Catégorisation des problèmes additifs, difficultés liées à la place de la question

Catherine Houdement

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques – Cahors 1991.

Cet article est essentiellement destiné à faciliter l'assimilation de la typologie de Vergnaud. Dans une optique de formation il peut subir diverses adaptations :
- proposer des énoncés ayant été effectivement soumis à des élèves ([1] et [2]).
- faire le lien entre certains taux de réussite [1] et le type de problème traité.
- transformer des énoncés de problèmes en vue d'améliorer le taux de réussite [3].
- recenser les procédures effectivement utilisées par les élèves en fonction du type de problème [2].

1- Les 6 grandes catégories de relations additives selon G. Vergnaud

Première catégorie :
deux mesures se composent pour donner une mesure.

Deuxième catégorie :
une transformation opère sur une mesure pour donner une mesure.

Troisième catégorie :
une relation relie deux mesures.

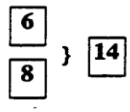
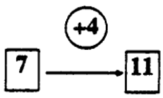
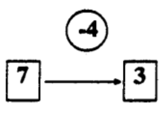
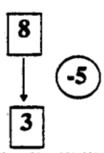
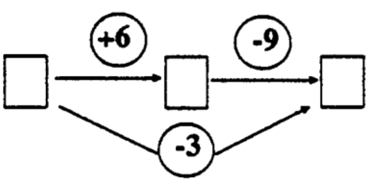
Quatrième catégorie :
deux transformations se composent pour donner une transformation.

Cinquième catégorie :
une transformation opère sur un état relatif (une relation) pour donner un état relatif.

Sixième catégorie :
deux états relatifs (relations) se composent pour donner un état relatif.

2- Pour faire fonctionner ces catégories,

G. Vergnaud a donné les exemples suivants :

1. Paul a 6 billes en verre et 8 billes en acier. Il a en tout 14 billes	
 6 + 8 = 14	I
2. Paul avait 7 billes avant de jouer. Il a gagné 4 billes. Il en a maintenant 11.	
 7 + [+4] = 11	II
3. Paul avait 7 billes avant de jouer. Il perd 4 billes. Il en a maintenant 3.	
 7 + [-4] = 3	II
4. Paul a 8 billes Jacques en a 5 de moins. Il en a donc 3.	
 8 + [-5] = 3	III
5. Paul a gagné 6 billes hier et il en a perdu 9 aujourd'hui. En tout il en a perdu 3.	
 [+6] + [-9] = [-3]	IV

6. Paul devait 6 billes à Henri. Il lui en rend 4. Il ne lui en doit plus que 2.	
$-6 \xrightarrow{+4} -2$ $[-6] + [+4] = [-2]$	V
7. Paul doit 6 billes à Henri mais Henri lui en doit 4. Paul doit donc 2 billes à Henri.	
$\left.\begin{array}{c}-6\\+4\end{array}\right\} -2$ $[-6] + [+4] = [-2]$	VI
8. Paul doit 6 billes à Henri et 4 billes à Antoine. Il doit 10 billes en tout.	
$\left.\begin{array}{c}-6\\-4\end{array}\right\} -10$ $[-6] + [-4] = [-10]$	VI

Codage Vergnaud :
- un entier dans un **rectangle** est un **naturel**
- un entier dans un **cercle** est un **relatif**
- une **accolade** représente une composition d'éléments de même nature
- n est un naturel, (-n) ou (+n) un relatif
- **+** est addition de deux naturels, d'un naturel et d'un relatif, de deux relatifs
- la flèche indique une **transformation** ou une **relation**, i.e. composition d'éléments de natures différentes

3- Exemples de problèmes donnés par G. Vergnaud pour faire fonctionner le classement

a) *Jean a joué deux parties de billes. A la première, il a gagné* 16 *billes. A la seconde partie, il en a gagné* 9. *Que s'est-il passé en tout* ?

b) *En* 1974, *la population de Paris est de 2 844 000 habitants. Elle a diminué de 187 000 personnes en* 5 *ans. Combien d' habitants y avait-il en* 1969 ?

c) *Jean-Pierre a* 9 *bonbons. Il en donne* 4 *à sa petite sœur. Combien lui en reste-t-il* ?

d) *Dans une ville, l'excédent des naissances sur les décès a été de* 1293 *personnes entre 1950 et 1960 et de 4084 entre 1950 et 1970. Que s'est-il passé entre 1960 et 1970* ?

e) *Henri vient de trouver 2,60 F sur le trottoir. Il les met dans son porte-monnaie. Il a alors en tout 3,90 F. Combien avait-il dans son porte-monnaie avant de faire sa découverte* ?

f) *Pierre a joué deux parties de billes. Au cours de la première partie, il en a gagné* 7. *Il a joué une seconde partie. En faisant ses comptes pour les deux parties, il s'aperçoit qu'il a perdu* 2 *billes en tout. Que s'est-il passé à la seconde partie* ?

g) *Il y avait* 17 *personnes dans l'autobus, il en monte* 4. *Combien y en a-t-il maintenant?*

h) *La réserve d'or d'une banque a baissé de* 642 *lingots au cours de 1'année* 1973. *Au cours du premier semestre de la même année, elle avait baissé de 1031 lingots. Que s'est-il passé au cours du second semestre ?*

i) *Un parisien part en vacances en voiture. Au départ de Paris, son compteur kilométrique marque 64809 km* ; *à son retour, il marque* 67351 *km. Combien de kilomètres a-t-il parcourus en voiture pendant les vacances ?*

j) *Jean a joué deux parties de billes. A la première partie il a gagné* 9 *billes. A la seconde partie il en a perdu* 16. *Que s'est-il passé en tout ?*

k) *Paul vient de jouer aux billes. Il avait* 41 *billes avant de jouer. Il en a maintenant* 29. *Combien de billes a-t-il perdues ?*

l) *Jean a joué deux parties de billes. A la première partie, il a gagné* 16 *billes. A la seconde partie il en a perdu* 9. *Que s'est-il passé en tout ?*

m) *Pascal distribue un bonbon à chacun de ses* 7 *camarades. Il distribue ainsi* 7 *bonbons. Il lui en reste alors* 4. *Combien de bonbons avait-il avant la distribution ?*

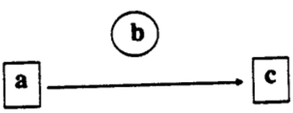
Certains enfants raisonnent alors de la façon qu'illustre l'exemple suivant :

"Si Pascal a 10 bonbons et qu'il en donne 7, *il lui en reste* 3 ; *ce n'est pas ça, il faut plus. Si Pascal a* 1l *bonbons et qu'il en donne* 7, *il lui en reste* 4. *C'est ça... il avait* 1l *bonbons."*

4- Étude des difficultés liées à la place de la question

La catégorisation précédente ne fonctionne pas dans un premier temps sur un texte avec question. Il faut aussi analyser le type de difficultés liées à la "place" de la question dans la relation additive (c'est-à-dire le schéma ternaire) :

1- *analyse de la catégorie II*



Selon que la question porte sur a, b, c, on obtient 6 classes sous-jacentes de problèmes :

question sur :

	c	b	a
b>0	1	2	3
b<0	4	5	6

(cf. 3. pour trouver des exemples)

G. Vergnaud étudie les difficultés en ces termes :

-l et 4

Calcul relationnel le plus simple car on applique une transformation directe à un état initial.

1 est toujours possible, 4 pas toujours (-b < a < b)

Remarque fondamentale : dans ce schéma, la soustraction apparaît "sui generis", a une signification propre, ne dépend pas de l'introduction préalable de l'addition.

En effet perdre, donner, descendre,... ont des significations par elles-mêmes en tant que transformations.

-2 et 5

Calcul relationnel plus complexe, échecs plus tardifs, même avec des petits nombres; pas avant fin de CP ou début de CEl.

Procédures de réussite à ces problèmes :

- celle du "complément" : rechercher ce qu'il faut ajouter ou enlever à l'état initial pour obtenir l'état final, sans faire la soustraction.

- celle de la "différence" : plus élaborée, raisonner par soustraction des deux états, donc réaliser que si b fait passer de a à c, alors b = c - a.

Les procédures employées d'abord sont celles de complément.

-3 et 6

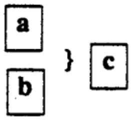
Calcul relationnel encore plus complexe car la solution canonique fait inverser la transformation directe et appliquer à l'état final cette transformation inverse.

Plusieurs procédures:

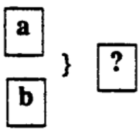
- celle canonique : si b fait passer de a à c, -b fait passer de c à a donc on fait c - b = a.
- celle de complément : ne fonctionne que si b > 0 et lorsque les nombres se prêtent à un calcul mental.
- celle de l'état initial hypothétique (cf. 3, m).

Conclusion : ainsi, une relation n'implique pas des calculs relationnels d'égale difficulté. De plus, dans ces conditions, il n'est pas étonnant que les enfants recourent à des procédures non canoniques.

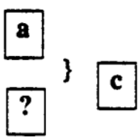
2- *analyse de la catégorie 1*



Seulement deux grandes classes de problèmes.
1 se résout par une addition



2 se résout soit par une soustraction soit par une procédure de complément.



Remarque fondamentale : ici la soustraction est nécessairement comprise comme opération inverse de l'addition :
a + x = c   x = c - a
cela constitue déjà une forme de calcul relationnel et est. au sens soustraction, un peu plus complexe que la soustraction sui generis précédente.
Ce serait donc une erreur de ne considérer que des problèmes où la soustraction est une opération déjà subordonnée à l'addition.

5- Autres difficultés liées aux problèmes

Bien entendu, dans cette étude, il a été occulté les autres types de difficultés liées aux textes et nombres utilisés par les problèmes, notamment :

* la facilité plus ou moins grande du calcul numérique nécessaire.

ex: dans *"j'ai* 5 *billes et encore* 8 *billes"*, le calcul relationnel est le même que dans *"j'ai* 177 *allumettes et encore* 285", mais le calcul est plus complexe.

La taille des nombres (absolue et relative) interdit parfois l'utilisation de procédures NON canoniques.

* l'ordre, la présentation des informations:
    - sont-elles noyées dans le texte ?
    - où est placée la question?
    - les temps employés éclairent-ils le texte ?..

Tout ce qui est lié à la lecture fonctionnelle du problème.

Il y a donc beaucoup de difficultés, mais, d'après Gérard Vergnaud, *"la source principale, celle qui éclaire les autres"* est cette catégorisation en 6 classes de problèmes et sous-classes de calculs relationnels.

6 - Poursuite

* Quelles classes sont pertinentes pour l'école élémentaire ?
* Faire fonctionner la grille sur des problèmes de l'école élémentaire :
    - ceux du départ
    - ceux d'un manuel CE2 ou CEl.
    - ceux de l'évaluation CE 2-6ème[1]
* Comparer les problèmes qui servent à évaluer, et ceux qui servent à entraîner dans les manuels, dans une classe.
* Faire fabriquer des problèmes I, II, V. Les faire passer en classe.

[1] A l'issue des utilisations de la grille de G. Vergnaud, on peut constater que les catégories I, II, III, IV semblent toujours pertinentes. Par contre, les catégories V et VI semblent moins bien fonctionner; certains problèmes relèvent de plusieurs catégories, ce qui permet d'ailleurs de pointer ces catégorisations non pas comme définitives, mais comme outil d'aide à l'analyse.

Bibliographie commentée sur la soustraction

(mars 1991)

Titre : *"La soustraction au CE1"*
Auteur*: Corem*
Editeur : Irem de Bordeaux (parution fin 91)
Contenu : on trouvera dans cette brochure pour les enseignants :

- le compte-rendu de la suite complète des séquences sur la soustraction au CE 1 menées depuis plusieurs années à l'école expérimentale Jules Michelet (COREM) ;
- une étude détaillée de la situation fondamentale (jeu de la boîte) accompagnée des problèmes de dévolution, du rôle et de l'importance des variables didactiques.
- les contrôles et résultats des élèves sur les cinq dernières années (86 à 90) sur toute la progression suivie au CE1.

Titre : *"Sur la résolution de problèmes de soustraction au CE. Étude du rôle de la grandeur des nombres et des différentes représentations de la soustraction en vue de l'élaboration des situations didactiques.*
Auteur : Imana Katembara
Editeur : Irem de Bordeaux
Contenu : cette étude apporte des éléments de réponse aux questions suivantes :

- les procédures utilisées par les enfants de CE pour résoudre les situations soustractives ont-elles un domaine de meilleure efficacité bien déterminé ?
- comment utiliser les réponses à la question précédente pour en tirer bénéfice lors de l'enseignement de la soustraction?
- en admettant qu'il existe différentes conceptions de la soustraction, celles-ci ont-elles des relations avec certaines procédures de résolution ou certaines techniques de calcul connues?

Titre *:"Comment les enfants apprennent à calculer?"*
Auteur : Rémi Brissiaud, PEN Cergy Pontoise.
Éditeur : Retz, 1989
Contenu : L'auteur postule que l'enseignant doit, dès les premiers apprentissages, favoriser le développement des compétences numériques, même sur un domaine restreint.
Il distingue le nombre comme moyen de communication des quantités et comme moyen de mise en relation des quantités. Il préconise l'usage des collections témoins (idée chère à R. Brissiaud : les collections témoins de doigts) et il propose un matériel didactique de sa conception : les réglettes avec cache. Son objectif est d'amener l'enfant du comptage au calcul pensé, via le surcomptage.

R Brissiaud se situant "au-delà de Piaget", fait référence, tout en prenant ses distances, à Gelman, Fuson, Von Glaserfeld et Brousseau. Il se rapproche en fait de la méthode instrumentale de Vigotsky.

Conclusion : le plan structuré et la rédaction claire rendent la lecture aisée et agréable, même si on n'est pas obligé d'adhérer aux conceptions de l'auteur.

Niveaux concernés : Maternelle (moyenne et grande section) et CP

Titre : *"Calculs numériques et calculs relationnels dans la résolution de problèmes d'arithmétique."*
Auteur : François Conne, psychologue, Université de Genève
Editeur : La Pensée Sauvage, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 5-3 p269 à 332.
Contenu : l'auteur souligne l'importance des moyens symboliques servant de support aux résolutions de problèmes de type additif. Tout en s'appuyant sur les travaux de Vergnaud, il s'en distancie en montrant l'intérêt de la représentation équationnelle sur l'ensemble des entiers relatifs, que Vergnaud rejette au profit de représentations symboliques spécifiques.
Conclusion : analyse psychologique très fine de l'activité de résolution de problèmes de type additif chez des enfants de 8-10 ans.

Titre : *"L'enfant, la mathématique et la réalité."*
Auteur : G Vergnaud, psychologue
Editeur : Peter Lang, 1983, collection Exploration Recherches en Sciences de l'Education.
Contenu : l'ouvrage "analyse les problèmes posés par l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire et décrit de manière détaillée différentes étapes et différents aspects du processus de mathématisation du réel, par lequel on peut conduire l'enfant à donner du sens aux concepts mathématiques et à en comprendre les propriétés".
Le chapitre IX est consacré aux problèmes de type additif, dont la solution n'exige que des additions et des soustractions. Il y est proposé une catégorisation très fine de ces problèmes.
Conclusion : Vergnaud démontre dans le chapitre IX de cet ouvrage qu'il existe plusieurs sortes de relations additives, donc plusieurs types d'additions et de soustractions, et que la soustraction ne saurait être considérée comme seconde et toujours subordonnée à l'addition.

Titre : *"La théorie des champs conceptuels."*
Auteur : G Vergnaud, psychologue
Editeur : La Pensée Sauvage, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 10/2-3 p133 à 169.
Contenu : l'auteur propose une théorie psychologique du concept ou mieux de la conceptualisation du réel.
En œ qui concerne les problèmes de type additif, il montre la nécessité, pour les élèves, d'utiliser des représentations symboliques spécifiques, notamment pour représenter les transformations et les relations négatives.
Conclusion : cet article unifie par une théorie les différentes études proposées dans son ouvrage. *L'enfant, la mathématique et la réalité"*.

Titre : *"Faire comprendre la soustraction"*
Auteur : Marcelle Pauvert
Editeur : Nathan CNDP Les pratiques de l'Education 1990
Contenu : ouvrage court et d'accès facile en trois parties
1) difficulté de l'apprentissage de la technique de la soustraction et de son utilisation dans les problèmes.
2) quelques compléments théoriques sur la résolution de problèmes, les problèmes additifs, l'évolution des programmes pour cerner le "contexte" de la soustraction.
3) quelques pistes d'activités élèves.
Conclusion : en résumé, une lecture rapide pour cerner la soustraction et cerner certaines de ses difficultés.

[3] **Titre**: *"L'enfant et le nombre"*
Auteur: Michel Fayol
Editeur : Delachaux et Niestlé, 1990
Contenu : une synthèse pointue et étayée sur l'état actuel des recherches, françaises et étrangères, en psychologie cognitive, sur l'enfant et le nombre.

Bibliographie complémentaire:

[1] revue grand N n° 38 1986
[2] ERMEL CE1 pp.98-122 Hatier 1995