# Etude du format A4

Catherine Houdement - Marie-Lise Peltier

*Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - Pau 1992.*

*Cet article présente une situation d'homologie pour les étudiants (PE1) se préparant au professorat des écoles, fondée sur les relations liant les différents formats de papier classique[1] et permettant d'illustrer des aspects de la proportionnalité dans différents cadres géométrique, numérique, graphique, en particulier de mettre en réseau coefficient de proportionnalité, pente de la droite (représentation graphique) et théorème de Thalès.*

## OBJECTIFS

### *Objectifs mathématiques*

- Rencontrer la proportionnalité dans divers cadres
- Approcher $\sqrt{2}$ par les aires
- Voir des exemples de figures semblables (notion de coefficient de forme d'un rectangle)
- Eventuellement sensibiliser à la notion de suite géométrique et de limite de suite

### *Objectifs didactiques*

- Notion de cadres et de changement de cadres
- Notion de preuve
- Différentes phases d'une situation d'apprentissage

## ACTIVITÉ

### *Matériel*

Par personne : trois feuilles de format A4 , calculatrices, règles, compas

### *Organisation*

Travail par groupes de quatre

[1] Origine : *Faire des Mathématiques* , Deledicq ; Lassave. Editions Cedic Nathan 1977

***Consigne 1***
*"Vous disposez d'une feuille rectangulaire que l'on appellera le rectangle F0. Il s'agit d'obtenir d'autres rectangles par pliage et découpage. La consigne **C** de découpage est la suivante : vous pliez le rectangle, dans sa plus grande dimension, en deux parties exactement superposables, vous découpez et vous gardez un rectangle. Ainsi, à partir de F0 vous obtenez F1.*
*Par un procédé récursif, à partir de F1 avec la consigne **C**, vous obtenez F2, puis de proche en proche F3, F4, F5.*
*Vous obtenez donc une famille de rectangles **F** : F0, F1, F2, F3, F4, F5. "*

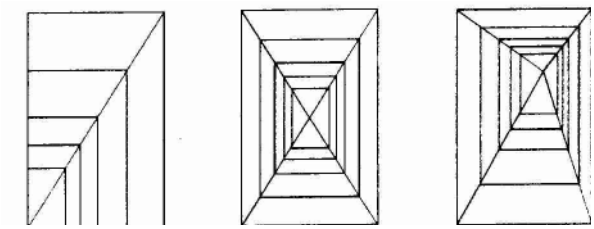
***Consigne 2***
*"Trouvez un empilement régulier, un empilement que vous pouvez décrire, de ces six rectangles. "*

***Synthèse***
- Description des empilements.

Dans la suite la réflexion s'appuie sur les empilements « réguliers » qui gardent parallèles les côtés des différents rectangles.

- Constat de l'alignement des sommets homologues sur une droite : ces droites passent le centre des rectangles ou par un point particulier intérieur à chaque rectangle.

Si le premier empilement réussit, il en est de même des autres.



L'existence de ces dispositions particulières pour une famille de rectangles sera notée sous le nom propriété **P**.

***Consigne 3***
*"Vous laissez cette famille F de côté et vous prenez une nouvelle feuille. Construisez un rectangle R0 de dimensions* ($y_0$, $x_0$)*, qui ne fait pas partie de la famille **F** et tel que :*

$$y_0 > x_0 > y_0/2.$$

*Construisez la famille (**R, C**) obtenue à partir de R0 et de la consigne **C***

Question : *"Peut-on empiler les rectangles **R** pour obtenir la propriété **P** ?"*

***Synthèse***
Pour une famille (**R, C)** construite à partir de R0 quelconque, deux sous familles ont la propriété **P** :

- (R0, R2, R4,...) a la propriété P,
- (R1, R3, R5....) a la propriété P.

En général, la famille **R** entière n'a pas la propriété **P**.

***Consigne 4***
*"Cherchez quelle est la condition sur le rectangle de départ pour que la famille entière construite à partir de ce rectangle et de la consigne **C** vérifie la propriété **P** ? »*

***Synthèse***
On fait ensemble les premiers constats pour la famille **F**.

- Il existe une certaine disposition pour laquelle les quatre sommets sont alignés sur des droites passant par le centre des rectangles et leurs sommets.

- **Les diagonales de chaque rectangle font un angle constant** avec les côtés homologues des rectangles.

- **Le rapport longueur sur largeur est le même** pour tous les rectangles.

- Les rapports $x_i/x_j$ et $y_i/y_j$ sont égaux pour tous i et j

- Si on représente le rectangle Fi par le point Fi de coordonnées ($x_i$, $y_i$) dans un repère orthonormé, les points F0, Fl,..., F6,... , sont **alignés sur une droite qui passe par l'origine.**

- Toutes ces propriétés sont vraies pour les familles (R0, R2, R4…) et (R1, R3, R5…), mais ces deux familles ne respectent pas la condition P.

Voici le tableau des coordonnées approchées des points Fi et la relation des dimensions des rectangles R(2i) :

| | | |
|---|---|---|
| F0 | 21 | 29,7 |
| F1 | 14,85 | 21 |
| F2 | 10,5 | 14,85 |
| F3 | 7,42 | 10,5 |
| F4 | 5,25 | 7,42 |
| F5 | 3,71 | 5,25 |
| F6 | 2,62 | 3,71 |

| | | |
|---|---|---|
| R0 | $x_0$ | $y_0$ |
| R2 | $x_0/2$ | $y_0/2$ |
| R4 | $x_0/4$ | $y_0/4$ |
| R6 | $x_0/8$ | $y_0/8$ |

***Institutionnalisation***

Pour une famille de rectangles qui vérifie la propriété **P**, on dit que :

- le tableau des dimensions exactes :

| | |
|---|---|
| $x_0$ | $y_0$ |
| $x_1$ | $y_1$ |
| $x_2$ | $y_2$ |
| $x_3$ | $y_3$. |
| $x_4$ | $y_4$ |
| $x_5$ | $y_5$ |
| $x_6$ | $y_6$ |

est un **tableau de proportionnalité** de coefficient **k** : $y_i$ = **k** x $x_i$ pour tout i.

- la suite des longueurs est **proportionnelle à** la suite des largeurs

- les rectangles ont tous **le même coefficient de forme** (rapport longueur sur largeur)

- les rectangles sont **homothétiques** les uns des autres et le rapport d'homothétie est toujours le même.

Pour rechercher le coefficient de proportionnalité k de la famille F, plusieurs méthodes sont possibles :

- **dans le cadre numérique**

  - calcul des rapports x/y dans les tableaux de nombres
  - utilisation des aires : aire de F0 = 2 aires de F1 etc.

- **dans le cadre graphique**

  Les points de coordonnées ($x_i$, $y_i$) étant sensiblement alignés, détermination graphique sur papier millimétré de la pente de la droite.

- **dans le cadre géométrique**

  Utilisation du théorème de Thalès (en raison de la présence de triangles homothétiques) permettant de faire le pont entre le cadre graphique et le cadre numérique.

***Conclusion***

Une condition nécessaire pour que (**R, C)** vérifie la propriété **P** est que **R** soit une famille de rectangles ayant tous même coefficient de forme et que ce coefficient soit $\sqrt{2}$.

Cette condition est aussi suffisante après vérification.

## ANALYSE DE CETTE ACTIVITÉ

### Analyse mathématique

Cette situation permet dans un premier temps d'étudier de façon particulièrement bien détaillée, les propriétés numériques, graphiques et géométriques liées aux fonctions linéaires. Il est donc possible de faire une synthèse sur les notions de **listes de nombres proportionnels**, **de fonction linéaire**, **d'homothétie,** de **figures semblables** et de relier le **théorème de Thalès** aux **listes de nombres proportionnels**.
Elle permet également d'introduire la notion de **coefficient de forme des rectangles** et de travailler sur la transformation du coefficient d'agrandissement des mesures quand on passe des longueurs aux aires.
Elle permet d'approcher, dans ses prolongements, la notion de **limite d'une série géométrique**.

### Analyse didactique

- La situation nécessite d'analyser les empilements géométriques, de faire des hypothèses sur les relations numériques reliant les dimensions théoriques des rectangles et de vérifier ces hypothèses sur les découpages : elle incite donc à des raisonnements prenant appui sur des objets sensibles.

- Elle permet de discuter du **concept de preuve** : preuves pragmatiques par observation des rectangles découpés et mesurage de leurs dimensions (avec une estimation des erreurs de tracé et de mesurage), preuves théoriques par étude des relations entre les longueurs et les aires des rectangles **:**

Ainsi la **pluralité des preuves** permet à chacun d'accéder à une certaine conviction et on constate que les preuves les plus rigoureuses ne sont pas nécessairement **les plus convaincantes**. Mais ce sont celles-ci qui ont leur place dans les mathématiques actuelles.

- La situation permet de définir la **notion de cadres** et celle de **changement de cadres**. En effet le problème est posé dans un cadre géométrique, *construire des rectangles et observer des propriétés d'alignement.* La disposition des rectangles avec un sommet commun et des côtés alignés amène à utiliser une représentation graphique (passage au cadre graphique), qui peut induire une étude numérique des listes de dimensions (passage au cadre numérique).

Ce thème de travail, outre ses objectifs mathématiques et didactiques, permet d'enrichir la culture mathématique de l'étudiant et de côtoyer d'autres domaines (technologie, arts plastiques, arts graphiques), notamment par ses prolongements.

**PROLONGEMENTS**

Il est utile d'envisager avec les étudiants un **point culturel** sur les familles de rectangles semblables et de montrer l'utilité des notions mathématiques pour des organisations techniques, notamment la question des agrandissements (id est sans déformation, id est l'obtention de figures semblables)

- les **formats A3 et A4** : la feuille de départ, A0, a une aire de 1 $m^2$ : les formats suivants sont obtenus selon le partage C ; on retrouve que le coefficient de forme est $\sqrt{2}$ (pour faciliter la coupe en deux et les réductions en photocopie). On peut donc calculer les dimensions des feuilles AO à A7.

- les **formats papier B0 à B6**, aussi de coefficient de forme $\sqrt{2}$ : il s'agit également de rectangles semblables à leur moitié, avec B0 d'aire 1,5 $m^2$.

- les **formats photos**, rectangles de coefficient de forme 1,5 , semblables entre eux, mais non semblables à leur moitié :
  13 x 19,5     18 x 27     24 x 36     30 x 45     50 x 75

- les **rectangles d'or**, historiquement célèbres dans l'art et l'architecture, de coefficient de forme $(\sqrt{5}+1) / 2$ (le nombre d'or), semblables entre eux, mais non semblables à leur moitié.

Cette activité peut donner lieu à **d'autres prolongements mathématiques** :

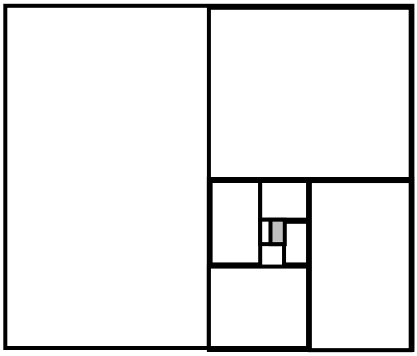
1 - Tracer une **représentation graphique** sur papier millimétré des points F0, F1 jusqu'à Fn à la règle et au compas.

2 - Construire, à la règle et au compas, une famille de rectangles type **R homothétiques et dont le coefficient de forme** est donné.

3 - Comprendre la notion de limite de la **suite géométrique** (Sn) de raison 1/2 en considérant Sn comme l'aire du rectangle de dimensions Xn et Yn avec
(Xn ) suite géométrique de raison $1/\sqrt{2}$
(Yn ) suite géométrique de raison $1/\sqrt{2}$
Ce qui correspond aux rectangles Fn obtenus précédemment.

En effet on peut approcher la notion de **limite de la série géométrique** ( Sn ) en juxtaposant habilement les différents rectangles et en étudiant l'aire de l'assemblage.

L'aire du grand cadre rectangle est 2 et la différence 2 - (1 + 1/2 + ...+1/$2^n$ ) vaut 1/$2^n$ qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini, comme le montre la diminution progressive de l'aire du rectangle grisé Fn quand n devient grand.



4- **Approcher** $\sqrt{2}$ **par des fractions** par la méthode du point de rencontre : si **L** et **l** sont respectivement la longueur et la largeur d'un rectangle de coefficient de forme **k** on cherche, à l'aide d'une disposition particulière de rectangles de dimensions **L** et **1** (comme ci-dessous), deux entiers **p** et **q** tels que **qL** = **pl**
On obtient ainsi des approximations rationnelles de **k** (par exemple ici, 10/7 pour $\sqrt{2}$ ).
Bien entendu cette méthode ne peut prouver que k est éventuellement irrationnel, mais elle permet de parler avec les étudiants sur les notions de commensurabilité.