Décimaux et autres nombres

Marianne Frémin

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques – Pau 1992.

Cet article est un compte-rendu d'activités menées avec des Élèves Professeurs des Écoles de première année (PE 1).

I-Introduction

A. Contexte

A l'IUFM de Versailles, le thème "décimaux, fractions et réels" apparaît en première année à la rubrique maîtrise des contenus uniquement, pas à celle de l'ouverture professionnelle. Les préoccupations d'ordre pédagogique sont donc repoussées en deuxième année.

B. Mes choix

Je n'ai pas cherché à présenter une construction propre de ces ensembles de nombres. J'ai voulu d'abord regarder, prendre en compte les connaissances des PE1 et leur préférence pour les "nombres à virgule", pour ensuite organiser les acquis. J'ai essayé d'intégrer les nouveaux outils de calcul (place à la calculette et à un petit peu d'analyse numérique).

II - Le test

A. Le test lui-même *(voir en annexe 1*)

Il est livré aux étudiants qui spontanément discutent entre voisins et confrontent leurs interrogations et points de vue. Nous faisons ensuite une synthèse des acquis, des questions, je complète selon les besoins.

B. Les points soulevés

1. ***Définition (questions 1 et 3*)**

Un décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $n/10^p$, ou sous forme d'une écriture à virgule finie.

2. ***Écriture à virgule et nombre décimal (questions 1 et 2*)**

Un décimal a d'autres écritures que celle à virgule : une écriture à virgule illimitée désigne rarement un décimal.

3. ***0,999999* = 1 (!..) *(question 1*)**

Mal accepté. Deux arguments sans réplique, mais peu convaincants : "s'il est différent de 1, quel est donc l'écart à 1 ?" et "0,33333... = 1/3, donc 3 x 0,333333... = 0,999999... = 3 x 1/3 = 1".

4. ***Reconnaître qu'une fraction est un décimal (question 3)***

a/b irréductible, et $b = 2^p \times 5^q$

5. Densité (questions 1, 7, 8)

Un langage topologique intuitif de "fonctions continues et valeurs intermédiaires", de "suites majorante et minorante coinçant un nombre" semble évocateur.

6. ***Approximation (question 4*)**

Toujours de la topologie intuitive.

7. ***Précision (question 4*)**

A propos de la contradiction, pour certains, qui considèrent que "3,14 est π", que "3,140 n'est pas π ", mais que, cependant, "3,14 = 3,140", on précise que, pour les matheux, 3,14 = 3,140 = 3,1400 = 3,14000 ... (des écritures formelles du même nombre), alors que pour les physiciens, ce sont des nombres issus de mesures, avec une précision au centième, au millième, au dix millième (les écritures portent une indication sur la fiabilité des décimales).

III - Cours après le test

A. ***N Z D Q R (C)***

Quels nombres contiennent-t-ils ? (appel aux souvenirs)

Les souvenirs leur permettent de donner quelques spécimens de nombres qui sont ou qui ne sont pas dans chaque ensemble.

Inclusions : $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{D} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$

B. Leurs propriétés algébriques (point de vue du matheux algébriste)

On cherche à plonger un ensemble de nombres dans un ensemble plus vaste, en gardant toutes les bonnes propriétés, et en les améliorant :

En passant de **N** à **Z**, on gagne les symétriques, et le fait que toutes les équations $a + x = b$ ont une solution.

En passant de **Z** à **D**, on ne gagne rien (**D** n'est pas une invention d'algébriste).

En passant de **Z** à **Q**, on gagne les inverses, et le fait que toutes les équations $a x = b$ ($a \neq 0$) ont une solution.

En passant de **Q** à **R**, on gagne des solutions à des équations qui n'en avaient pas (par exemple $x^2 = 3$).

En passant de **R** à **C**, on gagne des solutions à des équations qui n'en avaient pas (par exemple $x^2 = -1$).

C. Leurs propriétés topologiques
Net **Z** sont discrets.
D et **Q** sont denses. mais pas complets.
R est complet: c'est le seul dans lequel deux suites (une minorante, l'autre majorante) dont l'écart tend vers zéro "attrapent" à tout coup un nombre.

D. Facilités d'emploi (point de vue mesure et utilisation)

1. ***Pour mesurer, on a besoin :***

- d'un ensemble de nombres (prolongeant **N**),
- de l'ordre, de l'addition, de la multiplication sur cet ensemble,
- de quelques qualités algébriques et topologiques : avoir des inverses, la densité, les "valeurs intermédiaires" (exemple : l'aire d'un carré croît de 4 à 9 quand le côté croît de 2 à 3, on aimerait, quand l'aire du carré vaut 6, avoir une valeur pour le côté).
- d'un ensemble de nombres facile à utiliser.

2. ***Parmi les extensions de N citées ci-dessus :***

- **R** a les meilleures propriétés, mais est difficile d'emploi.
- **D** est loin d'être parfait (l'inverse d'un décimal est rarement un décimal, $\sqrt{6}$ n'est pas un décimal...), mais il permet d'approcher d'aussi près qu'on veut l/7, $\sqrt{6}$, π ... et surtout,
- **D** est très facile à manipuler, parce que lié à la numération en base dix (ce qui facilite les calculs et l'accès à l'ordre).

IV - Développement décimal d'une fraction

J'ai choisi de me placer sur le terrain des élèves en utilisant les "nombres à virgule" et la calculette qu'ils affectionnent, pour y perfectionner leurs compétences, tout en raccrochant les ensembles de nombres cités ci- dessus.

A. Calculer $\frac{43}{13}$ avec au moins 40 décimales

La plupart des étudiants « foncent » sur leur calculette, obtiennent immédiatement 7 ou 8 décimales, ne savent pas continuer, et se mettent à calculer à la main, ce qui leur permet d'aboutir. Ce n'est que plus tard, à ma demande, qu'ils réessayent un calcul à la machine.

1. À la main

Techniques de calcul : des questions émergent sur le sens de "abaisser un zéro", établir une table des multiples de 13 est économique vu la longueur des calculs.

2. ***À la Galaxy*** [1]

La touche "béquille" de la division euclidienne permet de calquer la technique manuelle, en faisant la transposition "abaisser un zéro", c'est "multiplier le reste par 10".
J'ose parfois, suggérer d' "abaisser trois zéros à la fois", ou "multiplier le reste par 1000". On obtient alors trois décimales d'un coup, et on peut repérer sur la division à la main le bloc traité d'un coup. Emerveillement garanti, et réflexion intéressante sur la technique de la division.

3. ***Autre calculette***

La difficulté est bien perçue : la machine donne un maximum de décimales, et on ne peut pas continuer pour en avoir plus tant qu'on n'a pas accès "au reste" (au sens de "ce qu'elle a laissé tomber dans son approximation").
Pour retrouver ce reste, certains multiplient naturellement par 13, et retrouvent 43. C'est l'occasion de travailler avec eux sur les chiffres cachés de la machine et la manière de les faire apparaître (en soustrayant la partie entière et en multipliant par dix).
D'autres suspectent la (ou les) dernière(s) décimale(s), ne prennent en compte que la partie conforme à leurs calculs manuels, multiplient par 13, calculent l'écart à 43, et trouvent le reste (sous forme 0,0000007).
On a de toutes façons un travail sur la numération décimale.
Il est intéressant, pour reprendre l'idée d'approximations successives et pour différencier troncature et arrondi, de comparer les premières décimales obtenues avec ce que dit la machine en faisant **FIX l**, puis **FIX 2**, **FIX 3**, **FIX 4**,...

4. ***Conclusion***

L'écriture est périodique, parce qu'on retrouve les mêmes restes, et qu'alors le calcul se déroule de la même façon.

B. Calculer $\frac{43}{13}$

C'est l'occasion de réinvestir les méthodes de calcul à la machine.
L'écriture est périodique, la période est la même (6), les restes sont ceux qui n'apparaissaient pas dans 43/13.
Les plus rapides et courageux calculent d'autres fractions (21/17 ...) et déclarent que c'est toujours périodique parce qu’on retombe toujours sur un reste déjà vu.

C. Contemplations

(feuille jointe annexe 2 : *les fractions 1/n)*

1. ***Où l'on reconnaît les fractions décimales et les autres***

Les fractions décimales sont celles "qui tombent juste", "qui finissent par n'avoir que des zéros" (on les repère, on vérifie que ce sont bien celles dont le dénominateur est $2^p \times 5^q$).

[1] NDLR : Calculatrice de Texas instrument conçue à l’époque pour l’école élémentaire.

Les autres ont une écriture périodique : on le vérifie, on l'explique : "c'est toujours périodique parce qu'on retombe toujours sur un reste déjà vu". (Quasiment tous les étudiants font le travail consciencieusement pour toute la feuille : incrédulité ? besoin de renforcement ?)
On peut affirmer que la période de 1/n est toujours inférieure à n (les restes possibles sont 0, l,..., n-l). Une question est régulièrement soulevée et reste en suspens : peut-on prévoir la longueur de la période en fonction de n ? On peut faire des conjectures, confirmées ou infirmées par l'examen de la feuille. Ce problème est certainement résolu, je n'en connais pas la solution, mais suis avide de m'instruire... (ceci est un appel aux collègues).

2. *Qui dit périodicité dit fraction ?*

Le problème est régulièrement soulevé par les étudiants.
Je le traitais très classiquement sur un ou deux exemples :

x = 2,456456456456456456……..

$$\begin{array}{rl} 2456,456456456456456... & (= 1000\,x) \\ -\quad \underline{2,456456456456456456} & (= x) \\ = 2454 & \end{array}$$

$$999\,x = 2454$$

d'où $$x = \frac{2454}{999}$$

Ceci est perçu comme un tour de passe-passe peu crédible.

3. *"Rareté" relative des décimaux, des fractions et des réels*

Ayant bien colorié leur feuille en cherchant les périodes, les étudiants remarquent que les décimaux sont de plus en plus "rares" parmi les fractions.
Je me garde bien de parler du cardinal de **R** et de **Q** (personne ne me croirait). Par contre, j'en profite pour glisser qu'une suite illimitée de décimales tout à fait banale, sans rien de remarquable du point de vue de la période, est un réel non fractionnaire, et que donc les fractions sont rarissimes parmi les réels (ce qu'ils imaginent volontiers, vu sous cet angle, alors qu'ils ne sont capables de citer que très peu de réels non rationnels).

V - Approximations décimales et rationnelles de π

A. Chasse aux décimales (un peu d'histoire)

Voir l'article paru dans "Tangente" n° 12 (1989)

B. Activités avec calculette

Extraites de "Aventures avec votre calculateur" L. Rade et B. A. Kaufman Cedic 1979. *(Voir annexe 3*)

1. ***Les buts visés sont de deux ordres :***
- fréquenter des suites ou des séries qui convergent plus ou moins rapidement, des approximations décimales ou rationnelles.
- pratiquer le calcul numérique (organiser les calculs, connaître les touches et les priorités de sa machine, utiliser les mémoires...).

2. ***Formes du travail***
C'est l'occasion d'un travail "à la carte": chacun selon ses capacités et celles de sa machine se lance dans les activités de son choix. J'interviens localement, à la demande.

3. ***Commentaires sur les activités***
La **question a** permet de pointer, parmi les 7 ou 8 décimales obtenues à la calculette pour chaque fraction, celles qu'on peut retenir pour π :
$3 + 10/71 = 3{,}1408445$
$3+ 1/7 = 3{,}1428571$
$\pi = 3{,}14...$
Ce sont celles qui sont communes aux deux.
Travail sur encadrement et approximation.

Question b :
Travail sur le "sens" de la formule des (b_i) et la prise en compte des priorités de la machine.
Organisation des calculs, utilisation de la touche mémoire pour éviter des recopies (on débouche sur une suite algorithmique de touches à taper).
Avec les calculettes actuelles, même sommaire, je n'ai pas rencontré de suites qui cessaient de converger (possibilité évoquée par L. Rade).

La **question c** est du même genre que la b. Les calculs sont plus simples à comprendre. Une calculatrice à deux registres de mémoire serait la bienvenue pour "croiser" les suites. Les étudiants qui ont « tâté » de la question b laissent tomber celle-ci (elle peut cependant intéresser un virtuose bien équipé).

Question d : pas de difficulté de compréhension ou de calcul. La première série converge avec une lenteur remarquable et désespérante.

Question e : il est plus intéressant de rechercher des approximations rationnelles de π (ou π^2, ou $\sqrt{\pi}$) que de faire des constats. Méthode : rechercher parmi les multiples de π (ou π^2, ou $\sqrt{\pi}$) ceux qui sont "presque entiers" (NB : on prend le π de la calculette). Il faut déterminer ce qu'on choisit d'appeler "presque entier". On peut regarder toutes les décimales fournies, ou utiliser **FIX.** On trouve
$7\pi = 22$ (d'où l'approximation 22/7) et quelques autres (dont $14\pi = 44$, bien sûr).

Annexe 1 : Le test proposé aux étudiants
Dominique Valentin, Marianne Frémin, février 1992

1. Parmi ces nombres, quels sont les nombres décimaux ? Pourquoi ?

0,33	2,4758	$\frac{1}{4}$	33,14	$\frac{22}{7}$
$\frac{427}{10}$	- 4	$\frac{40}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\sqrt{2}$
$\frac{1}{3}$	π	7,0	$\frac{117}{125}$	$\frac{117}{3}$

17,999... (infinité de 9)

2. Mettre sous forme d'écriture « à virgule », quand c'est possible.

$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{22}{7}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{35}{100}$
$\frac{3}{100}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{111}{37}$	

3. Comment reconnaître qu'une fraction désigne un décimal ?

4. Parmi les écritures suivantes, regrouper celles qui désignent un même nombre. Justifier.

$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{22}{7}$	$\frac{810}{1000}$	$\frac{44}{14}$	$\frac{81}{100}$	$\frac{355}{113}$	$3 + \frac{1}{7}$	0,810
π	3,14	8,10	$6 \div 10$	0,33	3,140	0,81		

regroupement	justification

5. Compléter le tableau.

	0,03	47,2725			
$\times$ 100	1485		13	3,271	

6. Les nombres sont rangés dans l'ordre croissant.

a) Placer 3,245 parmi

2,9	3	3,1	3,2	3,3	3,4

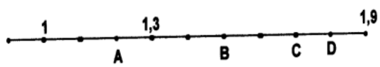
b) Placer 0,027 et 7,32 parmi

0,001	0,01	0,1	1	1,1	10	100

7. Quel nombre décimal inférieur à 6 est le plus proche de 6 ?

8. Combien de décimaux y a-t-il entre 1 et 2 ?
Et entre 1000 et 1001 ?

9.Quels nombres correspondent aux points A, B, C et D ?
Placer le point E correspondant au nombre 1,55



10. Trouver un nombre entre 12,09 et 12,1 qui soit « juste au milieu » (c'est-à-dire dont l'écart à 12,09 et à 12,1 soit le même).

11. Trouver un nombre entre 1,1 et 1,01 qui soit « juste au milieu » (c'est-à-dire dont l'écart à 1,1 et à 1,01 soit le même).

12. Compléter le tableau suivant :

écriture à virgule	avec puissance de 10	écriture « calculette »
42,53	4253×10^{-2}	4,253 E1
	37×10^{3}	
0,8152		
27,1		
	1×10^{-4}	
		3,14E-5

colonne 2 : un entier multiplié par une puissance de 10

colonne 3 : un nombre entre 1 et 10 multiplié par une puissance de 10

13. Effectuer les opérations suivantes :

$29 + 17{,}09 + 132{,}8$ $109 \times 5{,}66$ $4{,}13 - 2{,}844$

$4{,}8 \times 3{,}08$ $38 - 2{,}43$ $27 + 0{,}005$ $1{,}03 \times 1{,}03$

Annexe 2 : Les fractions $\frac{1}{n}$

1/2 = 0,50000000000000000000000000000000000000000000000…………..
1/3 = 0,3333333333333333333333333333333333333333333333…………….
1/4 = 0,2500000000000000000000000000000000000000000000…………..
1/5 = 0,20000000000000000000000000000000000000000000……………..
1/6 = 0,166666666666666666666666666666666666666666666……..
1/7 = 0,142857142857142857142857142857142857142857142857142857……..
1/8 = 0,1250000000000000000000000000000000000000000……………
1/9 = 0,1111111111111111111111111111111111111111111…………..
1/10 = 0,10000000000000000000000000000000000000000000…….
1/11 = 0,090909090909090909090909090909090909090909090909090…..
1/12 = 0,9090909090909090909090909090909090909090909090909……
1/13 = 0,76923076923076923076923076923076923076923076923076923…
1/14 = 0,71428571428571428571428571428571428571428571428571428…
1/15 = 0,066666666666666666666666666666666666666666………………
1/16 = 0,06250000000000000000000000000000000000000000000………
1/17 = 0,0588235294117647058823529411764705882352941176470…..
1/18 = 0,055555555555555555555555555555555555555555555……….
1/19 = 0,05263157894736842105263157894736842105263157894736…….
1/20 = 0,0500000000000000000000000000000000000000000000………..
1/21 = 0,047619047619047619047619047619047619047619047619……..
1/22 = 0,04545454545454545454545454545454545454545454545………
1/23 = 0,04347826086956521173913043478260869565211739130……….
1/24 = 0,04166666666666666666666666666666666666666666666………
1/25 = 0,04000000000000000000000000000000000000000000000………
1/26 = 0,03846153846153846153846153846153846153846153846………
1/27 = 0,0370370370370370370370370370370370370370370370………
1/28 = 0,0357142857142857142857142857142857142857142857………
1/29 = 0,034482758620689655172413793103448275862068965………..
1/30 = 0,033333333333333333333333333333333333333333333………….
1/31 = 0,032258064516129032258064516129032258064516129032……….
1/32 = 0,031250000000000000000000000000000000000000000000………
1/33 = 0,030303030303030303030303030303030303030303030303030……
1/34 = 0,029411764705882302941176470588230294117647058823……..
1/35 = 0,02857142857142857142857142857142857142857142857……….
1/36 = 0,0277777777777777777777777777777777777777777777……….
1/37 = 0,0270270270270270270270270270270270270270270270………
1/38 = 0,026315789473684210526315789473684210526315789473…….
1/39 = 0,025641025641025641025641025641025641025641025641…….
1/40 = 0,025000000000000000000000000000000000000000000000…….
1/41 = 0,024380243902439024390243902439024390243902439024…….
1/42 = 0,0238095238095238095238095238095238095238095238………
1/43 = 0,0232558139534883720930232558139534883720930232……..
1/44 = 0,02272727272727272727272727272727272727272727………..

1/45 = 0,02222222222222222222222222222222222222222222………
1/46 = 0,021739130434782608695652173913043478260869565…….
1/47 = 0,02127659574468085106382978723404255319148936……..
1/48 = 0,02083333333333333333333333333333333333333333……….
1/49 = 0,02040816326530612244897959183673469387755……………
1/50 = 0,02000000000000000000000000000000000000……………..
1/51 = 0,01960784313725490196078431372254901960784………………
1/52 = 0,019230769230769230769230769230769230769230769230……..
1/53 = 0,018867924528301886792452830188679245283018867924………..
1/54 = 0,0185185185185185185185185185185185185185185185185………..
1/56 = 0,01785714285714285714285714285714285714285714285714…………
1/57 = 0,017543859649122807017543859649122807017543859……………
1/58 = 0,017241379310344827586206896551724137931034482758……………
1/59 = 0,016949152542372881355932203389830508474576271………………
1/60 = 0,016666666666666666666666666666666666666666666……………
1/61 = 0,016393442622950819672131147540983606557377049180……………
1/62 = 0,0161290322580645161290322580645161290322580645161………….
1/63 = 0,015873015873015873015873015873015873015873015873015………
1/64 = 0,01562500000000000000000000000000000000000……………………
1/65 = 0,0153846153846153846153846153846153846153846……………..

1/9 = 0,11111111111111111111111111111111111111111111111111…………
2/9 = 0,2222222222222222222222222222222222222222222222222222……..
3/9 = 0,333333333333333333333333333333333333333333333333333…………
4/9 = 0,4444444444444444444444444444444444444444444444444444………

1/99 = 0,010101010101010101010101010101010101010101010101010……..
2/99 = 0,020202020202020202020202020202020202020202020202020………
3/99 = 0,03030303030303030303030303030303030303030303030303…………
4/99 = 0,0404040404040404040404040404040404040404040404040404……..
5/99 = 0,05050505050505050505050505050505050505050505050505……..
6/99 = 0,06060606060606060606060606060606060606060606060606……
7/99 = 0,0707070707070707070707070707070707070707070707070……..
8/99 = 0,080808080808080808080808080808080808080808080808080…….
9/99 = 0,090909090909090909090909090909090909090909090909090……
10/99 = 0,1010101010101010101010101010101010101010101010…………
11/99 = 0,1111111111111111111111111111111111111111111111111……..
12/99 = 0,121212121212121212121212121212121212121212121212…….
13/99 = 0,13131313131313131313131313131313131313131………………
14/99 = 0,141414141414141414141414141414141414141414141………….
15/99 = 0,151515151515151515151515151515151515151……………….
16/99 = 0,161616161616161616161616161616161616161616…………….

1/999 = 0,00100100100100100100100100100100100100…………………
2/999 = 0,0020020020020020020020020020020020020020…………….
3/999 = 0,003003003003003003003003003003003003003003003………..

4/999 = 0,00400400400400400400400400400400400400400……………..
5/999 = 0,0050050050050050050050050050050050050050050050………..
6/999 = 0,00600600600600600600600600600600600600600600600600………
7/999 = 0,0070070070070070070070070070070070070070070070070……..
8/999 = 0,0080080080080080080080080080080080080080080080080…………
9/999 = 0,0090090090090090090090090090090090090090090090090…………
10/999 = 0,0100100100100100100100100100100100100100100100……………
11/999 = 0,0110110110110110110110110110110110110110110110110………
12/999 = 0,012012012012012012012012012012012012012012012012012……
13/999 = 0,01301301301301301301301301301301301301301301301301………
14/999 = 0,0140140140140140140140140140140140140140140140140………
15/999 = 0,0150150150150150150150150150150150150150150150150……..
16/999 = 0,0160160160160160160160160160160160160160160160160………
314/999 = 0,31431431431431431431431431431431431431431431……………..

Un nombre se présente sous forme d'écriture périodique : peut-on trouver une fraction qui lui est égale ?
Si la période commence juste après la virgule, la liste ci-dessus laisse deviner une solution :
0,4546456456456456456... = 456/999
2,4546456456456456456... = 2 + 456/999 et on peut mettre sous forme de fraction 2454/999
Sinon, on peut se ramener au cas précédent :
12,34565656565656565656565656... = 12,34 + 0,01 × 0,565656565656...
= 1234/100 + 1/100 × 56/99

Annexe 3 : Le nombre π

Extrait de « Aventure avec votre calculateur » I. Rade et B.A. Kaufman Cedic 1979

Si la longueur du diamètre d'un cercle est 1, alors la longueur de sa circonférence est π.

Si la longueur du rayon d'un cercle est 1, alors la mesure de son aire est π.

Le réel π est l'un des nombres les plus fameux en mathématique. Vous pourrez lire 1'histoire fascinante de ce nombre dans le livre de D.E.SMITH, *History of Mathematic.5.* Volume II (New-York Dover Publications. 1958).

Voici une approximation de π avec 35 décimales :

$\pi \approx$ 3,14159265358979323846264338327950288

Cette approximation a été calculée par Ludolf Van CEULEN (1540-1610) qui était à partir de 1600, professeur de génie militaire à l'université de Leyden en Hollande. Cette approximation a été gravée sur sa tombe.

a) Approximation d'Archimède

Le mathématicien grec Archimède (287-212 av. J.C.) a montré que :

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$

II a trouvé ces approximations en utilisant deux polygones réguliers de 96 côtés. respectivement circonscrit et inscrit dans un cercle.

Calculez des approximations décimales de $3 + \frac{10}{71}$ et $3 + \frac{1}{7}$.

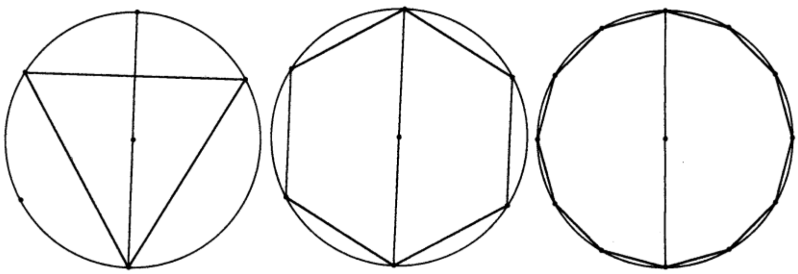
Déterminez jusqu'à quel ordre le résultat d'Archimède donne un renseignement exact sur π.

Déterminez aussi la moyenne de ces approximations décimales et dites si on a amélioré ainsi la précision sur π.

b) La méthode d'Archimède pour approximer π

Considérez un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de diamètre 1. Comme nous l'avons signalé plus haut, la longueur de ce cercle est π, et ainsi le périmètre du triangle équilatéral est une approximation de π.

Si vous considérez alors la suite constituée par les polygones réguliers de 6 côtés, de 12 côtés, etc. les périmètres de ces polygones sont des approximations de plus en plus précises de π.



Cette méthode qui consiste à trouver des approximations de plus en plus fines de π peut être décrite de la manière suivante (nous ne donnons pas ici de démonstration) : on construit trois suites (a_i), (b_i) et (x_i) avec :

1) $a_1 = 3$ et $b_1 = 1$ avec $x_1 = a_1 b_1$

2) $a_2 = 2a_1$ et $b_2 = \dfrac{b_1}{\sqrt{2+\sqrt{4+b_1^2}}}$ avec $x_2 = a_2 b_2$

3) $a_3 = 2a_2$ et $b_3 = \dfrac{b_2}{\sqrt{2+\sqrt{4+b_2^2}}}$ avec $x_3 = a_3 b_3$

plus généralement:

4) $a_{n+1} = 2a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{b_n}{\sqrt{2+\sqrt{4+b_n^2}}}$ avec $x_{n+1} = a_{n+1}b_{n+1}$

La suite (x_i) donne des approximations de plus en plus fines de π.
En calculant x_1 , x_2 , x_3 ,…, x_{10} , déterminez les dix premières approximations de π.
Si votre calculateur ne vous permet pas de calculer avec plus de 8 décimales, vous allez trouver quelque chose de particulier au cours des calculs. Nous en dirons plus à ce sujet dans les commentaires.

c) Méthode de CUSANUS pour approximer π

Le philosophe, théologien et mathématicien allemand Nicolaus CUSANUS (1401-1464) a mis en évidence une méthode simple pour approximer π. Sa méthode est basée sur l'étude d'une suite de polygones réguliers de périmètre 2. Voici une description de cette méthode :

1) $a_1 = \frac{1}{4}$ et $b_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$ On a : $\frac{1}{b_1} < \pi < \frac{1}{a_1}$

2) $a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$ et $b_2 = \sqrt{b_1 a_2}$ On a : $\frac{1}{b_2} < \pi < \frac{1}{a_2}$

3) $a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + b_2)$ et $b_3 = \sqrt{b_2 a_3}$ On a : $\frac{1}{b_3} < \pi < \frac{1}{a_3}$

plus généralement :

4) $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ et $b_{n+1} = \sqrt{b_n a_{n+1}}$ On a : $\frac{1}{b_{n+1}} < \pi < \frac{1}{a_{n+1}}$

Déterminez $\frac{1}{b_{10}}$ et $\frac{1}{a_{10}}$ et trouvez ainsi un encadrement de π.

d) ***Séries infinies et π***

Nous pouvons aussi obtenir des approximations de π en calculant la somme d'un nombre fini de termes de certaines séries dont la somme est π.

Ainsi, par exemple, on peut établir que $\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - ...\right)$

Et $\pi = \sqrt{12}\left(1 - \frac{1}{3 \times 3} + \frac{1}{3^2 \times 5} - \frac{1}{3^3 \times 7} + ...\right)$

Essayez de calculer des approximations de π en utilisant ces séries.

La formule suivante, cependant, est bien meilleure pour obtenir des approximations de π :

$$\pi = 16\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \times 5^3} + \frac{1}{5 \times 5^5} - \ldots\right) - 4\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \times 239^2} + \frac{1}{5 \times 239^5} - \ldots\right)$$

Elle porte le nom de formule de MACHIN.

Utilisez cette formule pour calculer des approximations de π.

e) ***Approximations rationnelle. de π***

Archimède a trouvé les approximations suivantes de π :

$\frac{22}{7}$ et $\frac{223}{71}$ (Les nombres $\frac{22}{7}$ et $\frac{223}{71}$ sont *rationnels* alors que le nombre π est *irrationnel).*

L'ingénieur chinois TSU CH'UNG-GHIH (430-501) a trouvé une remarquable approximation rationnelle $\frac{355}{113}$.

En utilisant votre calculateur essayez de trouver d'autres approximations rationnelles de π. Pour chacune d'entre elles, trouvez jusqu'à quelle décimale votre approximation est en accord avec le développement décimal de π.

f) ***L'approximation de RAMANUJAN***

En 1914, le mathématicien indien RAMANUJAN a donné l'approximation curieuse de π :

$$\sqrt{\sqrt{\frac{2143}{22}}} = \left(\frac{2143}{22}\right)^{\frac{1}{4}}$$

En d'autres termes, $\frac{2143}{22}$ est une approximation rationnelle de π^4.

Vous pouvez trouver des approximations analogues de π à l'aide de votre calculateur. Pour chacune d'entre elles, trouvez jusqu'à quelle décimale votre approximation est en accord avec le développement décimal de π.