PAVAGE ET PGCD.

Catherine Houdement - Marie-Lise Peltier

Extrait des Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - Pau 1992.

Cet article présente une situation d'homologie pour les étudiants (PE1) se préparant au professorat des écoles. La résolution et l'analyse d'un problème[1] *permet de dégager les notions de PGCD, de partie aliquote commune, d'irrationalité, puis de pointer quelques concepts de didactique : aspects outil-objet d'une notion, variable didactique, seuil épistémologique, changements de cadres.*

OBJECTIFS

Objectifs mathématiques

Il s'agit de proposer aux étudiants une situation durant laquelle ils vont "faire des mathématiques" **:** résoudre un problème, d'apparence géométrique, en utilisant un outil mathématique numérique, le PGCD, et prétexte à une réflexion plus poussée sur la "nature" des nombres-mesures (rationalité et irrationalité, incommensurabilité de deux réels).

Objectifs didactiques

Certaines notions de didactique peuvent être pointées dans cette activité (caractère outil et objet d'une notion, variable didactique, preuve, contextualisation...), mais elle reste à visée essentiellement mathématique.

ACTIVITE

Problème général présenté aux étudiants

"Il s'agit de paver un rectangle de dimensions données avec des carrés tous exactement superposables, les plus grands possible. Nous appelons "paver" le fait de placer les carrés bord à bord, sans chevauchement, sans trous, sans débordement. On pourrait encore dire qu'il s'agit de réaliser un "carrelage" du rectangle."

---

[1] Origine : problème tiré de *Problème ouvert et Situation Problème* (IREM de Lyon N° 64, 1988).

Phase 1 : rectangles de **dimensions entières**.

Objectif
Faire émerger la notion de PGCD en tant qu'outil de résolution du problème.

Consigne 1
"Vous devez carreler un rectangle de dimensions 42 cm sur 96 cm."

Les diverses propositions sont recensées. Si l'échec est total, la nouvelle consigne est de carreler un rectangle de 8 cm sur 12 cm, afin de permettre un dessin effectif du rectangle et de ses carrelages.

Remarques

Les étudiants proposent généralement, dans un premier temps des carrés de 2 cm sur 2 cm, et progressivement essaient d'autres valeurs.

Certains étudiants ne sont pas convaincus que des carrés de 6 cm sur 6 cm sont les plus grands possible répondant à la question, ils essaient des valeurs décimales non entières supérieures à 6.

Consigne 2 : reprise de la consigne 1 avec divers rectangles :

462 cm sur 165 cm	pour qu'il soit impossible de faire le dessin.
4620 cm sur 1650 cm	pour mettre en évidence la propriété : PGCD (ka, kb) =k PGCD (a, b)
105 cm sur 176 cm	pour dégager la notion de nombres premiers entre eux.
67320 cm sur 245700 cm	pour faire évoluer les procédures de recherche et se libérer des unités.

Synthèse

1 - Quelles procédures ont été utilisées pour résoudre le problème ?
- L'utilisation des dessins, mais qui s'est vite révélée coûteuse.
- Le tâtonnement et la recherche de diviseurs successifs.
- La décomposition des nombres en facteurs premiers, soit par décompositions multiplicatives successives, soit avec l'algorithme traditionnel.

2 - Quelle propriété vérifie le côté du carré répondant à la question ?
- C'est un diviseur des deux nombres, pour que l'on puisse "paver"
- C'est le plus grand diviseur des deux nombres, pour que ce soit le carré le plus grand possible.

La notion mathématique ainsi dégagée est celle de **plus grand diviseur commun** à deux nombres.

3 - Quelles propriétés ou définitions ont été rencontrées ?

- PGCD(ka, kb) = k PGCD(a, b)
- Si PGCD(a, b) = 1 , a et b sont dits **premiers entre eux.**

Institutionnalisation sur les points suivants

- Définition du **PGCD** de deux nombres entiers.
- Définition de la notion de nombres entiers **premiers entre eux.**
- Recensement des **méthodes de recherche du PGCD** de 2 nombres entiers :

  - **1ère méthode,** utilisant la structure factorielle de **Z** : décomposition en facteurs premiers des deux nombres.

  - **2ème méthode**, utilisant la structure euclidienne de **Z** : algorithme d'Euclide (cf. annexe 1).
    - Présentation géométrique de la méthode des soustractions successives (utilisant la propriété **si d/a et d/b alors d/a - b**) : antéphérèse.
    - Algorithme d'Euclide sous sa forme usuelle. Traitement informatique de cet algorithme.
    - Lien avec les fractions continues.

Phase 2 : rectangles de dimensions **non entières.**

On étend maintenant le problème de l'existence d'un carré le plus grand possible permettant de paver un rectangle de **dimensions quelconques**.

Objectifs

- Faire émerger la notion de "partie aliquote commune" à deux rationnels.
- Poser le problème de l'irrationalité de certains nombres.

Consignes successives

- *Paver un rectangle de 72,45 sur 61,2.*
- *Paver un rectangle de* $\frac{21}{15}$ *sur* $\frac{49}{14}$.
- *Paver un rectangle de* $\frac{25}{3}$ *sur* $\frac{40}{11}$.

Recensement des résultats et des procédures utilisées.

72,45 et 61,2 sont remplacés par $\frac{7245}{100}$ et $\frac{1620}{100}$: des méthodes utilisées pour les entiers sont réinvesties.

$\frac{21}{15}$ et $\frac{49}{14}$ remplacés par $\frac{7}{5}$ et $\frac{7}{2}$; or $\frac{1}{5}=\frac{1}{10}\times 2$ et $\frac{1}{2}=\frac{1}{10}\times 5$
donc $\frac{7}{10}$ convient.

$\frac{25}{3}$ et $\frac{40}{11}$ sont remplacés par $\frac{275}{33}$ et $\frac{120}{33}$; des méthodes utilisées pour les entiers sont réinvesties (soit décomposition en facteurs premiers, soit algorithme d'Euclide).

Synthèse

1 - Les **décimaux** sont "naturellement" transformés en **fractions décimales** pour travailler à nouveau sur les entiers ; $\mathbf{D}^+$ se trouve naturellement plongé dans $\mathbf{Q}^+$.

2 - L'extension à $\mathbf{Q}^+ - \mathbf{D}^+$ se fait "en douceur", le dénominateur commun retrouve son sens et la "commune mesure" sa définition.

3 - Le côté du carré solution est un nombre ayant des propriétés comparables à celles du PGCD lorsque les dimensions étaient entières, c'est la **commune mesure** aux deux dimensions du rectangle ou encore la **partie aliquote commune** aux deux nombres qui les mesurent.

Nouvelle consigne

"Est-il toujours possible de paver un rectangle avec des carrés ?"

Généralement la réponse des étudiants est « oui ».
On entre là dans la nécessaire distinction entre l'approche pragmatique appuyée sur des dessins et sur le réel (géométrie de l'ingénieur) et la réflexion mathématique théorique.
Ceci va permettre de pointer l'existence de ces deux « points de vue » sur la situation ; de parler de la notion théorique d'**incommensurabilité** de certaines grandeurs ; de montrer qu'il n'est par exemple pas possible, en géométrie théorique, de paver un rectangle de dimension 1 et $\sqrt{2}$ avec des carrés.

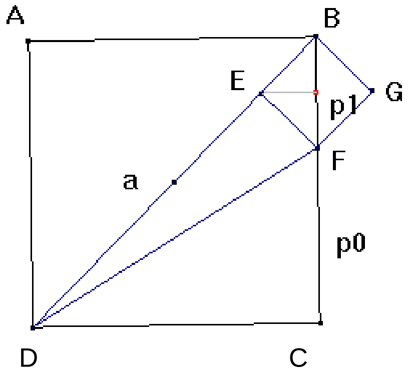
Ici il est possible de donner un aperçu historique et philosophique de ce problème.

Dans le livre X, Euclide utilise pour démontrer l'incommensurabilité de deux grandeurs une méthode analogue à celle de la recherche du pgcd par soustractions successives.
« *Etant donné deux grandeurs inégales et la plus petite retranchée de la plus grande, si le reste ne mesure jamais le reste précédent, les deux grandeurs sont incommensurables.* »

On s'arrête dès que l'on trouve deux restes successifs p_n et p_{n+1} qui se trouvent dans le même rapport que les grandeurs initiales a et b.

$\frac{a}{b} = \frac{p_n}{p_{n+1}}$: les deux grandeurs a et b sont alors incommensurables.

On peut également proposer une démonstration géométrique de l'**incommensurabilité de 1 et de $\sqrt{2}$** s'appuyant sur cette propriété.
On utilise alors la figure suivante.



$a = \sqrt{2}\ b$

a = BD   b = BC = DE
La perpendiculaire en E à (DB) coupe (BC) en F.
$p_0 = a - b = BD - BC = BD - DE = BE$
$p_1 = b - p_0 = BC - BE = BC - FC = BF$

On montre aisément que $\frac{p_1}{p_0} = \frac{a}{b}$ ce qui montre l'incommensurabilité de 1 et de $\sqrt{2}$.

On peut prolonger cette méthode par le **développement en fraction continue de** $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}$$

Remarque

Le problème de l'incommensurabilité de 1 et de $\sqrt{2}$ revient à celui de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, mais il est à rappeler que deux nombres irrationnels peuvent mesurer des grandeurs commensurables par exemple $3\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ puisque leur rapport est 3.

Exemples d'autres rectangles "classiques" que l'on ne peut théoriquement pas paver avec des carrés :
- les "rectangles d'or" : rectangles de coefficient de forme $(1+\sqrt{5})/2$
- les rectangles correspondant aux formats standard des feuilles de papier (A_4, A_3, A_2...) : rectangles de coefficent de forme $\sqrt{2}$.

Il est intéressant de **noter la différence entre le problème théorique et la manipulation pratique**, car il est évidemment possible matériellement de paver la feuille A_4 avec des carrés puisqu'il s'agit alors de travailler sur des valeurs approchées décimales qui sont donc toujours "commensurables".

Institutionnalisation

Pour traiter le problème du pavage par des carrés d'un rectangle de **dimensions décimales ou rationnelles**, la méthode est **identique à celle utilisée pour les entiers**.

La notion dégagée est alors celle de **"partie aliquote"** à deux rationnels (ou deux décimaux).

Le problème n'a pas de solution théorique si les deux dimensions sont **incommensurables**, c'est à dire si les deux nombres qui les mesurent ont un rapport irrationnel.

ANALYSE DE L'ACTIVITE

1 - Analyse mathématique

- Notion de **PGCD**, avec approche de diverses méthodes pour le trouver.
  Vision "géométrique" du PGCD.

- Réinvestissement de connaissances numériques : critères de **divisibilité**...

- Différenciation de **N**, **D**, **Q**, **R** "en acte".

- Mise en avant de la distance entre problème spatial (où le rapport des longueurs mesurées, diagonale sur côté du carré, peut être rationnel) et modèle théorique (où ce rapport ne l'est pas). Place de l'approximation.

2 - Analyse didactique

Diverses notions didactiques peuvent être pointées dans cette séquence.

- L'aspect **outil** d'une notion (dans la construction des connaissances par dialectique outil-objet).

  Le **PGCD** de deux nombres est introduit ici en tant qu'outil de résolution du problème et non présenté en tant qu'objet de savoir par une définition. Ceci permet de donner du sens à la notion de PGCD.
  Ainsi cette situation peut se poser comme situation a-didactique du PGDC.

  A l'issue de la phase d'institutionnalisation, le PGCD a acquis un statut d'**objet** mathématique ayant sa place dans "l'édifice" des connaissances mathématiques.

- **Cadres**
Le problème est posé dans un cadre géométrique, mais une résolution efficace amène à basculer dans un cadre numérique : on a là un exemple de jeu de cadres, ce basculement est en effet anticipé par le professeur, puisqu'il vise, lui, l'acquisition d'une notion numérique.

- **Variable didactique**
  - dans la phase 1, le choix des dimensions des différents rectangles pour faire évoluer les procédures de calcul du côté du carré est un exemple de variable didactique. On note un saut informationnel quand les dimensions choisies notamment empêchent le recours effectif au dessin.

- dans la phase 2, les dimensions du rectangle imposent des méthodes de démonstration de niveaux fort différents ; à ce titre ce sont des variables didactiques.

- La notion de **preuve** : cette situation permet de montrer les limites de la preuve pragmatique et la nécessité de preuves intellectuelles.

- La **contextualisation** d'une notion : cette contextualisation, ici la décision d’aborder la notion de PGCD en utilisant un point de départ géométrique, est à la charge du maître, c'est sa pertinence qui assurera la prise de sens de la notion par les élèves.