La boîte du pâtissier

Marie-Lise Peltier- Catherine Houdement- Denis Butlen

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques – Colmar 1993.

Cet article est la présentation d'une situation en formation initiale ou continue. A partir d'une activité de fabrication de pliage d'une boîte parallélépipédique, il est possible de pointer les concepts didactiques de situation, de dialectique outil-objet, de variable didactique.
L'idée de cette activité est tirée de la brochure « Aides pédagogiques CM Situations Problèmes, P.103 (APMEP 1988) ».

Objectifs

Objectifs didactiques

1 - Mettre en évidence quelques concepts de didactique (situation didactique, dialectique outil-objet, variable didactique, dévolution...)

2 - Analyser des processus de recherche, montrer l'importance
- du cheminement personnel
- de la confrontation
- de la validation interne comme moteur de la recherche (le fait de pouvoir évaluer soi-même son travail permet de continuer si nécessaire la recherche sans nouvelle intervention du maître).

Objectifs mathématiques

1 - Revenir sur le vocabulaire géométrique et sur l'étude d'objets géométriques du plan et de l'espace.
2 - Modéliser une situation.

ACTIVITÉ

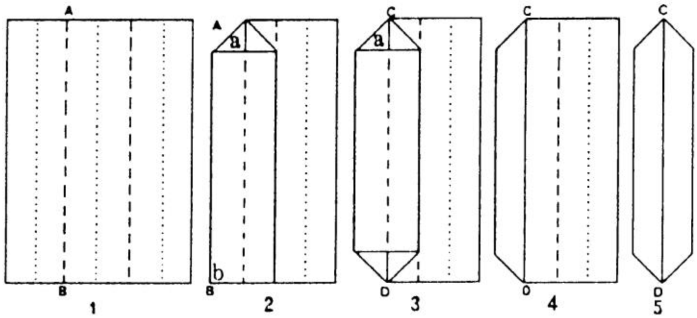
Les étudiants résolvent le problème mathématique, puis visionnent le document vidéo[1] relatant la résolution dans une classe de CM.

[1] Cette vidéo est disponible à l'I.U.F.M. de Haute-Normandie, Département audio-visuel, B.P. 18, 76131 Mont-Saint-Aignan Cedex

La séquence est menée avec des objectifs mathématiques pour que les étudiants vivent la situation côté élève et comparent leurs réactions et leurs procédures de résolution à celles d'élèves de CM.

Phase 0

Apprentissage du mode de construction de la boîte



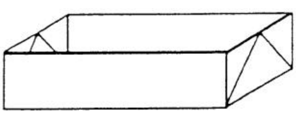
Consigne

"Construisez une boîte à partir d'une feuille rectangulaire de format A4 en suivant les instructions de pliage (P) suivantes :

1) faites apparaître les cinq plis (équidistants) indiqués;
2) pliez suivant AB et réalisez les pliages du coin (a);
3) réalisez dans le coin (b) les mêmes pliages qu'en (a);
4) pliez selon le pli en creux CD;
5) effectuez les mêmes actions dans la partie droite de la feuille : vous obtenez la figure 5;
6) il reste à ouvrir la boîte et à marquer les plis des arêtes. "

Remarque

On obtient deux boîtes de formes différentes suivant que l'on plie sur la longueur ou sur la largeur de la feuille A4.



Phase 1

Les boîtes à fond carré

Organisation

Par groupes de 3 ou 4 après une indispensable recherche individuelle de 5 minutes.

Consigne 1

"Construisez en suivant les instructions (P) une boîte à fond carré, puis rédigez une affiche relatant la recherche, la méthode retenue, les conclusions que vous en tirez en précisant les dimensions de la feuille qui vous sert au pliage. II est important que vous notiez tous les essais, même ceux qui n'ont pas abouti. "

Procédures observées chez les étudiants

Faire le pliage à partir d'une feuille carrée ;

Mesurer les dimensions de la boîte presque carrée obtenue en phase 0 et enlever la différence sur la longueur, puis sur la largeur.

Déplier la boîte construite dans la phase 0 et étudier les plis.

Construire un carré au centre d'une feuille et le compléter par les bandes nécessaires à la construction par pliage.

Dessiner sur le fond d'une boîte déjà construite un carré, déplier la boîte et construire par translation les bandes nécessaires pour la construction.

Remarques

Les procédures sont analogues à celles observées chez des enfants de CM2 confrontés à la même consigne.

Une consigne supplémentaire ("construisez la boîte à fond carré la plus grande possible à partir de la feuille A4") peut être proposée aux groupes ayant terminé la première tâche plus tôt (**gestion du temps).**

Mise en commun

Les affiches sont exposées devant la classe entière et commentées par leurs auteurs. Le professeur laisse exposer les groupes, sans prendre position ; il n'y a donc pas nécessairement de conclusion générale du type : "pour obtenir une boîte à fond carré de côté x, il faut partir d'une feuille de dimensions 2x, 3x."

Consigne 2

"Construisez une boîte dont le fond est un carré de 6 cm de côté, donnez les dimensions de la feuille servant au pliage en précisant celle suivant laquelle

vous pliez. Proposez une généralisation : quelles sont les dimensions de la feuille permettant de construire une boîte dont le fond est un carré de côté x ? "

Remarque

Une consigne supplémentaire pour **la gestion du temps** peut être : "construisez des boîtes à fond carré gigognes"

Synthèse

Cette synthèse permet de généraliser les procédures permettant une bonne construction et d'institutionnaliser" pour construire une boîte à fond carré de côté x, on peut partir d'une feuille rectangulaire de dimensions 2x et 3x et plier selon la longueur".

Phase 2

Conditions d'existence des boîtes.

I1 s'agit ici de relancer la recherche sur la liaison entre les dimensions de la feuille de départ et celles de la boîte obtenue.

Consigne 1
"De quelle feuille peut-on partir pour construire une boîte de fond 6 cm sur 13 cm ?"

Consigne 2
"Quelles sont les dimensions de la boîte obtenue en pliant une feuille 15x32 suivant la largeur ?"

Consigne 3

"Élaborez un tableau de valeurs numériques correspondant aux différentes boîtes construites pendant la recherche de la phase 1. Soulignez la dimension selon laquelle vous pliez."

Rectangle de départ	Dimensions du fond de la boîte	

Consigne 4
"Construisez une boîte de fond 8 cm sur 14 cm et de hauteur 5 cm."

Synthèse

Le tableau ci-dessous se trouve complété avec une nouvelle colonne, la hauteur de la boîte.

On formule une condition sur la hauteur pour qu'on puisse construire une boîte de fond de dimensions x et y et de hauteur h : "la hauteur de la boîte est toujours la moitié de l'une des dimensions du fond".

<u>Phase 3</u>

Extension du champ numérique, vers une modélisation algébrique

Consigne 1

(travail par groupe)

"Proposez une stratégie pour pouvoir répondre rapidement aux deux types de questions suivantes :

(1) à partir de la donnée des dimensions d'une feuille rectangulaire et de la dimension selon laquelle on plie, dites si l'on peut construire une boîte et donner les dimensions de la boîte obtenue,

(2) à partir des dimensions d'une boîte réalisée, donnez les dimensions de la feuille rectangulaire utilisée et la dimension selon laquelle on plie.

Rédigez un message expliquant (ou présentant) votre méthode."

Nous proposons le déroulement suivant :

• Donner une première série de questions, par exemple :

(1) "On dispose d'une feuille de dimension 12 et 17 cm, on plie suivant la largeur, obtient-on une boîte ? Si oui, quelles sont ses dimensions ? On plie suivant la longueur, obtient-on une boîte ? Si oui, quelles sont ses dimensions ?

(2) Trouvez les dimensions de la feuille permettant de construire une boîte de dimensions 12x15 et de hauteur 6 cm."

• Faire échanger les messages groupe à groupe.

• Redonner une nouvelle série de questions des types (1) et (2). Terminer par une question du type : *"à partir d'une feuille f, on obtient une boîte b, on prend une feuille F obtenue en doublant une des dimensions de f, on construit une boîte B ; donnez les dimensions possibles de la boîte B en fonction de celles de la boîte b ".*

• Laisser les groupes discuter deux à deux pour mettre au point leur message.

Synthèse

• Afficher les différents messages et les réponses aux questions qui sont posées.

• Comparer les procédures du point de vue de leur pertinence, de leur efficacité, de leur lisibilité, du cadre dans lequel elles sont rédigées (tableaux de nombres, écritures littérales, écritures fonctionnelles, textes en français...).
• Conclure
1 - Si on connaît les dimensions de la boîte (fond x et y, hauteur x/2), on obtient les dimensions de la feuille par la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \to (3x, x+y)$$

2 - Si on connaît les dimensions de la feuille x et y que l'on plie suivant x :

$$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \to \left(\frac{x}{3}, y - \frac{x}{3}, \frac{x}{6}\right)$$

Cette phase peut éventuellement être prolongée par la recherche suivante.

Consigne 2

"Recherchez les conditions sur les dimensions x et y de la feuille pour que l'on puisse obtenir une boîte en la pliant suivant x. "

Synthèse

- Si $x < y$, le pliage est toujours possible.
- Si $x > y$, le pliage n'est possible que si $x < 3y$ (lien avec l'ensemble de définition de la fonction g).

<u>Phase 4</u>

(facultative) : relance vers des consignes avec contrainte sur le volume.

Exemples de consignes

Quelles feuilles choisir pour construire
• une boîte à fond carré contenant exactement 1/2 litre ?
• une boîte cubique contenant exactement 1 litre ?
• une boîte ayant un volume de 160 cm^3 ?"

<u>Phase 5</u>

Visionnement du film "la boîte du pâtissier"

I1 s'agit dans cette phase d'étudier les procédures des élèves de CM et de mettre en évidence le rôle de l'erreur.

ANALYSE DE L'ACTIVITÉ

Analyse mathématique

Cette situation permet :

- de faire des rappels de géométrie, notamment sur le vocabulaire ;
- d'élaborer un codage fonctionnel, utile comme outil de prévision : les fonctions f et g ont permis la généralisation.
- de travailler sur le raisonnement : les étudiants et les élèves de CM émettent des hypothèses, valident ou invalident ces hypothèses, mettent en évidence des erreurs de raisonnement du type : *"si je pars d'un rectangle, j'obtiens une boîte à fond rectangulaire, donc si je pars d'un carré, j'obtiens une boîte à fond carré."*

Analyse didactique

1 - Description de la situation

Il est possible de décrire les différents moments importants de la situation :

- la phase de dévolution,
- le type de consignes : courtes mais prétexte à des recherches poussées,
- la tâche de l'élève : production d'un objet soumis à des contraintes, possibilité de validation interne,
- le rôle de l'erreur : elle apparaît ici très positive car elle permet d'avancer soit en éliminant les hypothèses invalides, soit en les modifiant pour les rendre valides ;
- l'institutionnalisation possible à plusieurs moments :
  - sur des points méthodologiques,
  - sur le raisonnement,
  - sur les notions mathématiques.

2 - Quelques concepts de didactique

Conditions pour qu'un problème puisse être source d'apprentissage (mises en avant dans cette situation) :

- l'énoncé a du sens pour les élèves ;
- le problème est consistant (la réponse n'est pas évidente) ;
- l'élève comprend ce qu'est une réponse au problème ;
- il peut s'engager, dès la fin de la consigne, dans des procédures de résolution ;
- il peut en contrôler lui-même les effets.

Phases d'une situation didactique

Il est possible de pointer dans cette situation les phases :

• d'action,
• de validation,
• de formulation et de communication,
• d'institutionnalisation,
• de réinvestissement.

Dévolution

La phase 0 permet à l'élève d'apprendre le procédé de construction des boîtes et donc d'être libéré des difficultés matérielles pour la suite.

Dans la phase 1, réaliser effectivement l'objet et vérifier si la contrainte est obtenue motivent sa recherche.

Dialectique outil-objet

Elle fonctionne ici sur le savoir savant "fonction de $R^n \rightarrow R^p$ ".

En effet, ces fonctions interviennent comme outils implicites dans les phases 1 et 2. La phase 3 permet d'expliciter cet outil, de l'utiliser pour prévoir d'autres constructions, pour anticiper l'action. Une phase supplémentaire permettrait d'étudier les fonctions de R^n dans R^p en tant qu'objets, mais ceci est en dehors des objectifs de la formation mathématique des instituteurs.

Le fonctionnement **outil-objet** de la notion de fonction dans cette situation permet d'illustrer l'esprit des mathématiques :

- d'abord une **résolution locale**, suffisante dans un premier temps,
- puis une nécessité de **généralisation**, comme outil de prévision,
- enfin la puissance de la **modélisation** pour anticiper, pour résoudre en une seule fois une famille de problèmes isomorphes.

Les changements de cadres : nous avons constaté que certains étudiants ne mobilisaient jamais d'outils algébriques, ils pouvaient rester dans des cadres numérique ou géométrique. La situation n'impose pas forcément ces changements de cadres, ils doivent être sollicités par le professeur.

Les changements de cadres (passage d'un cadre géométrique à un cadre algébrique) peuvent être à la charge du professeur, ce sont les consignes suivantes qui peuvent les provoquer : phase 1 consigne 2 (généralisation), phase 3 consigne 1 (nécessité de rapidité et de communication).

Variables didactiques

Le professeur explicite les variables qu'il a utilisées et ses choix.

Le fait d'imposer ou non la hauteur de la boîte à construire (phases 2, consignes 1 et 2) influe sur la manière dont les étudiants prennent en compte les résultats antérieurs.

Le fait de demander une boîte constructible ou non dans une feuille A4 (phase 3, consigne 1) n’est pas neutre. En effet si la boîte demandée ne peut être effectivement construite, les procédures de constat et de tâtonnement se trouvent bloquées et les étudiants passent à des procédures de prévision, donc cherchent à modéliser la situation.

I1 aurait aussi été possible de ne pas imposer le nombre de lignes de pliage dans le mode de fabrication de la boîte (par exemple, plier en 10 au lieu de plier en 6) ; ce nombre est donc une variable didactique, non prise en compte dans cette séquence, parce qu'elle peut induire une recherche du type de pliage à faire, au lieu d'une étude des dimensions de la feuille à plier.

Contrat

Il est possible de faire prendre conscience aux étudiants qu'ils ont fait fonctionner les règles d'un contrat implicite, par exemple :

- un problème posé à l'école a toujours une solution (cf. phase 2, consigne 2),
- on ne rédige que "la bonne solution" (cf. phase 1, consigne 1).

D'où la nécessité

- d'être attentif et vigilant aux effets de contrat,
- d'expliciter le plus souvent possible le contrat, notamment par le choix de consignes appropriées.