La division en formation initiale

Hervé Péault - Denis Butlen

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - Angers 1995.

Il s'agit d'un plan de cours, principalement sur la division euclidienne dans N, destiné à des étudiants de première année de formation professionnelle à l'enseignement des mathématiques pour des élèves de 8 à 11 ans.
Il a toujours une pleine actualité.

Ce plan de cours reprend et développe la progression proposée par Hervé Péault dans les actes du colloque COPIRELEM de Rouen [8]. Il essaie également de traiter ce thème dans la perspective de la préparation au concours de première année. Il reste que nombre des activités proposées peuvent s'adapter à d'autres contextes, tant de formation initiale que de formation continue.

Nous proposons une suite d'activités qui forment un tout mais il est rare que les durées de formation imparties puissent permettre de tout traiter intégralement. Des adaptations seront donc toujours nécessaires.

Certaines activités, notamment les deux premières, peuvent d'ailleurs être proposées dans d'autres contextes que celui de l'étude de la division.

Objectifs généraux

- Rappel de certains concepts mathématiques autour de la division, euclidienne ou non,

- Analyse des problèmes de division et des procédures de résolution,

- Étude de notions élémentaires de didactique,

- Apport d'éléments d'information permettant la construction et l'analyse de séquences à l'école élémentaire.

Première situation
"Concertum"[1]

Objectifs

- Faire apparaître l'utilisation de la division comme procédure experte pour la résolution d'un problème.

- Donner du sens, à partir de l'analyse d'une activité, à des notions de didactique telles que dialectiques de l'action, de la formulation, de la validation, de l'institutionnalisation.

Remarque

Cette situation peut aussi être utilisée facilement en dehors de l'étude de la division. L'intérêt qu'elle suscite généralement, l'engagement des participants, le travail d'équipe qu'elle nécessite, les débats qu'elle fait surgir, les rétroactions qu'elle provoque, ... en font une situation riche et intéressante comme point de départ à une réflexion plus générale sur les problèmes d'apprentissage.

Matériel

Pour chacun des participants : 10 cartons numérotés de 0 à 9 (et au-delà si on veut utiliser certains prolongements du jeu), de la taille de cartes à jouer (type bristol). Chacun tiendra ses cartons en main comme pour un jeu de cartes.

Au cours du jeu, chaque joueur sera amené à choisir un nombre de 0 à 9 et manifestera son choix en sélectionnant puis en montrant l'une de ses cartes. On peut adopter aussi un autre dispositif sans ce matériel : lorsqu'un joueur choisit un nombre, il l'écrit sur une feuille de papier et c'est la feuille qui sera montrée.

---

[1] Nous reprenons ici le titre ***Concertum*** donné à cette activité dans ***Jeux 2 : Jeux et activités numériques*** (Publication APMEP n°59, coordonnée par H.Péault, 1985).

Il semble qu'elle soit connue depuis longtemps et attribuée à un professeur d'informatique, Michel LUCAS, qui l'utilisait dans le cadre de formations informatiques pour étudier les algorithmes correspondant aux stratégies retenues.

Suzy GAIRIN-CALVO et Joël BRIAND y ont aussi fait référence en formation d'instituteurs sous le nom *Le compte est bon collectif* dans les Actes du Colloque COPIRELEM d'Angers de mai 1987.
Certains éléments d'analyse proposés par Joël Briand ont d'ailleurs été repris ici.

Organisation

Les étudiants sont par équipes de 3. Si le nombre de participants n'est pas un multiple de 3, on peut faire jouer un rôle par deux personnes à la fois, celles-ci effectuant les choix chacune leur tour. Il peut aussi être intéressant de confier à une ou deux personnes le rôle d'observateur des stratégies des différentes équipes.

Le choix préalable d'équipes de 3 nous a paru le plus intéressant pour la diversité des stratégies, mais on pourrait aussi commencer avec des équipes de 4, voire plus.

Présentation du jeu

Lorsque chaque joueur a bien ses cartes en main, le professeur donne la consigne suivante (éventuellement en la mimant pour faciliter la compréhension).

> *Je vais vous proposer un nombre entier, que j'appellerai "nombre-cible". Chacun choisira un carton et un seul, et l'objectif de chaque équipe sera que les 3 cartons choisis par les différents membres de l'équipe aient pour somme le nombre-cible.*
> *Faisons un premier essai. Dans quelques instants je vais vous indiquer un nombre. Êtes-vous prêts ?*

Cette dernière question peut laisser penser qu'il faut être prêt tout de suite. On peut la remplacer par *"Indiquez-moi quand vous êtes prêts"* qui laisse entendre qu'il y a "quelque chose à préparer".

L'enjeu est ici de comprendre qu'il va falloir, dans chaque équipe, se concerter préalablement au jeu et que, sinon, le jeu est un jeu de hasard qui n'a pas d'intérêt. En ce sens, la façon de poser la question, le ton, l'attitude du professeur... vont déterminer fortement le comportement des étudiants.

Il arrive que, malgré un certain scepticisme, les joueurs se déclarent tout de suite prêts. Après un, voire plusieurs essais, évidemment infructueux, ils finissent par demander l'autorisation de se concerter au préalable.

Le plus souvent, deux questions sont posées d'emblée par les participants : "Est-ce *qu'on peut se concerter ?"*, question à laquelle il est évidemment répondu par l'affirmative, et *"Est-ce que le nombre-cible peut être n'importe quel nombre ?"*, question à laquelle il n'est pas nécessaire de répondre et qu'on peut retourner. Un court débat entre les participants convainc en général assez vite que les nombres-cibles ne peuvent être choisis que parmi les naturels de 0 à 27.

Phase 1

Le professeur propose quelques essais (diversifier le choix des nombres-cibles à la fois entre petits et grands nombres, ainsi qu'entre multiples et non multiples de 3). Lorsque chaque équipe montre ses cartons, il fait vérifier par les autres le résultat obtenu.

Il y a de temps en temps des erreurs, soit que la stratégie de l'équipe soit incorrecte, soit plus souvent que l'un des joueurs l'ait mal comprise. Il est fréquent que des équipes utilisent une stratégie valable pour tous les nombres sauf 26 (cf. analyse des procédures ci-après). Il est donc conseillé de ne proposer 26 comme nombre-cible qu'après plusieurs essais.

En cas de difficulté, le professeur informe que chaque équipe peut demander un temps mort pour une nouvelle concertation.

Cette phase s'arrête lorsque toutes les équipes commencent à fournir des choix corrects.

Phase 2

Le professeur donne la consigne suivante

> *Dans chaque équipe, vous allez prendre un temps de réflexion pour rédiger un message écrit expliquant la stratégie choisie, de la façon la plus claire possible, afin que d'autres soient capables de l'utiliser. Les messages rédigés seront ensuite échangés entre les équipes, et nous jouerons à nouveau, chaque équipe devant obligatoirement utiliser la stratégie indiquée sur le message reçu.*
>
> *Sur vos messages, il n'est pas nécessaire de réécrire la règle du jeu, tout le monde la connaît maintenant. Vous devez par contre indiquer clairement le rôle de chacun des membres de l'équipe. Attention : il ne s'agit pas de mettre les autres en difficulté. Au contraire, les messages doivent simplifier au maximum la tâche des récepteurs.*

Lorsque toutes les équipes ont terminé leur rédaction, chacune donne son message à une autre équipe. Chaque équipe est alors invitée à se concerter de façon à pouvoir jouer en utilisant la stratégie décrite sur le message reçu. Si certains messages sont jugés insuffisamment compréhensibles, il est possible de demander des éclaircissements aux rédacteurs, mais uniquement par écrit.

Quand tout le monde est prêt, on joue à nouveau, chaque équipe devant obligatoirement utiliser la stratégie décrite sur le message reçu. Lorsque les cartons sont levés, chaque équipe vérifie que les utilisateurs de sa stratégie l'ont correctement utilisée. Les éventuelles contestations entament la phase suivante.

Phase 3

Chaque équipe doit essayer de deviner et formuler la stratégie utilisée par les autres. Pour cela, ce n'est plus le professeur qui propose les nombres-cibles, mais les étudiants.

Chaque stratégie fait l'objet d'un débat où sont examinés sa pertinence, sa commodité d'utilisation, ainsi que la clarté des messages associés.

Comme amorce aux phases suivantes, le professeur propose de débattre les questions

- *y a-t-il une stratégie meilleure que les autres ?*
- *quelles sont les qualités d'une bonne stratégie ?*

Phase 4

Cette phase, comme la suivante, a pour objectif de faire évoluer les stratégies en faisant associer la notion de "bonne" stratégie à celle de stratégie "généralisable". Cette association est parfois formulée naturellement par les étudiants, mais il peut aussi être nécessaire que le professeur la provoque.

Le même jeu est repris, mais avec cette fois des équipes de 4 (ou de 5, ou de 6, ou de 7, ... suivant le nombre de personnes du groupe), l'intervalle des nombres-cibles possibles variant en conséquence.

Phase 5

Cette phase se déroule toujours avec le même jeu et les mêmes groupes, mais cette fois on n'utilise que les cartons de 0 à 7 (on peut aussi utiliser des cartons de 0 à p avec p > 9).

A la fin, c'est tout le groupe d'étudiants qui forme une seule équipe et doit se concerter pour jouer, une première fois avec les cartons de 0 à 9, une seconde fois avec les cartons de 0 à 7.

A ce stade, c'est habituellement la procédure décrite en n° 1 ci-après qui est retenue. La dernière phase aura pour objectif de faire formuler cette procédure dans le cas le plus général.

Phase 6

Le professeur donne à chercher le problème suivant :

> *On dispose des cartons de 0 à p ; les joueurs sont par équipes de k joueurs ; le nombre choisi est n ; explicitez dans ce cas la stratégie que vous avez retenue dans la phase précédente.*

Ce travail s'avère parfois difficile et il peut d'ailleurs être différé à une prochaine séance pour laisser le temps d'une recherche individuelle. Il se terminera par une écriture précise sur le plan mathématique.

Prolongement
Analyse de l'activité

Invités à réagir sur cette activité, les étudiants posent parfois la question : "peut-on *la faire en classe avec les élèves, et à quel niveau ?".*

D'ailleurs, lorsqu'elle est proposée en formation continue, elle conduit souvent les maîtres de CM ou les professeurs de collège à souhaiter faire l'essai avec leur classe.

Ce souci de transposition ne fait pas partie des objectifs que nous avons retenus, mais il dénote un intérêt sur lequel il est possible de s'appuyer pour analyser l'activité :

> *Qu'est-ce qui vous paraît intéressant dans cette activité ? Du point de vue du fonctionnement intellectuel, comment caractériseriez-vous les différentes étapes ? Si on reprend depuis le départ avec pour objectif la connaissance et la compréhension de la formule élaborée à la fin, quels autres scénarios d'enseignement pourrait-on imaginer ?*

Ce questionnement (ou un autre...) peut être un point de départ pour permettre au professeur de pointer un certain nombre de notions didactiques, de façon plus ou moins développée selon le public.

1) On trouve dans cette activité **différents types de situations**, notamment :

- des **situations d'action** : c'est en particulier le cas dans la première partie où il s'agit de se créer un modèle permettant de résoudre le problème posé. Ce modèle peut être remis en cause en fonction des rétroactions provoquées par les résultats obtenus en appliquant la stratégie retenue.

- des **situations de formulation**: à la fois au début où chaque membre de l'équipe doit faire comprendre son idée aux autres membres (il y a alors souvent mélange de formulations écrites et orales, les formulations orales dominant le plus souvent) puis dans la seconde phase où la pertinence de la formulation est l'objectif explicite.

- des **situations de validation et de recherche de preuve** : dès le début, il y a nécessité d'un débat dans l'équipe, pour faire admettre le bien-fondé d'une stratégie choisie, puis dans les phases suivantes lorsqu'il s'agira d'argumenter sur la pertinence des stratégies proposées, de prouver leur validité et leur performance.

- des **situations d'institutionnalisation :** d'une part lorsque s'opère un choix quant à une stratégie meilleure que les autres, savoir faire reconnu et réutilisable (avec cette réserve, ici, qu'il a peu de chance d'être réutilisé directement en dehors de ce jeu), d'autre part lorsque le modèle de la division est identifié et reconnu pour construire une procédure experte ; cela suppose une nouvelle réorganisation des connaissances, enrichie du sens nouveau donné à la division. La division peut ici être resituée dans le cadre d'une dialectique outil-objet : ayant été étudiée antérieurement comme "objet" de savoir, elle est ici "outil" pour résoudre un problème, ce qui lui permet d'acquérir un sens nouveau et par là même d'être confortée comme "objet" de savoir.

2) Une réflexion sur les **variables didactiques** est par ailleurs intéressante. Ces variables sont ici essentiellement les nombres en jeu : quels choix ont été faits ? Peut-on imaginer que les procédures seraient différentes avec d'autres choix ? Par ailleurs le brusque changement de variable (par exemple lorsqu'on demande de jouer avec tout le groupe des étudiants) amène à abandonner les stratégies les moins performantes **(saut informationnel)**

3) On peut aussi analyser des phénomènes de **contrat didactique.** Au départ, si le professeur ne laisse pas entendre qu'il faut se concerter, les étudiants peuvent penser qu'ils doivent savoir répondre directement puis que ce n'est pas possible ou que c'est l'effet du hasard. Il leur faut rompre ce contrat implicite et comprendre que c'est à eux de trouver les clés qui leur permettront de résoudre ce problème. Ainsi s'opère la **dévolution :** les étudiants ne se sentent plus dans la situation de deviner ce qu'attend le professeur et d'essayer de répondre à ses attentes, mais veulent trouver eux-mêmes une solution. On le voit bien lors des écritures fournies : les étudiants ne se sentent pas obligés de fournir des écritures mathématiques standardisées, reconnues... ils cherchent seulement à se faire comprendre et vont en général à l'économie d'écriture, même les plus matheux (il s'agit là d'un point qui peut sensibiliser très fortement les étudiants au problème du statut de l'écrit mathématique dans la classe). La recherche de la stratégie et la recherche de l'écriture sont des **situations a-didactiques,** c'est-à-dire que l'étudiant se saisit du problème sans essayer de comprendre les intentions didactiques de celui qui l'a posé.

Dans les situations d'enseignement, la dévolution d'une situation a-didactique peut ne pas s'opérer, compromettant ainsi l'apprentissage soit que les élèves ne cherchent qu'à repérer des indices permettant de deviner la bonne réponse qu'attend le maître, soit qu'ils mettent en place des stratégies de contournement pour s'assurer de répondre "juste". Un exemple nous en a été fourni par un maître d'une classe de SES qui avait proposé le jeu du *Concertum* à ses élèves. La première phase semblait bien fonctionner et les réussites étaient fréquentes. Lorsqu'il prit connaissance des messages, il eut la surprise de voir que, dans une large majorité, ils étaient rédigés dans des termes à peu près semblables du type "il y en *a un qui calcule et qui fait des signes aux autres pour qu'ils mettent leurs nombres"* ou, plus laconiquement : "on *triche, sans se faire voir..."* L'absence même de gêne, de la part des élèves qui fournissaient ces messages, montre bien à quel point le seul enjeu perçu par eux était celui de donner une réponse "juste".

Inventaire de quelques procédures

Appelons n le nombre-cible. Certaines procédures reviennent assez fréquemment lors de la première phase de jeu (nous nous situons ici dans le cas d'équipes de 3 joueurs avec des cartons de 0 à 9). Elles nécessitent l'identification de chaque joueur et de son rôle. Les désignations le plus souvent choisies sont A, B, C,... L'intérêt d'une numérotation avec les entiers, du type A1, A2, A3,... n'apparaît pas avec des équipes de 3 ou de faible effectif. Cette numérotation devient quasi indispensable avec tout le groupe.

1) Utilisation de la division par 9

C'est la procédure qui sera le plus souvent retenue à la fin comme la plus performante. Elle consiste à diviser n par 9. On obtient n = 9q + r. Les q premiers joueurs jouent 9, le suivant r, les autres éventuels jouent 0.

Elle est rarement exprimée ainsi, en tous cas au début. On trouve plutôt des formulations du type suivant (avec parfois des discussions sur le choix des bornes)

- *entre 0 et 9, le joueur A indique n, les joueurs B et C indiquent 0.*
- *entre 9 et 18, le joueur A joue 9, le joueur B joue n - 9 et C joue 0 .*
- *entre 18 et 27, A et B jouent 9 et C joue n-18.*

Comme nous l'avons signalé, c'est la procédure qui, dans la plupart des cas, sera reconnue comme la plus facilement généralisable. Avec k joueurs et des cartons de 0 à p, il suffit de faire la division euclidienne de n par p, ce qui donne n = pq + r. Les q premiers joueurs jouent p, le joueur de rang q + 1 joue r et les autres jouent 0. Le nombre k n'intervient pas dans les calculs, mais seulement pour la détermination de l'intervalle des nombres-cibles possibles.

La principale difficulté de cette généralisation vient ici de la nécessité de numéroter les joueurs et, pour chacun d'eux, de situer son numéro par rapport à q.

A la fin de la phase 5, il arrive que cette généralisation soit retenue sans référence à la division, par découpage d'intervalles : au joueur A on attribue l'intervalle de 0 à 9, au joueur B de 10 à 18, au joueur C de 19 à 27, etc. Le rôle de chacun est alors défini selon que le nombre-cible est avant, dans, ou après l'intervalle.

Dans ce cas, pour faire expliciter la démarche de division, le professeur peut aborder la phase 6 avec un exemple numérique sur de grands nombres et en proposant une numérotation des joueurs. On supposera par exemple qu'il y a 127 joueurs numérotés de 1 à 127 avec 845 comme nombre-cible. La question posée est : *chaque joueur connaît son numéro, quel calcul doit-il faire pour choisir son carton ?*

2) Utilisation de la division par 3

On divise n par 3, ce qui donne $n = 3q + r$.

Si $r = 0$, chaque joueur joue q ; si $r = 1$, deux joueurs jouent q et un autre $q + 1$; si $r = 2$, un joueur joue q et les deux autres $q + 1$.

Il arrive assez fréquemment, lorsque cette procédure est retenue, qu'un seul joueur soit chargé des "correctifs" et doive donc jouer $q + 1$ si $r = 1$, mais $q + 2$ si $r = 2$, les autres jouant tous deux q. Il est utile pour le professeur d'identifier cette forme car elle marche toujours, sauf pour $n = 26$.

Cette procédure est elle aussi généralisable. Avec k joueurs et des cartons de 0 à p, on fait la division euclidienne de n par k, ce qui donne $n = kq + r$. Les r premiers joueurs jouent $q + 1$ et les autres q. Le nombre p n'intervient pas dans les calculs, mais seulement pour la détermination de l'intervalle des nombres possibles.

Là encore, la plus grande difficulté d'utiliser cette procédure généralisée vient de la nécessité de numéroter les joueurs.

3) Autres procédures

Diverses autres procédures peuvent apparaître, plus ou moins difficiles à généraliser. Par exemple :

a) utilisation de la parité

- si $n \leq 18$
  - si n est pair, A et B jouent $n/2$, C joue 0.
  - si n est impair, A et B jouent $(n - 1)/2$, C joue 1.
- si $n > 18$
  - A et B jouent 9 et C complète.

b) délimitation de tranches autonomes

La procédure ci-dessus peut être considérée comme un cas particulier de cette catégorie. Elle consiste à découper l'intervalle [0 ; 27] en sous-intervalles et à définir une règle sur chacun de ces sous-intervalles, ces règles pouvant être sans rapport entre elles.

Très souvent, les intervalles choisis sont liés à la numération et on trouve fréquemment une règle pour les nombres inférieurs à 10, une autre pour les nombres de 10 à 20 et une troisième au-delà de 20.

c) Constitution d'une table

C'est encore un cas particulier du cas précédent. On envisage non seulement des intervalles, mais tous les nombres possibles et on définit le rôle de chaque joueur pour chacun d'eux. On pourrait imaginer des répartitions totalement arbitraires pour chaque nombre. En réalité les tables choisies sont souvent constituées entièrement ou partiellement à partir de l'une des deux premières procédures décrites. Mais celles-ci restent au départ implicites, l'explicitation pouvant se faire progressivement.

Remarque

Il n'est pas sans intérêt de mettre en relation, d'une part les deux premières procédures décrites, division par 9 (p dans le cas général) et division par 3 (k dans le cas général), et d'autre part l'analyse des situations de division proposée plus loin. L'exemple pourra être repris lors de cette étude.

On peut dire ainsi que

- la procédure de division par 9 correspond à une représentation en termes de **division - quotition** : chaque joueur choisit 9 (ou p) et le problème est de savoir pour un nombre-cible n donné, combien de joueurs devront intervenir :

$$\begin{array}{r|l} 1 & 9 \\ ? & n \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 1 & p \\ ? & n \end{array}$$

- la procédure de division par 3 correspond à une représentation en termes de **division-partition** : 3 (ou k) joueurs cherchent à obtenir n à parts égales et il s'agit de savoir combien chacun doit jouer :

$$\begin{array}{r|l} 1 & ? \\ 3 & n \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 1 & ? \\ k & n \end{array}$$

Dans les deux cas, la difficulté vient du fait qu'on n'utilise pas des réels ni même des décimaux, mais des entiers : il faut se situer dans le cadre de la division euclidienne et interpréter le reste éventuel en termes de jeu "décalé" pour l'un des joueurs.

Deuxième situation "La course à 20"

Cette activité a été décrite et étudiée en détail par Guy Brousseau. Initialement, elle visait à introduire avec les élèves l'algorithme de la division : « *La course à n et les leçons qui la suivent tendent à remplacer toutes les soi-disant explications et justifications, qui alourdissent, sans le rendre plus efficace, l'apprentissage de la division »*[2] .

Mais cette activité a aussi l'intérêt d'être une situation riche qu'on peut analyser dans le cadre de la théorie des situations.[3]

Elle nous paraît intéressante à utiliser en formation. Outre ses liens avec la division, elle est l'occasion de revenir sur divers concepts de didactique.

Objectifs

- Faire apparaître l'utilisation de la division comme procédure experte pour définir une stratégie gagnante d'un jeu.

- Donner du sens, à partir de l'analyse de l'activité, à des notions de didactique, en particulier dialectiques de l'action, de la formulation, de la validation, de l'institutionnalisation, notions de situations didactiques et a-didactiques.

Le jeu

Deux adversaires Al et A2 sont en présence. A 1 commence et dit 1 ou dit 2 ; A2 dit le nombre obtenu en ajoutant soit 1 soit 2 au nombre dit par A1 ; A1 à son

---

[2] Guy Brousseau, *"Division euclidienne aux cours élémentaire et cours moyen"* dans *"La mathématique à l'école élémentaire"* (APMEP- 1972)

[3] voir *"Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire"*, cours de G. Brousseau, in "Actes de la première Université d'été des professeurs d'École normale", Olivet, 1988 (publication de l'IREM de Bordeaux). Mais aussi « *Théorie des situations Didactiques* », G.Brousseau 1970-1990 p 25- 44, La pensée Sauvage, 1998 (traduit en anglais et espagnol).

tour dit le nombre obtenu en ajoutant soit 1 soit 2 au nombre dit par A2 ; et ainsi de suite. Le premier qui dit 20 a gagné.

Exemple de partie
(avec gain pour le joueur A2) :

2-**3**-5-**6**-7-**9**- 10-**1l** - 13-**15**- 16-**17-**18-**20**

Ce jeu peut aussi être appelé *"course à 20 de pas* 3" en tant que cas particulier du cas plus général de la *"course à n de pas p" :*

> Soient n et p deux naturels (n < p). Deux adversaires A1 et A2 sont en présence. A1 dit un naturel strictement inférieur à p ; A2 dit le nombre obtenu en ajoutant un nombre strictement inférieur à p au nombre dit par Al ; A1 à son tour dit le nombre obtenu en ajoutant un nombre strictement inférieur à p au nombre dit par A2 ; et ainsi de suite. Le premier qui dit n a gagné.

Ce dernier jeu peut lui-même être considéré comme cas particulier du jeu suivant :

> Soient a_1, a_2 ... a_k, k entiers distincts et n un naturel. Deux adversaires sont en présence. Al dit l'un des a_i ; A2 ajoute l'un des a_i au nombre dit par A1 ; A1 ajoute à son tour l'un des a_i au nombre dit par A2 ; et ainsi de suite. Le premier qui dépasse n a perdu (c'est-à-dire que celui qui dit n a gagné, mais n peut n'être pas atteint).

Tous ces jeux font partie de la catégorie des jeux de NIM. Ils se caractérisent par le fait que toute position possible du jeu est soit gagnante soit perdante avec le sens suivant :

- une **position est gagnante** si toute position suivante est une position perdante,
- une position est **perdante** s'il existe au moins une position gagnante parmi les positions suivantes.

A partir de la position gagnante définie par le but du jeu, une **analyse rétrograde** permet de déterminer de proche en proche les positions gagnantes et les positions perdantes.

Exemple, avec le cas de jeu le plus général et les valeurs suivantes :

n = **30** et k = 3 avec a_l = **2**, a_2 = **3**, a_3 = **6**

- 30 est gagnant ainsi que 29 (ces positions obligent toutes deux l'adversaire à dépasser 30)
- 28 est perdant car la position gagnante 30 peut être atteinte (+2)

- 27 est perdant car une position gagnante peut être atteinte (+2 ou +3)
- 26 est perdant (accès à une position gagnante par +3)
- 25 est gagnant car +2, +3 ou +6 conduisent à une position perdante
- 24 est perdant (+6)
- 23 est perdant (+2 ou + 6)
- 22 est perdant (+3)
- 21 est gagnant car +2, +3 ou +6 conduisent à une position perdante
- 20 est gagnant pour la même raison
- 19 est perdant ainsi que 18, 17
- 16 est gagnant
- 15 est perdant ainsi que 14, 13,
- 12 est gagnant ainsi que 11
- 10 est perdant ainsi que 9, 8
- 7 est gagnant
- 6 est perdant ainsi que 5, 4
- 3 est gagnant ainsi que 2.

Finalement, les positions gagnantes sont :

2, 3, 7, 11, 12, 16, 20, 21, 25, 29, 30.

La stratégie gagnante consiste alors à jouer en premier et à commencer soit par 2 soit par 3, ce qui permettra de toujours conserver une position gagnante.

Si on prend maintenant n = 32, les positions gagnantes sont translatées et deviennent :

4, 5, 9, 13, 14, 18, 22, 23, 27, 31, 32.

La stratégie gagnante consiste alors à laisser l'adversaire jouer en premier, ce qui permettra d'obtenir ensuite à coup sûr une position gagnante.

Lorsque n est grand, cette analyse rétrograde est longue, d'où l'intérêt de rechercher une règle permettant d'établir en fonction de n et des a_i la liste des positions gagnantes.

A notre connaissance, une telle règle n'a jamais été formulée dans le cas du jeu le plus général. Par contre, et c'est ce qui fait l'intérêt de ce jeu ici, il est possible de formuler une règle dans le cas de *"la course à n de pas p"*.

Cette règle est la suivante :

> *soit r le reste de la division euclidienne de n par p + 1, les positions gagnantes sont de la forme r + k(p + 1).*

En formation, on peut par exemple :

- soit étudier d'abord le problème dans le cas le plus général avec un exemple numérique du type ci-dessus, de façon à faire découvrir aux étudiants le principe de l'analyse rétrograde puis étudier ensuite la course à n et établir une règle en lien avec la division ;

- soit étudier directement la course à 20 avant de généraliser à la course à n. C'est ce choix que nous décrivons ci-après.

Phase 1

Découverte de l'analyse rétrograde

Les étudiants sont répartis par groupes de 2 et sont invités à jouer jusqu'à la découverte d'une stratégie gagnante présentée comme hypothétique. Lorsque des groupes trouvent une telle stratégie, le professeur leur propose de rejouer avec changement de la case d'arrivée puis du pas, afin qu'ils généralisent leur stratégie. Pour les groupes les plus avancés, un changement des variables numériques (n et p plus grands) pourra conduire à la formuler en termes de division.

Commentaires

Après quelques parties dans lesquelles les étudiants jouent au hasard, le théorème "17 *est une position gagnante"* apparaît en général assez vite, d'abord implicitement puis explicitement. Lorsqu'on le leur demande, les étudiants n'ont pas trop de difficultés à argumenter cette proposition. Le passage à l'analyse rétrograde est beaucoup plus délicat. II faut parfois inviter les étudiants à faire une partie en jouant à la course à 17 puis les faire jouer à nouveau à la course à 20 ; on peut recommencer en les faisant jouer à la course à 14... Certains ont beaucoup de mal à "remonter" entièrement la suite des nombres jusqu'à la position gagnante initiale: Une mise au point collective sur ce que sont des "positions gagnantes" et des "positions perdantes" est en général nécessaire.

Phase 2

Lien avec la division

Cette phase peut se dérouler collectivement sous forme d'échange sur les stratégies découvertes par les groupes. Il s'agira dans un premier temps d'institutionnaliser le principe de détermination des positions gagnantes et des positions perdantes. La consigne sera ensuite de chercher à trouver le plus vite possible la position gagnante initiale. L'augmentation des valeurs de n et p (par exemple course à 227 avec un pas de 23) oblige alors à optimiser les calculs des positions gagnantes, ce qui permettra d'institutionnaliser la règle de gain en lien avec la division.

Commentaires

Ce jeu a l'avantage de ne pas évoquer spontanément une situation de division. La première procédure efficace qui apparaît est celle des soustractions successives n - p - p - p... Il faut parfois quelque temps avant que les étudiants y voient le lien avec la division. C'est donc un moyen intéressant pour une réflexion sur le sens *"soustractions successives"* de la division.

Phase 3

Institutionnalisation didactique

Une réflexion sur les variables didactiques et là encore sur les différents types de situation pourra être menée par le professeur. Voir les commentaires précédents à propos de la situation *"Concertum ".*

On peut discuter le choix d'introduire la division à l'école à partir de la course à 20. Il reste que l'activité est en soi une situation-problème intéressante à proposer à des élèves. A défaut de la réaliser effectivement, on pourra proposer aux étudiants de visionner, lorsqu'il est disponible, le film **CNDP "Qui dira vingt** ?" [9]. Ce sera l'occasion de repréciser les notions précédentes dans une situation de classe.

La division
Aspects mathématiques

I - La division et les autres opérations

Objectif

Amener les étudiants à comprendre les particularités de la division par rapport aux autres opérations.

Phase 1

Le professeur distribue les exercices suivants :

a) additionner 4 et 7
b) additionner 47,5 et 6,003
c) soustraire 7 de 46
d) soustraire 28,45 de 102,068
e) multiplier 3 par 17
f) multiplier 5 par 0,56
g) multiplier 0 par 3,1
h) multiplier 3,1 par 0

i) diviser 65 par 5
j) diviser 35 par 16
k) diviser 42 par 0
l) diviser 370 par 28
m) diviser 650 par 101
n) diviser 426,23 par 1,12
o) diviser 4, 7 par 6
p) diviser 65 par 1,01
q) diviser 1 par 7
r) diviser 0 par 0.

Il demande à chacun d'écrire sa réponse sur papier.

Phase 2

Mise en commun et confrontation des réponses données. Mise en évidence rapide du caractère non ambigu des réponses sur addition, soustraction et multiplication. Par contre, sur la division, dans de nombreux cas, il y a plusieurs réponses différentes. Il s'agit alors de déterminer celles qui sont mathématiquement justes. De plus, les notations utilisées par les étudiants sont variées ; une explicitation de chacune d'elles est alors faite.

Phase 3

Le professeur conclut provisoirement cette activité en rappelant ou en précisant brièvement certaines définitions, certains termes liés à la division euclidienne dans **N** et à la division dans **R**.

II - Approfondissement mathématique

Il s'agit ici de revenir sur divers contenus mathématiques liés à la division euclidienne, à partir de la résolution d'exercices tirés en particulier des annales du concours externe de recrutement des professeurs d'école [1] et de la brochure de la COPIRELEM : "La *division à l'école élémentaire" [6].*

Au moins cinq types d'exercices sont traités :

1. des exercices nécessitant de mobiliser la définition de la division euclidienne et en particulier de réfléchir sur la double inégalité vérifiée par le reste, par exemple :

- *Dans une division, le diviseur est 83, le quotient est 403. Exprimez les dividendes possibles et les restes associés.*

- *Le dividende est 8592, le quotient est 38. Trouvez un diviseur et un reste associé. Y a-t-il plusieurs solutions ? Si oui, exprimez toutes les solutions, si non, justifiez votre réponse.*

- *Soient a, b, c trois naturels vérifiant a > b et c ≠ 0. Le quotient de a par c est a' et le quotient de b par c est b'. Peut-on prévoir quels seront les quotients par c de a + b, a - b et a.b ?*

2. des exercices posant des questions relatives à des techniques opératoires, par exemple :

- *Soit le nombre 12345678910111213 à diviser par 117. Indiquez une méthode permettant de trouver le nombre de chiffres du quotient sans effectuer la division.*

- *Le dividende est 5468902. Dans le cas particulier où le diviseur est 125, donnez une méthode de calcul rapide permettant d'obtenir le résultat sans effectuer la division.*

3. des exercices portant sur les notions de multiples et diviseurs et sur les critères de divisibilité, par exemple :

- *Par quel chiffre faut-il remplacer x et y pour que le nombre (écrit en base dix) 632xy soit divisible à la fois par 2, par 5 et par 9 ?*

- *Vérifiez que le nombre 5757 est divisible par 101. Montrez que le nombre (écrit en base dix) xyxy est divisible par 101.*

- *A, B, C D, E, F sont des nombres entiers naturels écrits ci-dessous en base dix (a désigne donc un chiffre) :*

  A = 10a4　　　*B = 34a*　　　*C = a4324*
  D = a18　　　*E = 314aa*　　　*F = a353a*

  Pour chacun des nombres A, B, C D, E et F, remplacez le chiffre a par différentes valeurs, si cela est possible, de telle sorte que le nombre correspondant soit un multiple de 4. Justifiez vos réponses.

- *Énoncez une condition pour que le nombre qui s'écrit "mcdu"soit multiple de 4 (m, c, d, u désignant des chiffres). Démontrez le résultat énoncé.*

4. divers exercices prétextes à la résolution d'équations ou de systèmes d'équation, par exemple :

- *le quotient de deux naturels est 6 et le reste 47. La somme des deux naturels et du reste est 591. Quels sont ces deux naturels ?*

5. des problèmes plus ouverts pouvant faire appel à la division :

   - *sachant que le 7 /12/ 92 est un lundi, par quel jour de la semaine a commencé l'année 1992 ? Quel jour le peuple français a-t-il pris la Bastille ?*

Ce travail se termine par un exposé du professeur sur la division euclidienne dans **N** et **D** et sur la division dans **R** et **Q** (avec dans presque tous les cas nécessité de revenir auparavant sur les différents ensembles de nombres et sur les notions de valeur approchée d'un réel par un décimal à un ordre donné)

Cet exposé comporte notamment l'explicitation de divers termes : dividende, diviseur, quotient, reste, division euclidienne dans **N**, division exacte, multiples et diviseurs...

Procédures de calcul de divisions

Cette situation est inspirée d'un document de l'IFM de Grenoble [10].

Objectif

Analyse détaillée des procédures de calcul dans la résolution des problèmes de divisions. On se situe ici dans le cadre des naturels et de la division euclidienne.

Simulation de la situation
"Le Petit Poucet"

> *Le Petit Poucet avec ses bottes de sept lieues fait des bonds de 28 km. Il doit parcourir 1155 km. Combien de pas va-t-il faire ?*

Première simulation
Les étudiants sont invités à résoudre ce problème avec la contrainte suivante : pas *le droit d'utiliser la division.*

Deuxième simulation
Le même problème est proposé en changeant les données numériques et avec la contrainte : *pas le droit d'utiliser ni division, ni multiplication.*

Mise en commun
Elle consiste à inventorier et discuter les procédures utilisées.

Analyse de travaux d'élèves

analyse de protocoles
Le professeur distribue aux étudiants les protocoles présentés dans le document de l'IFM (et reproduits ici en annexe 1). Étude de ce document avec mise en commun et discussion sur les procédures utilisées.

analyse de procédures
On trouvera en annexe 2 un montage réalisé à partir de l'article de Robert NEYRET *"Procédures utilisées par des enfants de CM dans certains problèmes de division. Repérage de quelques difficultés"* paru dans Rencontres Pédagogiques n° 4 : "*Comment font-ils"* (publication INRP) [7]

Ce montage, précédé de la liste des problèmes de référence, est proposé aux étudiants avec la consigne de classer les différents types de procédures repérables.

Le professeur reprend alors, sous forme d'exposé, l'article de Robert Neyret, et synthétise une typologie des différentes procédures susceptibles d'être mobilisées par les élèves.

Travaux d'inter-cours

Les étudiants sont invités à :

- lire des documents concernant la division, à partir d'une bibliographie que chaque professeur pourra constituer. Les ouvrages de la collection ERMEL pour le CE et le CM[4] et les numéros spéciaux de la revue Grand N[5] peuvent être considérés comme d'intéressants documents de référence.

- commencer à consulter des manuels et à essayer d'analyser la façon dont est abordée la division.

Situations et problèmes de division

1. Contexte des situations de division

Le professeur distribue aux étudiants les problèmes suivants :

[4] ERMEL, Equipe de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques à l'Ecole Elémentaire, Editions Hatier

[5] Grand N, Revue de mathématiques, Sciences et Technologie pour l'école primaire, IREM de Grenoble

1. On dispose de 47 carreaux de faïence pour carreler un dessus de lavabo. On place 6 carreaux par rangée. Combien de rangées placera-t-on ?

2. On compte de 6 en 6 à reculons à partir de 47. Quel sera le dernier nombre énoncé ?

3. On dispose de casiers pouvant contenir chacun 6 cassettes. Combien en faudra-t-il au minimum pour placer 47 cassettes ?

4. Avec une baguette de bois de 47 cm de long, combien de morceaux de 6 cm peut-on couper ?

5. Avec une baguette de bois de 47 cm de long, on veut faire 6 morceaux de même longueur et avoir le minimum de chutes. Quelle sera la longueur de chaque morceau ?

6. On donne un sachet de 47 bonbons à un groupe de 6 enfants. Combien chacun en aura-t-il ?

7. On partage le plus équitablement possible 47 billes entre 6 enfants. Combien chacun en aura-t-il ?

8. On partage équitablement 47 billes entre 6 enfants en en donnant le maximum. Combien de billes ne seront pas distribuées?

9. On partage équitablement 47 francs entre 6 personnes. Combien donne-t-on à chacun ?

10. 47 grains de blé sont lancés à 6 poules. Combien chacune picore-t-elle de grains ?

11. Un employé touche une prime de 47 francs par jour de travail. Il travaille 6 heures par jour. De combien cette prime augmente-t-elle son salaire horaire ?

12. On doit répartir 47 litres de vin dans des bonbonnes de 6 litres. Combien de bonbonnes seront nécessaires ?

13. 6 personnes héritent ensemble d'un terrain de 47 hectares qu'elles décident de partager en 6 lots de même aire (au centiare près). Quelle sera l'aire de chaque lot ?

14. On multiplie un nombre par 6 ; on trouve 47. Quel est ce nombre ?

15. Sur une calculette affichant 8 chiffres, on frappe successivement :

4 7 ÷ 6 =

Qu'affiche la calculette ?

Questions posées :

> *Quels sont les énoncés relevant de la division de 47 par 6 ?*
> *Quelle est la réponse dans chaque cas ?*
> *Le "sens" de la division est-il le même chaque fois ?*

Recherche puis mise en commun pour faire apparaître des difficultés spécifiques aux problèmes de division qui nécessitent, plus que pour les autres opérations, une interprétation des résultats.

(On pourra se référer à l'article de Marc BLANCHARD "***Ça ne tombe pas juste***" paru dans le n° 52 de la revue Grand N)

2. Division et proportionnalité simple

Objectifs

Resituer les problèmes de division à l'intérieur des structures multiplicatives.

Percevoir la différence entre division - quotition et division-partition et son incidence sur les procédures employées.

Déroulement

Les problèmes suivants sont proposés aux étudiants

1. Céline a 240 timbres qui remplissent un album de 16 pages. Toutes les pages ont le même nombre de timbres. Combien y a-t-il de timbres sur chaque page ?

2. Un nageur parcourt 2400 m dans une piscine. La longueur du bassin est de 50 m. Combien de longueurs de bassin le nageur doit-il parcourir ?

3. Au cours d'un voyage, une voiture a parcouru une distance de 1540 km à la vitesse moyenne de 80 km/h. Combien de temps a duré le voyage ?

4. Un satellite fait 75 fois le tour de la terre en 5475 minutes. En combien de temps fait-il le tour de la terre ?

5. Un tube de colle coûte 11 F. Un instituteur achète pour 495 F de tubes de colle. Combien de tubes de colle a-t-il achetés ?

6. La récolte d'un champ de pommes de terre est de 145,5 tonnes. Il a produit en moyenne 20 tonnes par hectare. Quelle est l'aire de ce champ ?

7. Une école commande des livres de mathématiques. Il faut payer, en tout 2703 F pour les 53 livres commandés. Quel est le prix d'un livre de mathématiques ?

8. M. Dupont achète du tissu à 55 F le mètre. Il paie 192,50 F. Quelle longueur de tissu a-t-il acheté ?

9. En France, on consomme chaque année 9 222 000 000 kg de papier. La France a 58 000 000 d'habitants. Quelle est la consommation moyenne de papier par habitant chaque année ?

10. Un robinet met 350 secondes pour laisser échapper 3010 ml d'eau. Combien de millilitres d'eau perd-il en une seconde ?

11. Julie a une boîte de 520 perles. Elle fait des colliers de 20 perles. Combien peut-elle faire de colliers ?

12. Le marchand de fruits a acheté 75 cageots de pommes pour un poids total de 937,5 kg. Quel est le poids d'un cageot ?

13. Un diamant de 15 centimètres cube a une masse de 52,5 g. Quelle est la masse d'un centimètre cube de diamant ?

14. Dans la principauté de Monaco, il y a 18500 habitants au km2. La population de Monaco est de 27 750 habitants. Quelle est la superficie de la principauté ?

La consigne est la suivante :

> *Voici 14 problèmes de division. Indépendamment du contexte, des grandeurs, des nombres ou de la syntaxe, classez ces problèmes en fonction du "sens" de la division auquel ils se réfèrent.*

Si les étudiants ont de la difficulté à effectuer ce classement, on pourra préciser ainsi la consigne :

> *Vous pouvez en particulier essayer de rechercher une représentation schématique ou symbolique pour chaque problème et identifier ceux qui relèvent d'un même type de représentation.*

La mise en commun aura pour objectif de faire apparaître les deux sens de la division pour lesquels nous reprenons ici les représentations symboliques proposées par Gérard VERGNAUD[6]:

- **division partition** *(ou "recherche de la valeur d'une part")*

1	**?**
b	**c**

- **Division -quotition** (ou *"recherche du nombre de parts")*

1	**a**
?	**c**

Cette présentation doit permettre de resituer la division dans l'ensemble des structures multiplicatives (pour lesquelles une étude plus générale est susceptible d'avoir précédé cette séquence).

Rappelons que G. Vergnaud distingue, dans les structures multiplicatives

- la proportionnalité simple
- le produit de mesures et la proportionnalité double.

La proportionnalité simple met en relation deux grandeurs et les problèmes qui en relèvent sont des problèmes à 4 termes, même si l'un d'eux (l'unité) est fréquemment présent mais n'apparaît souvent qu'à travers la désignation générale de l'une des variables ou par des termes tels que *"chaque", "chacun", « l'un »…*

Selon la présence ou non de l'unité et selon la place du terme cherché, on est en présence de 4 grandes catégories de problèmes. Outre les deux divisions évoquées ci-dessus, ces problèmes peuvent concerner :

- ***la multiplication***

1	**a**
b	**?**

- ***la recherche de quatrième proportionnelle***

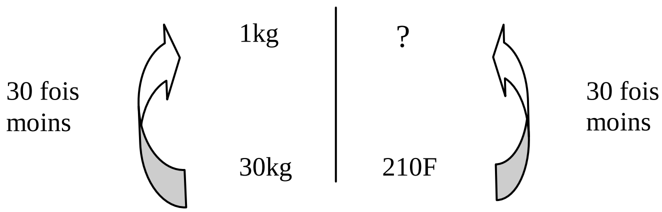
6 « Le moniteur de Mathématiques - Résolution de problèmes », sous la direction de G .Vergnaud, Fichier pédagogique, cycle 3, 1997.

a	**b**
c	**?**

Comme l'a bien montré G. Vergnaud, ces différentes catégories, et en particulier les deux divisions, pour ce qui nous intéresse ici, n'appellent pas toujours le même type de traitement.

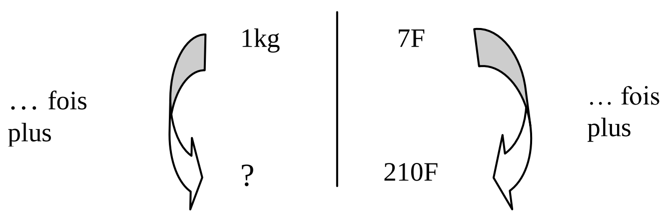
- la division-partition repose essentiellement sur la reconnaissance d'un rapport scalaire.

Si 30 kg de pommes de terre coûtent 210 F, le prix d'un kilo s'obtient en appliquant la relation scalaire « 30 *fois moins* ».



- la division -quotition peut reposer :

  *sur la reconnaissance d'un rapport scalaire qui n'est pas directement donné et qu'il faut calculer



si 1 kg coûte 7 F, combien de kg peut-on obtenir avec 210 F ? se résout alors en recherchant *"combien de fois plus"* représente 210 F par rapport à 7 F

*sur la recherche du coefficient de proportionnalité

si 1 kg coûte 7 F, on passe de la masse au prix en multipliant par 7 et du prix à la masse en divisant par 7. La différence, ici, est que ce 7 n'est plus un scalaire, un nombre sans dimension comme précédemment, c'est une nouvelle grandeur et une grandeur complexe puisqu'il s'agit d'une grandeur-quotient (7 F/kg). Une telle représentation du problème n'est pas simple pour les élèves et cela ne va pas de soi de systématiser le recours au coefficient de proportionnalité.

Les considérations qui précèdent peuvent aider à comprendre les raisons de l'utilisation de telle ou telle procédure dans les problèmes de division.

C'est ainsi (et on pourra le vérifier avec les procédures décrites dans (annexe 2) que les problèmes de division -quotition ouvrent naturellement la voie aux soustractions (ou additions) successives : si 1 kg coûte 7 F, on peut trouver combien de kg correspondent à 210 F en soustrayant autant de fois que nécessaire 7 F. On soustrait des francs à des francs et ceci prend facilement du sens.

Les problèmes de division-partition, eux, ne peuvent se résoudre à l'aide de soustractions (ou d'additions) successives. Si 30 kg coûtent 210 F, on ne peut chercher le prix d' l kg en soustrayant 30 de 210 autant de fois que nécessaire. Cela permettrait d'obtenir la réponse correcte mais au prix d'une perte de signification (soustraire 30 kg de 210 F !)... Par contre, les essais multiplicatifs prennent ici tout leur sens : dans 30 kg il y a 30 fois plus que dans un kilo, donc 210 F est égal à 30 fois le prix recherché, ce qui conduit à émettre des hypothèses sur ce prix.

La division dans les classes

Il s'agit d'une enquête qu'on peut réaliser en CE2 et/ou en CM1. Elle est reprise des travaux qui figurent dans le document de l'IFM déjà cité.

Chaque étudiant observe un groupe de 2 enfants selon les modalités décrites ci-après et qui sont travaillées préalablement lors d'une séance de préparation.

Les problèmes

- *Avec ses bottes de sept lieues, le Petit Poucet se déplace entre deux villes. Il fait des pas de 28 kilomètres.*
  Il part d'Angers pour aller à Limoges. La distance entre ces deux villes est de 252 kilomètres. Combien de pas va-t-il faire ?

- *Une autre fois, il va à Quimper. La distance est de 319 kilomètres. Combien de pas va-t-il faire ?*

- *Voici un paquet de 89 allumettes.*

Comment faire pour les partager entre 7 personnes de façon que chacune en ait autant ?

Vous pouvez vous servir des allumettes pour répondre, mais ce n'est pas obligatoire.

Conditions d'observation

1. Les enfants sont par groupes de 2 ; un observateur est attaché à chaque groupe.

2. Les interventions éventuelles de l'observateur doivent être limitées aux cas suivants
   - demander de recompter un calcul erroné
   - relire l'énoncé en cas de blocage
   - lorsque l'enfant a trouvé une solution, lui demander d'expliquer ce qu'il a fait et s'il est sûr du résultat trouvé.

3. Travail d'observation à réaliser :
   - rédiger une chronique de la séquence
   - pour chacun des deux enfants observés, rédiger une note de synthèse mettant en évidence :
     - les procédures utilisées
     - les erreurs liées aux procédures choisies
     - l'interprétation donnée au reste
     - la façon dont est présenté le résultat
     - le rôle du travail à deux

     et, pour le second problème :
     - la stabilité éventuelle des procédures
     - le rôle du matériel et la gestion du reste.

   - mise en commun sur la façon dont les enfants ont travaillé et les procédures qu'ils ont utilisées.

Travail d'inter-cours

Rédaction des chroniques d'observation. Celles-ci peuvent être synthétisées et remises aux maîtres des classes concernées.

Analyse de manuels

Lecture et commentaires des instructions officielles

Travail par groupes pour construire une progression sur la division au CM1 en s'aidant des manuels à disposition. La consigne est de repérer les différences de point de vue entre les manuels sur :
- ⇨ l'organisation de la progression
- ⇨ le choix des situations de référence

- ⇨ le degré de liberté laissé aux élèves dans le choix de procédures de résolution
- ⇨ la différenciation division-partition et division-quotition
- ⇨ les techniques de calcul proposées
- ⇨ …….

Mise en commun

Compléments sur les techniques de calcul

Les algorithmes de calcul des divisions

Il s'agit ici de présenter les différentes techniques de calcul en usage dans les classes.

Cette présentation pourra être complétée par diverses techniques historiquement utilisées. On pourra s'appuyer sur l'article de R. Neyret dans le n° 17 de Grand N.

Analyse d'erreurs d'élèves

Le travail d'analyse d'erreurs d'élèves est particulièrement intéressant et on pourra s'appuyer sur des extraits des épreuves de concours de recrutement des PE [1].

Nous proposons ici un travail sur des erreurs survenant dans les calculs de divisions (voir annexe 3).

Les étudiants doivent analyser ces erreurs, faire des hypothèses sur les causes éventuelles de ces erreurs, expliciter les moyens de contrôle qui auraient pu être mis en oeuvre par ces élèves.

Le professeur conclut en essayant de présenter une typologie des erreurs de division, s'appuyant sur une liste organisée de leurs sources éventuelles :

- existence d'un zéro au quotient (en position finale ou intermédiaire),
- mauvaise évaluation du nombre de chiffres au quotient,
- existence d'un reste (partiel ou final) supérieur au diviseur,
- mauvaise évaluation de l'ordre du quotient ou d'un quotient partiel,
- mauvaise perception due à une mauvaise disposition des calculs ou à une mauvaise lecture des chiffres du quotient,
- surcharge de travail ou surcharge en mémoire,
- mauvaise maîtrise des tables de multiplication,
- mauvaise maîtrise de la règle des zéros,
- retenue dans une soustraction ou dans une multiplication,
- …

Analyse du film
"Algorithme de la division" [2]

Il existe encore des copies de ce film[7] qu'on peut essayer de se procurer auprès du CNDP. Son contenu reste très intéressant pour un travail avec les étudiants.

Ceux-ci, lors du visionnement du film, doivent répondre aux questions suivantes[8]

1. Résumez le déroulement de la première séquence filmée.
2. Le problème posé est *"combien de rangées de 21 carreaux peut-on faire avec 2664 carreaux".*
   Exposez deux solutions trouvées par les enfants. Pouvez-vous en imaginer d'autres ?
3. Dans la leçon suivante, on part de 588 654 801 carreaux. Expliquez pourquoi.
4. En quoi la troisième séance diffère-t-elle des deux premières ?

Bibliographie

[1]*Annales du concours externe de recrutement des professeurs d'école* -IREM de Paris 7 -COPIRELEM – 1992 à 2002.

[2] *Algorithme de la division - atelier* de pédagogie - film RTS du CNDP - 1974

[3] cours de G. BROUSSEAU - Actes de la première université d'été des professeurs d'École Normale - Olivet – 1988 (épuisé)

[4] D. BUTLEN , M. PEZARD - Une *formation en didactique des mathématiques pour les instituteurs -maîtres-formateurs* - Document n° 4 pour la formation - IREM de Paris VII -Université de Paris VII

[5] S. GAIRIN-CALVO *Compte rendu d'un travail réalisé en FP1 à propos de l'apprentissage de la division dans N - Actes* du XIVème colloque COPIRELEM d'Angers (1987) (épuisé)

---

[7] Note de la COPIRELEM en 2003, Ce n'est pas sûr qu'il existe encore des copies de ce film.

[8] Questionnaire élaboré par Suzy GAIRINCALVO et publié dans les actes du colloque COPIRELEM d'Angers (1987)

[6] La *division à l'école élémentaire* - "Elem Math III" - COPIRELEM- APMEP - 1983

[7] R. NEYRET. - Procédures *utilisées par des enfants de CM dans certains problèmes de division, repérage de quelques difficultés* in *"Comment font-ils"* - Rencontres pédagogiques n° 4'- INRP -1984

[8] H. PÉAULT *La division en formation initiale -Actes* du colloque COPIRELEM de Rouen – 1988 (épuisé)

[9] Qui *dira vingt ? - atelier* de pédagogie film RTS du CNDP - 1973

[10] *Situations problèmes de division et procédures* in *"Formation des élèves-instituteurs et didactique des mathématiques (DEUG premier degré)" -première* partie - publication de l'IFM. de Grenoble - n° 19 - avril 1987(épuisé)

Annexe l

Extrait de ***"Formation des élèves-instituteurs et didactique des mathématiques",*** publication de 1'IFM de Grenoble, n° 19, avril 1987.

Cet extrait est tiré d'une annexe au chapitre *"Situations-problèmes de division et procédures".* Il présente des protocoles de passation du problème du "Petit Poucet" *(Le Petit Poucet fait des bonds de 28 km avec ses bottes de sept lieues. Combien de pas fera-t-il pour se rendre d'une ville à une autre ?),* le 12 octobre 1982.

Situation

Choisissez deux villes. Le Petit Poucet se déplace entre ces deux villes avec ses bottes de sept lieues. Trouvez le nombre de pas qu'il va faire pour se rendre d'une ville à l'autre.

Jérôme - Jean-François

Villes choisies
Rennes - Paris; 351 km

Déroulement
Jean-François écrit

28 x 2 = 56
56 x 2 = 112
112 x 2 = 224
224 + 112 = 336
336 + 28 = 364
puis 351 - 336 = 15

Il se trompe dans le décompte des pas, trouve 23, calcule 28 x 23 = 644 et conclut :

23 fois 28, reste 15 km.

Jérôme additionne 28 :

28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 = 364
364 - 28 = 336
336 + 28 = 364
364 - 28 = 336
351 - 336 = 15
Il calcule 12 x 28 = 336 puis conclut :

il lui reste à faire 15 km.

<u>Sylvie - Victor</u>

Villes choisies

Lille - Grenoble; 769 km.

Déroulement
Victor pose la division

769	28

Il évalue la grandeur du quotient 10 < q < 100 puis effectue

28 x 9= 252
28 x 15 = 420
28 x 20 = 560
28 x 30 = 840
28 x 28 = 784
28 x 27 = 756
28 x 29 = 812

puis conclut :

769	28
- 756	27
013	

<u>Marie-Pierre et Marie-Françoise</u>

Villes choisies
Grenoble - Marseille; 277 km

Déroulement
Marie-Pierre dit qu'il faut faire une division et pose

277	28

Elle écrit :

28 x 8 = 224
224 + 28 = 252
252 + 28 = 280

puis

227	28
- 252	9
025	

Marie-Françoise déclare ne pas savoir faire les divisions et cherche autre chose. Elle écrit

$$\begin{array}{r}
277 \\
\underline{-56} \\
221 \\
\underline{-56} \\
265 \\
\underline{-56} \\
219 \\
\underline{-56} \\
163 \\
\underline{-84} \\
179 \\
\underline{-84} \\
95 \\
\underline{-84} \\
11
\end{array}$$

Elle compare avec le résultat de Marie-Pierre et constate une erreur :

$$\begin{array}{r}
163 \\
\underline{-84} \\
79
\end{array}$$

Elle réécrit

$$\begin{array}{r}
277 \\
\underline{-84} \\
193 \\
\underline{-84} \\
109 \\
\underline{-84} \\
25
\end{array}$$

Marie-Françoise conclut :
Il a fait 0 pas et il lui reste 25 km.

<u>Sébastien - Lucile</u>

Villes choisies
Grenoble - Lyon; 105 km

Déroulement
Lucile pose

$$\begin{array}{r|l}
105 & \underline{\;28\;\;\;\;\;} \\
 &
\end{array}$$

puis fait les calculs suivants

105 + 28 = 133

105 x 28 = 2940

Ensuite elle écrit

28	28	28
x 5	x 3	x 4
140	84	102

ce qui lui permet d'écrire

105	28
3	4

Après, elle écrit encore

28 x 2 = 56

28 x 6 = 168

Sébastien pendant ce temps, après avoir fait le calcul 105 x 28 = 2940, écrit :

28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 = 196

que Lucile vérifie en faisant 28 x 7 = 196

Lucile réalise le calcul 105 x 7 = 735 Sébastien amorce une soustraction

105 – 28 = 77

puis écrit

28 + 28 + 28 + 28 + 28

Lucile lui dit *"tu n'as qu'à faire 28 x 5"* que Sébastien calcule : 28 x 5 = 140

Sébastien écrit 140 - 28 = 112

puis 112 - 28 = 184 (erreur de calcul)

puis

28 x 4 = 112

28 x 7 = de nouveau 28 x 4 = 112

28 x 6 = 168

168 – 28 = 140

140 - 28 = 118 (erreur de calcul)

118 – 28 = 90

Discussion sur le nombre de pas. Sébastien et Lucile récupèrent un calcul fait antérieurement: *28 x 3 = 84*

Sébastien calcule

112 x 3= 336

136 - 28 = 108

28 x 3 = 84

Lucile, après avoir reposé

$$\begin{array}{r|l} 105 & 28 \\ \hline 3 & 21 \end{array}$$

effectue les calculs

112 – 84 = 28
112 + 84 = 196

pendant que Sébastien calcule

84 x 28 = 1272 (erreur de calcul)
Perte de signification du problème pour l'un comme pour l'autre.

Annexe 2

Extrait de *Procédures utilisées par des enfants de CM dans certains problèmes de division. Repérage de quelques difficultés* (Robert NEYRET) in Rencontres pédagogiques n° 4 (1984) Comment font-ils ? L'écolier et le problème de mathématiques » (publication I.N.R.P.)

Nous nous sommes proposés d'étudier la manière dont les enfants élaborent des procédures de résolution dans des problèmes de type scolaire, particulièrement de division.

Les problèmes posés ont été les suivants :

Problème 1 a
Avec ses bottes de sept lieues, le petit Poucet se déplace entre deux villes. Il fait des pas de 28 km. Il part de Grenoble pour aller à Nice; Grenoble-Nice : 224 km. Combien de pas va-t-il faire ?

Problème 1 b
Il part ensuite de Grenoble pour aller à Marseille (ou autres variantes au CM2) Grenoble - Marseille: 277 km.

Problème 2
On distribue aux enfants une pochette contenant un certain nombre d'allumettes entre 200 et 300 (ce nombre étant inscrit sur un papier à l'intérieur de la pochette). On demande aux enfants de partager ces allumettes entre 7 personnes de façon que chacune d'elles en ait autant.

Problème 3
On range 273 oeufs dans des boîtes de 12. Combien de boîtes peut on remplir ?

Problème 4
On partage équitablement 273 billes entre 14 enfants. Combien de billes donnera-t-on à chaque enfant ?

Problème 5
On achète 13 albums de Lucky Luke. On paye 273 F. Combien coûte un album ?

Ces problèmes sont posés à des élèves de CM1 et CM2 en début d'année scolaire avant tout travail spécifique sur la division.

Pour les deux premiers problèmes, les enfants travaillent par deux et peuvent travailler ensemble. Un observateur note tout ce qui se dit et se passe au niveau de deux enfants. Les seules interventions « autorisées » de l'observateur sont les suivantes :

- en cas d'erreur de calcul: « Regarde: *ici tu as fait une erreur de calcul* ».
- en cas de blocage de plus de 3 ou 4 minutes : « Relisez *l'énoncé* » .

Vous trouverez ci-après des travaux d'élèves extraits du document.

①

273 œufs / boîtes de 12 :
l'enfant fait les essais suivants :

$12 \times 100 = 1200$
$12 \times 30 = 360$
$12 \times 10 = 120$
$12 \times 20 = 240$
$12 \times 15 = 180$
$12 \times 18 = 216$
$12 \times 25 = 300$
$12 \times 22 = 264$
$12 \times 23 = 276$

et conclut « il y aura 23 boîtes et il restera 3 œufs »

②

Le petit Poucet / distance 105 :

$$\begin{array}{r|l} 105 & 28 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 28 \\ \times\ 5 \\ \hline 240 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 28 \\ \times\ 3 \\ \hline 84 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 28 \\ \times\ 4 \\ \hline 102 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 105 & 28 \\ \hline & 4 \end{array}$$

Le petit Poucet va faire 4 pas

③

Le petit Poucet / distance 665 :

$$\begin{array}{r} 280 \\ +\ 280 \\ \hline 560 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 665 \\ -\ 280 \\ \hline 105 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 105 & 28 \\ \cline{2-2} -\ 84 & 3 \\ \cline{1-1} 21 & \end{array}$$

Le petit Poucet fait 23 pas et il lui reste 21 *km*.

④

Le petit Poucet / distance 224 :
Essais de :

$$\begin{array}{r} 131 \\ \times\ 28 \\ \hline 1048 \\ 263 \\ \hline 3668 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 31 \\ \times 28 \\ \hline 248 \\ 62 \\ \hline 868 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8 \\ \times 28 \\ \hline 64 \\ 16 \\ \hline 164 \end{array}$$

puis additionne :

$$\begin{array}{r} 164 \\ +\ 28 \\ +\ 28 \\ +\ 28 \\ \hline 248 \end{array}$$

enfin calcule :

$$\begin{array}{r} 248 \\ -\ 28 \\ \hline 220 \end{array}$$

interprété par 10 pas.
L'observateur fait rectifier l'erreur de calcul $8 \times 28 = 224$.
L'enfant conclut par :
« Le petit Poucet va faire 8 pas ».

⑤

$$\begin{array}{r|l} 670 & 28 \\ \cline{2-2} 110 & 23 \\ 26 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 28 \times 2 = 56 \\ 28 \times 3 = 84 \\ 28 \times 4 = 112 \\ 28 \times 5 = 140 \\ 28 \times 6 = \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1255 & 28 \\ \cline{2-2} -\ 112 & \\ \cline{1-1} 135 & \\ -\ 112 & \\ \cline{1-1} 23 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 958 & 28 \\ \cline{2-2} 118 & 34 \\ -\ 80 & \\ \cline{1-1} 34 & \\ -\ 32 & \\ \cline{1-1} 06 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 958 & 28 \\ \cline{2-2} 118 & 34 \\ 6 & \end{array}$$

⑥

273 billes / 14 enfants :
Les essais successifs sont les suivants :

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times\ 30 \\ \hline 420 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14 \\ \times\ 25 \\ \hline 350 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14 \\ \times\ 15 \\ \hline 210 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14 \\ \times\ 17 \\ \hline 238 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times\ 20 \\ \hline 280 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14 \\ \times\ 18 \\ \hline 252 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14 \\ \times\ 19 \\ \hline 266 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14 \\ \times\ 20 \\ \hline 280 \end{array}$$

avec la conclusion suivante :
« Ils auront 19 billes et certains en auront une en plus. »

⑦

273 œufs / boîtes de 12 :

$$\begin{array}{rll} & 12 & 1 \\ + & 12 & 2 \\ + & 12 & 3 \\ + & 12 & 4 \\ + & 12 & 5 \\ + & 12 & 6 \\ + & 12 & 7 \\ + & 12 & 8 \\ + & 12 & 9 \\ + & 12 & 10 \\ + & 12 & 11 \\ + & 12 & 12 \\ + & 12 & 13 \\ + & 12 & 14 \\ + & 12 & 15 \\ + & 12 & 16 \\ + & 12 & 17 \\ + & 12 & 18 \\ \hline & 216 & \end{array} \qquad \begin{array}{rrl} & 216 & \\ + & 12 & 19 \\ + & 12 & 20 \\ \hline & 240 & \\ + & 12 & 21 \\ \hline & 252 & \\ + & 12 & 22 \\ \hline & 264 & \\ + & 12 & 23 \\ \hline & 276 & \end{array}$$

on peut remplir 23 boîtes

Le petit Poucet / distance 224 : ⑧

L'enfant pose

$$\begin{array}{r} 28 \\ +28 \\ +28 \\ \hline 84 \end{array} \quad \begin{array}{r} 84 \\ +84 \\ \hline 168 \end{array} \quad \begin{array}{r} 168 \\ +168 \\ \hline 336 \end{array} \quad \begin{array}{r} 336 \\ -\;.\;.\;.\;. \\ \hline 224 \end{array} \quad \begin{array}{r} 336 \\ -112 \\ \hline 224 \end{array}$$

L'enfant conclut après une étape de réflexion : « Le petit Poucet devra faire 11 pas. »

⑨

Billes entre 14 enfants :

L'enfant compte de 1 en 1 jusqu'à 273.

Lucky Luke : 273 F / 13 albums ①⓪

L'enfant écrit d'abord :

13 × 1 = 13		13 × 10 = 130
13 × 2 = 26		13 × 11 = 143
13 × 3 = 39	barre l'ensemble	13 × 12 = 156
13 × 4 = 52	des calculs	13 × 13 = 169
13 × 5 = 65	précédents	13 × 14 = 182
13 × 6 = 78	et écrit :	13 × 15 = 195
		13 × 16 = 208
		13 × 17 = 221
		13 × 18 = 234
		13 × 19 = 247
L'album coûte 21 F.		13 × 20 = 260
		13 × 21 = 273

Petit Poucet / distance 351 : ①①

L'enfant calcule en écrivant à côté le nombre de pas.

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times\;\;2 \\ \hline 56 \end{array} \text{ 2 pas} \quad \begin{array}{r} 56 \\ \times\;\;2 \\ \hline 112 \end{array} \text{ 4 pas} \quad \begin{array}{r} 112 \\ \times\;\;2 \\ \hline 224 \end{array} \text{ 8 pas}$$

$$\begin{array}{r} 224 \\ \times\;\;2 \\ \hline 464 \end{array} \text{ puis } \begin{array}{r} 56 \\ +28 \\ \hline 84 \end{array} \quad \begin{array}{r} 224 \\ +112 \\ \hline 336 \end{array}$$

Il fait 2 × 2 × 2 = 8 pas

Il fait 2 × 2 = 4 pas

Il fait 12 pas

351 - 336 = 15 *km*, qu'il lui reste à parcourir.

Petit Poucet / distance 340 : ①②

L'enfant pose $\begin{array}{r|l} 340 & 28 \\ \hline \end{array}$

puis essaie 28 × 7 = 196

28 × 10 = 280

et s'approche ensuite par des additions de 28 :

280 + 28 = 308 308 + 28 = 336

336 + 28 = 364, qui est barré ; et conclut : « il fera 12 pas et il restera 4 *km*. »

273 œufs / boîtes de 12 : ①③

12	60	108	156	204	252
+12	+ 12	+ 12	+ 12	+ 12	+ 12
24	72	120	168	216	264
+12	+ 12	+ 12	+ 12	+ 12	+ 12
36	84	132	180	228	276
+12	+ 12	+ 12	+ 12	+ 12	
48	96	144	192	240	
+12	+ 12	+ 12	+ 12	+ 12	
60	108	156	204	252	

23 boîtes

Petit Poucet / distance 351 : ①④

$$\begin{array}{rl} 28 & 1 \\ +\;28 & 2 \\ +\;28 & 3 \\ +\;28 & 4 \\ +\;28 & 5 \\ +\;28 & 6 \\ +\;28 & 7 \\ +\;28 & 8 \\ +\;28 & 9 \\ +\;28 & 10 \\ +\;28 & 11 \\ +\;28 & 12 \\ +\;28 & 13 \\ \hline 364 & \end{array} \qquad \begin{array}{r} 364 \\ -351 \\ \hline \\ 364 \\ -\;\;28 \\ \hline 336 \\ \\ 351 \\ -336 \\ \hline 15 \end{array}$$

Il fait 12 pas et il reste 15 *km*.

Petit Poucet / distance 559 : ①⑤

L'enfant effectue 28 × 10 = 280

puis 280 × 9 = 560

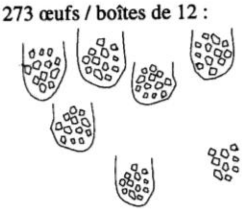
Ensuite il essaie : 28 × 9 = 252

Calcule $\begin{array}{r} 280 \\ +252 \\ \hline 532 \end{array}$ puis $\begin{array}{r} 559 \\ -532 \\ \hline 027 \end{array}$

et conclut : « Petit Poucet fera 19 pas et 27 km à pied. »

①⑥

273 œufs / boîtes de 12 :



L'enfant compte jusqu'à 273 en remplissant les boîtes

Annexe 3

Voici des travaux d'élèves de CM.

1) Vérifiez les opérations ci-dessous. Pour chaque opération inexacte, expliquez les erreurs.
2) Quels sont les moyens de contrôle à la disposition des élèves pour ce type de calcul ?