Catégorisation des problèmes multiplicatifs et tentatives d'unification.

Alain Descaves

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques – Pau 1992.

Après avoir donné une définition générale d'un problème multiplicatif, l'article présente rapidement trois catégorisations possibles de ces problèmes relevant d'approches différentes. Il conclut en proposant une perspective d'unification.

1- Qu'est-ce qu'un problème multiplicatif ?

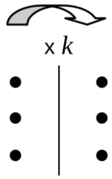
On désigne ordinairement par problème multiplicatif un problème qui exige la mise en oeuvre d'une multiplication ou d'une division. Cette définition est insuffisante, voire dangereuse, car elle peut limiter la pragmatique de la résolution de ces problèmes à la reconnaissance et à l'exécution d'une technique opératoire.

On peut, comme le fait le psychologue Vergnaud, étendre le champ des problèmes multiplicatifs à l'intérieur du champ conceptuel des structures multiplicatives (cf. 2.2). On est alors confronté à un champ immense qui met en jeu aussi bien les concepts de multiplication et de division que ceux de proportion, de fonction linéaire, de rapport, de multiple, de diviseur, de nombre rationnel, de fraction, etc.

On peut également recenser, comme le fait le didacticien Brousseau (cf. 2.1) différentes connaissances enseignées dans la scolarité obligatoire liées à la multiplication et à la division et utilisées dans des problèmes, ainsi qu'identifier les conditions de leur emploi par les élèves (difficultés, réussites, échecs), et les rattacher aux connaissances culturelles visées et utilisées dans diverses institutions. On décrit alors la diversité des savoirs dans le cadre de leur contextualisation.

Il nous a paru souhaitable de donner une définition plus formelle des problèmes multiplicatifs.

Ainsi nous appellerons problème multiplicatif tout problème susceptible, dans un certain domaine de validité, d'une modélisation par des équations à une inconnue du type $a \times b = c$ ou $a \div b = c$, a ou b ou c étant l'inconnue, ou d'une mise en signes par un tableau de proportionnalité du type :



l'inconnue x occupant une des quatre places, c'est à dire d'une modélisation de la forme $f(a) = b$ où f est une fonction linéaire. Un problème multiplicatif n'a pas forcément une solution dans le champ de validité considéré (notamment si le champ n'est pas étendu aux rationnels).

Cette définition ne répond pas à la question de la résolution. Les élèves peuvent bien sûr résoudre un problème multiplicatif sans le modéliser.

2- Catégorisation des situations modélisables par un problème multiplicatif.

2.1. Approche didactique

Catégorisation liée aux pratiques scolaires de référence (conceptions).
Brousseau identifie un certain nombre de variables pertinentes des situations : les nombres, les types de grandeur, la situation didactique, les connaissances antérieures des élèves (liées par exemple à des techniques), etc.
Pour Brousseau « *la connaissance dont les enseignants s'occupent en tant que but ou en tant qu'obstacle à leur activité n'est pas une simple collection de composantes : celles-ci sont organisées en conceptions. Une conception permet de traiter (reconnaître et résoudre) une sous-classe de situations considérées comme comparables (identifiées) à l'aide des mêmes schèmes, des mêmes termes et avec des procédures voisines, justifiées par des "raisonnements semblables" ou traitées à l'aide de propriétés et de connaissances logiquement et fortement liées.*
Des conceptions sont différentes si l'une ne permet pas d'appréhender sans difficulté les problèmes que l'autre permet de maîtriser. Un même élève peut utiliser plusieurs conceptions en ignorant leurs relations ou au contraire en les reliant en une conception plus générale. L'ensemble de ces conceptions ainsi articulé et les problèmes qu'elles peuvent traiter forment le champ conceptuel de la notion mathématique. »[1]

Les catégorisations proposées sont donc liées à l'idée de conception.
Brousseau identifie cinq grandes catégories de conceptions liées à la division, elles-mêmes subdivisables.

1) Les partages,
2) La recherche du terme inconnu d'un produit,
3) La division "fraction",
4) L'application linéaire,
5) La composition d'applications linéaires.

[1] G.Brousseau, « *Représentations et didactique du sens de la division* » in Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, La Pensée Sauvage, Grenoble, 1989.

De même pour la multiplication il est possible de repérer des conceptions liées :

- à l'addition répétée ;
- au produit cartésien (arbre et tableau) ;
- au produit-mesure, les conceptions attachées aux grandeurs continues se distinguant de celles attachées au "discret".

2.2 Approche cognitive et mathématique

Catégorisation liée à des représentations symboliques.
Vergnaud replace les problèmes multiplicatifs dans le champ conceptuel des structures multiplicatives. Ce champ est *« à la fois l'ensemble des situations dont le traitement implique une ou plusieurs multiplications ou divisions, et l'ensemble des concepts et théorèmes qui permettent d'analyser ces situations : proportion simple et proportion multiple, fonction linéaire et n-linéaire, rapport scalaire direct et inverse, quotient et produit de dimension, combinaison linéaire et application linéaire, fraction, rapport, nombre rationne, multiple et diviseur. etc. »*[2]

Un certain nombre de théorèmes donnent dans ce champ leur fonction aux concepts, par exemple les propriétés de linéarité :

$$f(nx) = nf(x) \text{ et } f(ax+by) = af(x) + bf(y).$$

Les relations de base les plus simples sont pour Vergnaud quaternaires et non ternaires contrairement aux structures additives.

Il est possible de générer quatre classes de problèmes élémentaires :

1 - La multiplication.
ex : "J'ai 3 paquets de yaourts. Il y a 4 yaourts dans chaque paquet. Combien ai-je de yaourts ?"

1	a
b	•

2 - La division-partition.

[2] G. Vergnaud. *Théorie des champs conceptuels* in Revue de didactique des mathématiques, Vo1.10/2.3, La Pensée Sauvage, Grenoble, 1991.

ex : "J'ai payé 40 francs pour trois bouteilles de vin. Quel est le prix d'une bouteille ?"

1	•
b	c

3 - La division-quotition.

ex : "Pierre a 24 francs et veut acheter des paquets de bonbons à 6 francs le paquet. Combien de paquets peut-il acheter ?"

1	a
•	c

4 - La 4ème proportionnelle.

ex : "3 pelotes de laine pèsent 200 g. Il en faut 8 pour faire un pull. Combien pèse le pull ?"

a	b
c	•

Les problèmes ternaires existent également, par exemple les produits de mesure, reliés aux dimensions simples (longueur, temps, etc.), aux dimensions produits (aire, volume, etc.), aux dimensions quotients (vitesse, densité, etc.).

La difficulté des problèmes multiplicatifs dépend aussi, selon Vergnaud, de la taille des nombres, de la nature et de la valeur des quotients et du coefficient de proportionnalité, de la dimension, des grandeurs continues ou discrètes, etc.

2.3. Point de vue cognitiviste

Catégorisation liée aux représentations cognitives (iconiques en particulier) déclenchées par la lecture des énoncés.
Les significations déclenchées par la lecture des énoncés reposent sur la reconnaissance de "formes", sur leur mise en relation et leur traitement symbolique. Une "forme" peut par exemple être attachée à un mot déclencheur (partager, en tout, etc.).
Pour catégoriser les problèmes multiplicatifs, le point de vue cognitiviste oblige à penser le problème de l'interprétation des énoncés en fonction des possibilités de représentation et de traitement dont dispose le sujet. Ces représentations cognitives sont de différents types (iconiques, symboliques de type linguistique ou liées à l'écrit mathématique et à sa correspondance orale). Ce problème de l'interprétation dépend aussi des possibilités de correspondance entre les différents systèmes de représentation.

Pour caractériser les problèmes multiplicatifs il convient donc d'intégrer différents niveaux d'analyse : cognitif, pragmatique et culturel.
Pour sensibiliser les professeurs d'école à ces différentes catégorisations, il est possible de leur fournir un corpus d'énoncés de problèmes multiplicatifs et de leur demander de les classer. Il est également possible de leur demander d'inventer un ou des énoncés correspondant aux différentes classes liées à ces catégorisations.

3- Approches pédagogiques des problèmes multiplicatifs.

3.1. L'éclatement des conceptions.

L'absence de modèles unificateurs (en particulier dans les manuels) débouche sur l'éclatement des conceptions. L'apprentissage consiste, dans un cadre béhavioriste, à multiplier les connexions stimulus-réponses : une opération est associée à chacun des modèles.
Les manuels scolaires présentent parfois un corpus de problèmes afin que les élèves identifient le « bon outil ». Mais aucune aide n'étant fournie à ces derniers, ils restent confrontés à la diversité des situations.

3.2. Tentatives d'unification.

Parmi les tentatives d'unification des problèmes multiplicatifs on peut retenir trois conceptions :

- L'unification se fondant sur une structuration spontanée chez les élèves (maturation, équilibre) suite à la confrontation avec les différentes conceptions.
- L'unification provenant de la représentation par des tableaux de proportionnalité, les opérateurs jouant un très grand rôle dans cette approche (exemple des années "mathématiques modernes").
- L'unification par l'algébrisation (liée essentiellement à la possibilité de pouvoir nommer l'inconnue) qui permet la découverte de règles de transformation de l'écrit (ex : $X \times a = b$ implique $b \div a = X$). Ce sont les modélisations mathématiques et leurs relations qui permettent l'unification des problèmes multiplicatifs. Les structures de sens sont internes aux mathématiques. Ce sont, dans cette conception, les mathématiques qui déterminent les formes de la réalité et non les mathématiques qui sont en rapport d'application avec le monde[3]. L'algébrisation n'exclut ni le recours à d'autres systèmes symboliques du type Vergnaud, ni la réflexion sur les différentes conceptions type Brousseau. Par contre, elle va bien à l'encontre des pratiques ordinaires.

[3] A. Descaves. *Comprendre des énoncés et résoudre des problèmes,* Pédagogies pour demain, Didactiques, Hachette, 1992.