégration des savoirs de formation : la régulation didactique, *Actes du colloque COPIRELEM de Lyon*.
- Brousseau, G. et Centeno, J. (1991) La mémoire du système didactique *Recherches en didactique des mathématiques vol 11 n° 2.3*, 167-210.
- Brun (1994) Evolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques. In Artigue, M. Gras, R., Laborde, C. & Tavnignot, P. *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à G. Brousseau et G. Vergnaud*, La pensée sauvage, Grenoble.
- Butlen, D., Peltier, M.L. & Pezard, M. (2002) Nommés(ées) en REP, comment font-ils ? Pratiques de professeurs d'école enseignant les mathématiques en REP : cohérence et contradictions, *Revue Française de pédagogie n° 140*, 41-52.
- Chevallard, Y. (1985) (rééd.1991) *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée sauvage.
- Chevallard, Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12/1, 73-111.
- Chevallard (1994) Nouveaux objets, nouveaux problèmes en didactique des mathématiques. In Artigue, M. Gras, R., Laborde, C. & Tavnignot, P. *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à G. Brousseau et G. Vergnaud*, La pensée sauvage, Grenoble.
- Chevallard, Y. (1997) Familiale et problématique, la figure du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques*, 17/3, 17- 54.
- Chevallard, Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19/2, 221-265.
- Comiti, C. & Grenier, D. (1995) Two examples of "split situation" in the mathematics classroom. *For the learning of Mathematics*, 15/2.

Vingt ans de didactique en 1993 ! Où en est-on dix ans après ?

- Comiti, C. & Grenier, D. (1997) Régulations didactiques et changements de contrat. *Recherches en didactique des mathématiques*, 17/3, 81-102.
- Comiti, C., Grenier, D. & Margolinas, C. (1995) Niveaux de connaissance et phénomènes didactiques. In Arsac, G., Gréa, J., Grenier, D. & Tiberghien, A. (Eds) *Différents types de savoirs et leur articulation* (pp. 93-127). Grenoble : La pensée sauvage.
- Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques dite commission Kahane (2000) Rapport d'étape sur la géométrie et son enseignement, *bulletin APMEP* n° 430, 571-599.
- Conne, F. (1994) Quelques enjeux épistémologiques rencontrés lors de l'étude de l'enseignement des mathématiques, *Actes du colloque COPIRELEM de Chantilly*.
- CREF (équipe du), (2001) Mélanie, tiens, passe au tableau Actes du colloque COPIRELEM de Tours.
- Douady, R. (1987) Jeux de cadres et dialectique outil objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7/2, 5-31.
- Duval, R. (1994) Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères-IREM*, 17, 121-138.
- Duval, R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, chapitre IV Figures géométriques et discours mathématiques, pp. 173-207, Bern, Peter Lang.
- Fennema, E. & Loef Franke, M. (1992) Teachers' knowledge and its impact. *Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning*, 8, 148-164, Mac Millan.
- Fischbein, E. (1993) The theory of figural concepts, *Educational Studies in Mathematics*, 24.2, 139-162.
- Fregona, D. (1995) *Les figures planes comme "milieu" dans l'enseignement de la géométrie: interactions, contrats et transpositions didactiques*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux 1.
- Gobert, S. (2001) *Questions de didactique liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible, dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire*. Thèse de doctorat, Université Paris 7.
- Grenier, D. (1990) Construction et étude d'un processus d'enseignement de la symétrie orthogonale : éléments d'analyse du fonctionnement de la théorie des situations, *Recherches en didactique des mathématiques*, 10/1, 5-60.
- Grenier, D. (1998), Milieu et contrat dans l'étude de l'enseignant et des interactions didactiques, *Actes des deuxièmes journées de La Fouly, Interactions didactiques*, Genève.
- Hersant, M. (2001), *Interactions didactiques et pratiques d'enseignement, le cas de la proportionnalité au collège*. Thèse de doctorat, Université Paris 7 Denis Diderot.
- Houdement, C. et Kuzniak A. (1999) Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 40, 283-312.
- Houdement C., Kuzniak A. (2000) Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 20/1, 89 - 116.
- Hoyles C., (1992) *Proceedings of International Conference on Psychology of Mathematics Education*, Durham, 1992, (vol. 3, pp.263-286).
- Jodelet, D. (Ed.) (1989) *Les représentations sociales*, Paris : PUF.
- Johsua, S. (1995) Où en est la didactique des sciences et des mathématiques ? *Actes du colloque COPIRELEM de Douai*.

- Kuzniak A. (2000) Un essai de lecture didactique du texte de Riemann sur les fondements de la géométrie : de la géométrie euclidienne aux géométries intrinsèques, *Actes du XXVIIème colloque interIREM sur la formation des maîtres*, Chamonix, IREM de Grenoble.
- Laborde, C. & Capponi, B. (1994) Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 14(1.2), 165-210.
- Lerman, S. (1997) Mathematics teachers' learning. In *Proceedings of International Conference on Psychology of Mathematics Education*, Lahti, 1997 (vol 3, pp.200-207).
- Mammana, C. & Villani, V. (eds) (1998) *Perspective on the teaching of geometry for the 21st century. An ICMI Study*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.
- Margolinas, C (1992) Eléments pour l'analyse du rôle du maître : les phases de conclusion. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12/1, 113-158.
- Margolinas, C. (1993) La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. In Margolinas (Ed.) *Les débats de didactique des mathématiques* (pp.89-102). Grenoble : La pensée sauvage.
- Margolinas & Perrin-Glorian (Editeurs invités) (1997) *Recherches en didactique des mathématiques*, 17/3, La pensée sauvage, Grenoble, (numéro entièrement consacré au thème de l'enseignant) et Editorial de ce numéro, 7-15.
- Masselot, P. (2000) *De la formation initiale en didactique des mathématiques (en centre I.U.F.M.) aux pratiques quotidiennes en mathématiques, en classe, des professeurs d'école (une étude de cas)*. Thèse, Université Paris 7.
- Matheron, Y. (2000) *Une étude didactique de la mémoire dans l'enseignement des mathématiques au collège et au lycée. Quelques exemples*. Thèse, Université d'Aix Marseille I.
- Matheron, Y. et Salin, M.H. (2002) Les pratiques ostensives comme travail de construction d'une mémoire officielle de la classe dans l'action enseignante, *Revue Française de Pédagogie*, INRP, n°141, 57-66.
- Mercier, A. (1995) La biographie didactique d'un élève et les contraintes temporelles de l'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques*, 15/1, 97-142.
- Mercier (1998) Ce que nous pouvons apprendre de l'observation biographique des élèves. *Actes du colloque COPIRELEM de Brest*.
- Mercier, Schubauer-Leoni, Sensevy, (Eds) 2002 Vers une didactique comparée, *Revue Française de pédagogie* n° 141, INRP, Paris.
- Parzysz, B. (1988) Knowing vs Seeing. Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19 (1), 79-92.
- Parzysz, B. (1991) Espace, géométrie et dessin. Une ingénierie didactique pour l'apprentissage, l'enseignement et l'utilisation de la perspective parallèle au lycée. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11(2.3), 211-240.
- Parzysz, B. (2001) Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1. *Actes du colloque COPIRELEM de Tours*.
- Perrenoud P. (1993) Ce que la recherche en éducation peut apporter à la conception de la formation des maîtres, *Actes du colloque COPIRELEM d'Aussois*.
- Perrin-Glorian, M.J. (1993) Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes faibles, *Recherches en didactique des mathématiques*, 13/1.2, 5-118.

Vingt ans de didactique en 1993 ! Où en est-on dix ans après ?

- Perrin Glorian, M.J. (1999) A study of teachers' practices : organisation of contents and of students' work. In Krainer K. & Goffree F. *On research in Mathematics Teacher Education. From a study of teaching practices to issues in teacher education*. Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik, Osnabrück.
- Perrin-Glorian, M.J. (1999), Problèmes d'articulation de cadres théoriques : l'exemple du concept de milieu, *Recherches en didactique des mathématiques vol 19 n°3*, 279 - 321.
- Perrin-Glorian, M.J. (2002) Chapitre 8 : Didactique des mathématiques, in Bressoux P. (éditeur) *Les stratégies de l'enseignant en situation d'interaction. Note de synthèse pour Cognitique. Programme Ecole et Sciences cognitive*, Université Pierre Mendès France Grenoble 2, remis au Ministère de la Recherche en février 2002, p. 203-239.
- Perrin-Glorian, M.J. et Hersant, M. (2003) Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires. *Recherches en didactique des mathématiques*, 23/2, 217-276.
- Ponte (da), J.P. (1994) Mathematics teachers' professional knowledge (1994) *Proceedings of International Conference on Psychology of Mathematics Education*, Lisbon, (vol. 1, pp. 195-210).
- Portugais, J. (1995) *Didactique des mathématiques et formation des enseignants*, Peter Lang, Bern,
- Rabardel, P. (1995) *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.
- Rauscher, J.C. (1993) *L'hétérogénéité des professeurs face à des élèves hétérogènes : le cas de l'enseignement de la géométrie au début du collège*, Thèse, IREM de Strasbourg.
- Robert, A. (2001) Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques*, 21/1-2, 7-56.
- Robert, A. & Robinet, J. (1992) Représentations des enseignants et des élèves. *Repères-IREM*, 7, 93-99.
- Roditi, E. (2001) *L'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième. Etude de pratiques ordinaires*. Thèse, Université Paris 7.
- Rogalski, J. (1999) Approche de psychologie ergonomique de l'activité de l'enseignant, *Actes du colloque COPIRELEM de*
- Rolet, C. (1996) *Dessin et figure en géométrie : analyse des conceptions des futurs enseignants dans le contexte Cabri-géomètre*. Thèse de l'université Claude Bernard, Lyon 1.
- Romberg, T.A. & Carpenter, T.P.(1986) Research on teaching and learning mathematics : two disciplines of scientific inquiry, in M.C. Wittrock (ed.) *Third Handbook of Research on Teaching*, New York, Mac Millan.
- Rouchier, A. (1994) Naissance et développement de la didactique des mathématiques. In Artigue, M. Gras, R., Laborde, C. & Tavinot, P. *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à G. Brousseau et G. Vergnaud*, La pensée sauvage, Grenoble.
- Salin, M.H. (1999) Pratiques ostensives des enseignants. In Lemoyne, G. & Conne, F. (Eds) *Le cognitif en didactique des mathématiques* (pp. 327-352) Les Presses de l'Université de Montréal.
- Schatz Koehler, M. & Grouws, D. A. (1992) Mathematics teaching practices and their effects. In *Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning*, 6, 115-126, Mac Millan.
- Sensevy, G. (1996) Le temps didactique et la durée de l'élève. Etude d'un cas au cours moyen : le journal des fractions. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol.16/1, 7-46.

Vingt ans de didactique en 1993 ! Où en est-on dix ans après ?

- Sensevy, G. (1998) *Institutions didactiques. Etude et économie à l'école élémentaire*. Paris : PUF.
- Sensevy, G., Mercier, A. & Schubauer-Leoni, M.L. (2000) Vers un modèle de l'action didactique du professeur. A propos de la course à 20. *Recherches en didactique des mathématiques*, 20/3, 263 - 304.
- Soury-Lavergne (2003) De l'étayage à l'effet Topaze, regard sur la négociation didactique dans la relation didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, 23/1, 9- 40.
- Sowder, J.T., Philipp, R.A., Armstrong B.E. & Schappelle, B.P. (1998) *Middle-grade teachers' mathematical knowledge and its relationship to instruction: A research monograph*. New York. State University of New York Press.
- Swafford, J.O., Jones, G.A., Thornton, C.A. (1997) Increased knowledge in geometry and instructional practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28 (4), 467-483.
- Thompson, A. G. (1992) Teachers' beliefs and conceptions : a synthesis of the research in *Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning*, 7, 127-146, Mac Millan.
- Vergnaud, G. (1994) Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel. In Artigue, M., Gras, R., Laborde, C. & Tavnigot, P. (Eds) *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à G. Brousseau et G. Vergnaud*. (pp. 177- 191). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Vergnes, D. (2001) Effets d'un stage de formation en géométrie. *Recherches en didactique des mathématiques*, 21/1.2, 99-121.

ANNEXES

1. Actes des colloques de la COPIRELEM. Plénières

Année	Auteur	Titre	Contenu, remarques
1993	P. Perrenoud	Ce que la recherche en éducation peut apporter à la conception de la formation des maîtres	- transposition didactique à partir d'une pratique professionnelle - conception de dispositifs de formation - pratique de formation
1993	R. Berthelot	Apport des recherches didactiques récentes sur l'enseignement de la géométrie	-connaissances spatiales/géométriques - différents rapports à l'espace - différentes problématiques
1993	M. Legrand	Les mathématiques, mythe ou réalité ?	problèmes épistémologiques liés à l'enseignement des mathématiques
1994	François Conne	Quelques enjeux épistémologiques rencontrés lors de l'étude de l'enseignement des mathématiques	mise en perspective de la théorie piagétienne, des champs conceptuels, de la théorie des situations et de la théorie anthropologique à propos de connaissances et savoirs
1995	M.G. Séré	Les systèmes de mémoire : l'orientation des recherches actuelles	Apports de la psychologie cognitive, de la neurophysiologie et de l'informatique
1995	S. Johsua	Où en est la didactique des sciences et des mathématiques ?	Examine la productivité d'un point de vue didactique et pointe quelques domaines nouveaux à explorer.
1996	C. Blanchard-Laville	L'enseignant en classe : point de vue de l'approche clinique d'inspiration psychanalytique	Exemple d'une leçon sur les grands nombres au CM2
1996	J.P. Bourguignon	Enjeux des mathématiques dans la société d'aujourd'hui	
1996	J. Brun	Enseignement des mathématiques et psychologie du développement cognitif : quels rapports ?	
1997	G. Brousseau	Intégration des savoirs de formation : la régulation didactique	Différents contrats ; régulations
1997	G. Guillot	Intégration des savoirs de formation : le devoir d'inquiétude	Philosophie et mathématiques
1998	B. Sarrazy	Questions de sens. Quelques réflexions à partir de l'usage des théories psychologiques dans l'enseignement des mathématiques	
1998	A. Mercier	Ce que nous pouvons apprendre de l'observation biographique des élèves	Exemple des grands nombres
1999	J.Y. Rochex	L'œuvre de Vygotski : fondements pour une psychologie historico-culturelle	
1999	J. Rogalski	Approche de psychologie ergonomique de l'activité de l'enseignant	Présentation d'un cadre théorique
2000	J. Julo	Aider à résoudre des problèmes. Pourquoi ? Comment ? Quand ?	Caractériser les aides à la résolution d'un point de vue cognitif
2000	M. Legrand	Sciences, enseignement, démographie et humanisme	Réflexion épistémologique sur l'enseignement des maths et la didactique
2001	F. Saujat	Des difficultés des élèves aux difficultés du métier d'enseignant	
2001	Equipe CREF	Mélanie, tiens, passe au tableau	

2. Articles publiés dans RDM et s'intéressant au primaire 1993-2002

Année	Auteurs	Titre	Cadres théoriques	Contenus, niveau
1993	Perrin	Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes faibles.	Théorie des situations Représentations métacognitives	Décimaux, aires, classes faibles, professeur, théorique, CM
1995	Mopondi	Les explications en classe de mathématiques	Théorie des situations	Théorique ; professeur ; Proportionnalité, CM2,
1996	Sensevy	Le temps didactique et la durée de l'élève. Etude d'un cas au cours moyen : le journal des fractions.	Théorie anthropologique	Théorique. Fractions, professeur, , CM
1996	Deblois	Une analyse conceptuelle de la numération de position au primaire.	Piaget, schèmes, modèle de la compréhension	Numération de position, difficultés des élèves, Primaire (cycle 3)
1996	Houdement & Kuzniak	Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré	Travail empirique, approche classificatoire	Formation des maîtres du premier degré : stratégies des formateurs
1996	J.J. Maurice	Problèmes multiplicatifs : l'expérience de l'enseignant, l'action effective de l'élève	Ergonomie cognitive	Connaissances en action des enseignants ; division, CM
1997	B. Sarrazy	Sens et situations : une mise en question de l'enseignement de stratégies métacognitives en mathématiques	Épistémologie, philosophie; théorie des situations,	Résolution de problèmes Contrat didactique, CM
1998	A.M. Jovenet	Perception et conceptualisation de la symétrie. Une situation adaptée aux élèves myopathes	Vygotski, théorie des champs conceptuels	Symétrie orthogonale, enseignement spécialisé
1998	A. Mercier	La participation des élèves à l'enseignement	Théorie des situations, théorie anthropologique	Théorique, enseignant, CM2, numération
1999	J. Briand	Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numériques. Etude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine pré-numérique.	Théorie des situations	Énumération, transposition didactique, ingénierie didactique, maternelle
2000	C. Houdement et A. Kuzniak	Formation des maîtres et paradigmes géométriques	Epistémologie	Théorique. Formation des maîtres du primaire, géométrie,
2000	F. Leutenegger	Construction d'une "clinique" pour le didactique. Une étude des phénomènes temporels de l'enseignement	Théorie anthropologique, méthode clinique	Théorique. Observation de systèmes didactiques ; mise en place d'une méthode ; enseignements de soutien ;
2000	G. Sensevy, A. Mercier, M.L. Schubauer-Leoni	Vers un modèle de l'action du professeur. A propos de la course à 20.	Théorie anthropologique; théorie des situations	Étude du professeur ; théorique ; CM2
2001	D. Vergnes	Effets d'un stage de formation en géométrie	Ergonomie; didactique professionnelle ;	Géométrie ; formation continue des enseignants du primaire
2002	P. Clanché, B. Sarrazy	Approche anthropodidactique de l'enseignement d'une structure additive dans un CP kanak	Ethnologie ; anthropologie anthropodidactique	Théorie Problème additif
2002	E. Comin	L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège	Théorie des situations	Proportionnalité ; conditions macrodidactiques
2002	L. Garcion-Vautour	L'entrée dans le contrat didactique à l'école maternelle. Le rôle des rituels dans la construction d'un milieu pour apprendre	Théorie anthropologique (théorie des situations didactiques)	Maternelle ; rituels du matin ; milieu en théorie anthropologique

3. Actes des colloques COPIRELEM. Classement des communications

Thème	Années	Auteurs	Contenus	Cadres théoriques
Ingénierie didactique et études concernant les élèves dans le numérique	1994	J. Briand	Énumération	théorie des situations Vygotsky
	1994	R. Brissiaud	Soustraction	
	1995	Butlen – Pézard	Calcul mental, pbs numér.	Mémoire, psycho cognitive
	1996	R. Charnay	INRP – ERMEL	
	1996	F. Boule	Calcul mental	Psychologie cognitive Théorie des situations
	1998	J. Briand	Prénumérique	
	1999	Butlen-Pézard	calcul mental, écrits, problème	
	2000	Butlen-Pézard	idem	
2001	R. Brissiaud	Comptine numérique CP		
Ingénierie didactique et études concernant les élèves en géométrie	1995	J.F. Favrat	Cylindres	Théorie des situations
	1995	T. Bautier	Symétrie orthogonale	
	1996	Bettinelli	Formes en maternelle	
	1997	E. Greff	Tortue de sol maternelle	
	1998	F. Boule	Géométrie dans l'espace	
	2000	N. Bouleau	Reproduction figures	
2001	E. Greff	Robot de plancher		
Etudes de pratiques et Formation des maîtres PE	1994	A. Kuzniak	Stratégies de formation	Description, classification
	1995	C. Houdement	Stratégies de formation	
	1996	M.L. Peltier	Sujets de concours, effets FI	Description, classification
	1996	R. Neyret	Nombres – FI	
	1996	A. Lerouge	Visites PE2	Th. Anthropologique
	1996	D. Butlen	Analyse de pratiques PE2	
	1997	J. Bolon	Décimaux; CM-6 ^{ème}	Didactique professionnelle
	1997	C. Rolet	Géométrie – PE 1	
	1997	Larere, Aurand	Analyse pratiques, FC géom	géométrie Psycho cognitive, th situat.
	1998	D. Vergnes	Effet stage FC géométrie	
	1999	M.H. Salin	chercheurs/enseignants	Didactique professionnelle
	1999	P. Masselot	Analyse pratiques	
	2000	S. Coppé	Savoirs professionnels	TSD méthodologie didactique professionnelle
	2000	M.P. Galisson	arithmétique au CRPE	
	2000	M.L. Peltier	Pratiques prof. en ZEP	théorie anthropologique théorie anthropologique
	2000	C. Rolet	Savoirs professionnels	
	2000	B. Nicolas-Lorrain	géométrie PE1	théorie anthropologique géométrie
2001	B. Parzys	PE1 géométrie		
2001	Briand - Salin	Recherche et formation	géométrie	
Formation des maîtres PLC ou général	1996	Noguès – Trouche	Outils de calcul	
	1998	J.C. Rauscher	Recherche et formation cont.	
Théorique	1995	A. Mopondi	Explications	Théorie des situations
	1996	A. L. Mesquita	Figures géométriques	
	1997	M. Prouchet	Médiation cognitive	Appréhension cognitive
	1998	Houdement Kuzniak	Géométrie	
	2001	Descaves	Qu'est-ce que le sens ?	Épistémologie
	2001	T. Bautier	Modèle neurobiologique	
2001	S. Zaragosa	Compétences interlocutoires	Linguistique	
Autres	1998	A. Bronner	Perspectives sur calcul	Théorie anthropologique
	1998	T. Assude	Évolution ens. Arithmétique	
	1998	D. Grenier	Problèmes discrets	
	1999	F. Boule	Enseignement en SEGPA	
	1999	P. Eysseric	Ateliers de recherche math	
	2001	P. Debu	Enseignement au Togo	

4. Liste⁸ des thèses soutenues entre 1999 et 2002 concernant le primaire ou la sixième.

- Briand Joël *L'énumération dans le mesurage des collections, un dysfonctionnement de la transposition didactique*. Didactique des mathématiques, Université Bordeaux 1, 1993
- Banwittuya Yéléko *L'ingénierie du sens en mathématiques : la division dans N, Q et D à l'école primaire*. Didactique des mathématiques Université Bordeaux 1, 1993
- Bautier Thierry *Étude des médiations dans l'enseignement des transformations géométriques*. Didactique des mathématiques, Université Bordeaux 1, 1993
- Moreira Mariano *Le traitement de la vérité mathématique à l'école*. Didactique des mathématiques, Université Bordeaux 1, 1993
- Guiet Jeanne *La division : une longue souffrance*. Sciences de l'éducation, Université Paris V, 1994
- Kuzniak Alain *Étude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres au premier degré*. Didactique des mathématiques, Université Paris 7, 1994
- Larere Christiane *Construction et appropriation de connaissances mathématiques par trois enfants infirmes moteurs cérébraux handicapés de la parole*. Sciences de l'éducation, Université Paris V, 1994
- Bahra Mohamed *Problèmes de didactique de la numération. Echecs et succès de la remathématisation*. Didactique des mathématiques, Université Bordeaux 1, 1995
- Peltier Marie-Lise *La formation initiale, en mathématiques, des professeurs d'école : "entre conjoncture et éternité"*. Didactique des mathématiques, Université Paris 7, 1995
- Houdement Catherine *Projet de formation des maîtres du premier degré en mathématiques : programmation et stratégies*. Didactique des mathématiques, Université Paris 7, 1995
- Christiaens Evelyne Sophie *Une approche conceptuelle des fractions à l'école élémentaire*. Sciences de l'éducation, Université Paris V, 1995
- Neyret Robert *Contraintes et détermination des processus de formation des enseignants: nombres décimaux, rationnels et réels dans les I.U.F.M.* Didactique des mathématiques, Université Grenoble, 1995
- Chamorro Plaza Maria del Carmen *Estudio de las situaciones de enseñanza de la medida en la escuela elemental*. Universidad Nacional de educación a distancia, 1997
- Bacquias Michel *Nombre et grandeur. Essai de définition du mesurage comme un complexe d'apprentissage*, Université Paris 7, 1998
- Argaud Henri-Claude *Problèmes et milieux a-didactiques, pour un processus d'apprentissage en géométrie plane à l'école élémentaire, dans les environnements papier-crayon et Cabri-géomètre*, Laboratoire Leibniz, Université Joseph Fourier, Grenoble, 1998
- Adjiaje Robert *L'expression des nombres rationnels et leur enseignement initial*, IRMA Université Louis-Pasteur, Strasbourg, 1999
- Molina Ortin Carmen *Integración del invidente en la clase de matemáticas Estudio comparado del aprendizaje de la geometría entre niños videntes y invidentes*, Universidad de Zaragoza, 1999
- Comin Eugène *Proportionnalité et fonction linéaire Caractères causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire*. Université Bordeaux 1, 2000
- Esmijnjaud - Genestoux Florence *Fonctionnement didactique du milieu culturel et familial dans la régulation des apprentissages scolaires en mathématiques* Université Bordeaux 1, 2000
- Masselot Pascale *De la formation initiale en didactique des mathématiques (en centre IUFM) aux pratiques quotidiennes en mathématiques, en classe, des professeurs d'école (une étude de cas)*. Université Paris 7, 2000
- Mul André *Enseignement de la géométrie du cycle 3 à la sixième : des éléments du quotidien scolaire*, Université Paris 7, 2000
- Vergnes Danielle *Analyse des effets d'un stage de formation continue en géométrie sur les pratiques d'enseignants de l'école primaire*, Université Paris V, 2000

⁸ Source : site de l'ARDM : www.ardm.asso.fr

Vingt ans de didactique en 1993 ! Où en est-on dix ans après ?

Block David *La noción de razon en la matematicas de la escuela primaria. Un estudio didactico.* Universidad de Mexico. CINESTAV, 2001

Gobert Sophie *Questions de didactique liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible, dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire,* Université Denis Diderot Paris 7, 2001