Une approche minimale de la notion de grandeur en PE1

Maryvone Le Berre - Catherine Taveau

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques – Angers 1995.

Cet article propose un dispositif destiné à la formation initiale prévu pour deux séances de trois heures. Les situations décrites visent à dissocier « aire » et « forme », « aire » et « nombre – mesure », « aire » et « périmètre ». Les modalités d'organisation s'efforcent de prendre en compte la diversité des réponses que les étudiants peuvent produire aux exercices proposés.

Ce texte décrit deux séances de formation de trois heures conçues pour des étudiants de PE1 sur le thème « aires et périmètres ». Le dispositif complet est le suivant :

- Un test diagnostique (30 minutes) utilisé pour constituer les groupes de travail de la première séance.
- Une première séance de trois heures sur la notion d'aire.
- Une deuxième séance de trois heures pour différencier aire et périmètre et une synthèse générale.
- Plus tard dans l'année, un test final et une analyse avec les étudiants de la démarche suivie.

Objectifs notionnels

Appréhender les notions de longueur et d'aire en tant que grandeurs mesurables, sur lesquelles on peut définir des opérations (comparaison, addition, multiplication par un scalaire), avant tout passage à la mesure.
Nous faisons l'hypothèse que la plupart des étudiants ont, sur le sujet, des connaissances et des représentations tronquées, par exemple qu'il s'agit essentiellement pour eux, comme pour leurs futurs élèves, de connaître et d'appliquer des formules.
La plupart n'ont jamais entendu parler de « grandeurs ». Or nous estimons que sous le chapeau « mesure », dans le libellé des programmes, les PE devraient reconnaître qu'il s'agit de « grandeurs et mesure de ces grandeurs ». Ils devraient savoir ce qu'on entend par exemple par « dissocier grandeur et forme, grandeur et nombre ».

Objectifs didactiques

- Entraînement à l'analyse à priori ;

- Reconnaissance sur des exemples de la notion de variable didactique ;
- Notion de « théorème élève ».

En cohérence avec la priorité donnée aux objectifs notionnels, les étudiants sont placés en situation d'élèves durant la plus grande partie des deux séances. Cependant le dispositif lui-même est conçu pour permettre une transposition, ce qui suppose de prendre du temps, durant les séances, et /ou lors d'un rappel, pour expliciter et analyser certains choix, en particulier :

- o Repérage des connaissances et représentations initiales des étudiants ;
- o Travail différencié sur un même problème en jouant sur les variables de la tâche ;
- o Appui sur la mise en commun et le débat entre pairs.

1. Le test

Voir fiches 1 à 3 en annexe.

Fiche 1 : Elle a pour unique fonction de permettre de lever les ambiguïtés éventuelles sur les termes employés.

Fiche 2 : Elle vise à repérer différents niveaux de connaissance à propos de l'aire du triangle.

Inventaire des procédures prévues

- Blocage (il n'y a pas de hauteur pour le triangle B) et non réponse.
- Jugement à vue : « A est plus grand ».
- Mesurage des bases et hauteurs « prototypiques » et calcul. Même sans erreur de calcul, les réponses pourront être : *aires égales, presque égales, ou inégales.*
- Mesurage et calcul en prenant la largeur de la bande comme hauteur pour les deux triangles.
- Raisonnement du type *« même base et même hauteur pour les deux triangles ».*
- Utilisation de surfaces intermédiaires (parallélogrammes, rectangles,…).
- Découpage d'un triangle pour le comparer à l'autre.

Fiche 3 : Tirée d'une évaluation nationale à l'entrée en sixième, elle sert de détection éventuelle d'un théorème-élève très persistant.

Inventaire des procédures prévues

Pour l'aire :

- Comptage des carreaux.

Pour le périmètre :

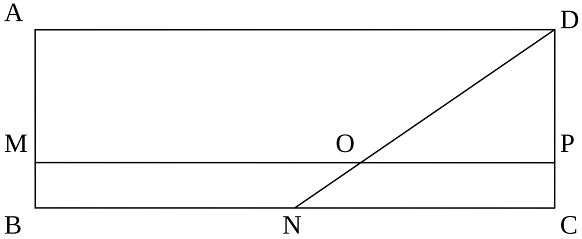
- Jugement à vue (donc sur l'aire).
- Mise en œuvre du théorème – élève : *« si l'aire est plus grande, le périmètre est plus grand ».*
- Comptage des « carreaux du bord ».

- Comptage des côtés des carreaux du bord.
- Décomposition des deux périmètres en deux parties : une « frontière commune » et deux parties de même longueur.

2. Première séance : comparaison d'aires.

Cette première séance a pour objectif la distinction entre surface, aire, mesure de l'aire, objectif qui peut être annoncé dès le départ. Elle doit faire émerger des procédures de comparaison d'aires ne faisant pas appel à la mesure, d'autres faisant intervenir la mesure soit d'un point de vue unidimensionnel, soit d'un point de vue bidimensionnel.

a) Un problème.



MB est égale au quart de AB, N est le milieu de [BC].
Les surfaces MBNO et ODP ont-elles la même aire ?

b) Analyse a priori des procédures de résolution.

Raisonnement par différence

Pour démonter l'égalité des aires, il suffit de démontrer celle des aires du rectangle MBCP et du triangle NCD.

Celle-ci peut être obtenue de différentes façons :

<u>Algébriquement</u> : en appelant a et b les mesures des côtés du rectangle ABCD, on obtient facilement qu'elles sont toutes deux égales à ab/4.

<u>Géométriquement</u> : le rectangle est pavable par quatre rectangles superposables à MBCP, et par quatre triangles superposables à NCD.

<u>Numériquement</u> : si l'énoncé ne donne aucune information sur les longueurs, cela suppose un mesurage, donc en principe une incertitude. En fait il peut y avoir deux démarches assez différentes :

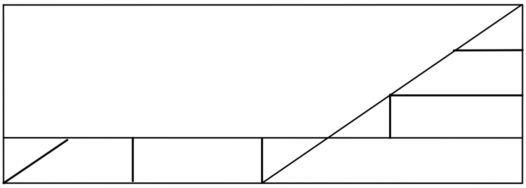
1. Mesurage des données « utiles au calcul », longueur et largeur du rectangle, base et hauteur du triangle, sans tenir compte des contraintes de l'énoncé.
2. Prise en compte des contraintes de l'énoncé soit pour guider, soit pour corriger le mesurage. Par exemple, on peut mesurer AB et en déduire BM, ou mesurer les deux « en s'arrangeant » pour que l'un soit quatre

fois l'autre, et c'est un arrangement qui peut rester implicite. La prise en compte explicite des relations entre longueurs rapproche la procédure numérique de la procédure algébrique, bien qu'elle ne porte pas sur le même objet.

Comparaison directe

Algébriquement : cela suppose de déterminer les longueurs MO et OP (respectivement 5a/8 et 3a/8) en utilisant le théorème de Thalès ou une relation de similitude, par exemple, puis de conduire un calcul algébrique relativement lourd pour des PE (on trouve 9ab/64).

Géométriquement : pavage des deux surfaces avec unité commune. Découpage d'une surface pour paver l'autre, par exemple :



Numériquement : après mesurage. Si les mesures sont des nombres entiers, l'incertitude liée au mesurage risque évidemment d'être complètement évacuée.

c) Composition des groupes et choix des énoncés.

L'hétérogénéité des étudiants peut être maximale devant un tel problème. Il nous semble capital que chacun puisse travailler à son niveau. La fiche 2 du test (comparaison des aires de deux triangles) permet de prévoir au moins deux types de difficultés : (1) blocage, hésitation à « bricoler », en l'absence de connaissances suffisamment sûres.

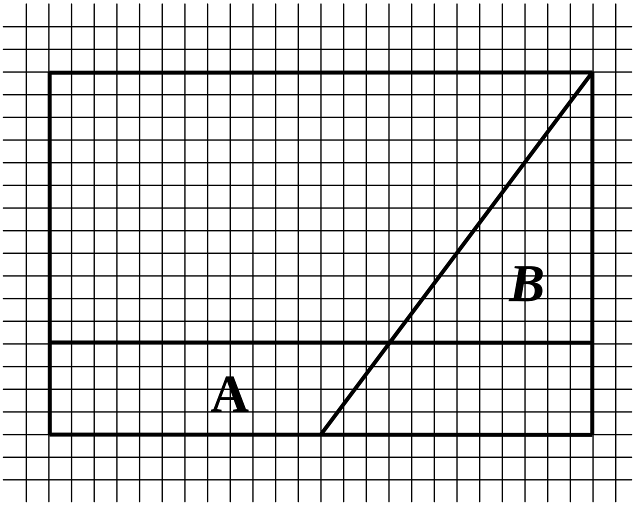
(2) recours systématique au mesurage des longueurs, et calcul, sans analyse de la figure.

Il nous paraît judicieux de constituer des groupes « homogènes » par rapport à ces comportements prévus, en proposant des versions différentes du problème.

Première version

Pour ceux qui ont produit des réponses erronées ou n'ont pas répondu à la fiche 2, il paraît important dans un premier temps de faciliter la mobilisation des procédures par découpage - recollement ou pavage, d'où le choix d'un support quadrillé, et de valeurs « sympathiques » pour a, b et a/b.

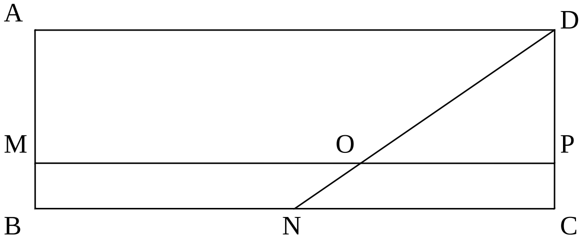
Le papier quadrillé permet également de communiquer graphiquement les données.



Les aires des surfaces A et B sont-elles égales ?

Deuxième version

Pour ceux qui privilégient mesurage des longueurs et calcul, le choix vise à disqualifier (relativement) cette méthode, au profit de méthodes géométriques, d'où le choix du papier blanc avec des mesures en cm peu commodes.

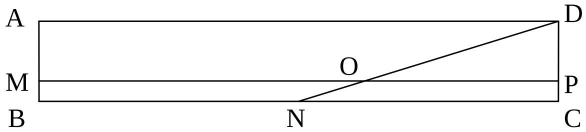


AB = 4MB ; N est le milieu de [BC] : les surfaces MONB et ODP ont-elles la même aire ?

Troisième version

Restent ceux qui ont répondu de façon satisfaisante au test en utilisant une des procédures suivantes : « *même hauteur, même base* », « *utilisation de surfaces intermédiaires* », « *découpage d'un triangle et comparaison à l'autre* ».

L'objectif principal est de faire émerger la diversité des procédures et de voir que ce problème peut se résoudre à différents niveaux. Il n'est pas certain, cependant que le raisonnement par différence apparaisse. On a opté pour un rectangle très allongé, une forme peu commode dont on espère que cela favorise une discussion sur la validité du pavage.



AB = 4MB ; N est le milieu de [BC] : les surfaces MONB et ODP ont-elles la même aire ?

Consigne

Tous les groupes ont la même consigne :

1. Répondre à la question.
2. Chercher tous les moyens possibles pour répondre à la question.
3. Comment un élève de cycle 3 pourrait-il procéder pour répondre à la question ? (en modifiant au besoin certaines dimensions ou le support papier…)

La question 2 et surtout la question 3 amènent à discuter les contraintes liées à certains choix des variables. Elles permettent aussi de gérer l'hétérogénéité du groupe (pour le niveau comme pour la vitesse de travail) tout en préparant le travail commun.

d) Déroulement de la séance

Constitution des groupes et distribution des fiches de travail

La consigne est commune et écrite au tableau. Les étudiants sont avertis qu'au bout d'une heure, chaque groupe devra avoir rédigé une affiche résumant les procédures de résolution identifiées (réponse à la question 2 de la consigne).

Mise en commun

- Inventaire et analyse des procédures de résolution. Traitement des erreurs éventuelles.
- Quelles sont parmi les procédures proposées, celles qui utilisent, implicitement ou non, une mesure ? Celles qui utilisent la mesure de longueurs ?
- Ebauche de classification et de hiérarchisation de procédures.
- Identification des valeurs des variables pour chaque figure et de leurs effets.

Exercices de renforcement

Travail individuel ou par groupes, voir annexe 2.

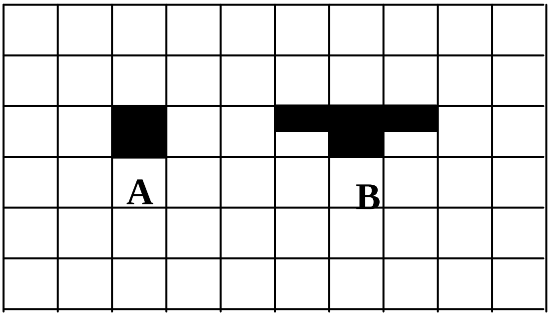
3. Deuxième séance: Différenciation aire /périmètre. Synthèse sur la notion de grandeur géométrique. Approche des problèmes d'enseignement.

La deuxième séance doit permettre d'aborder la notion plus générale de grandeur et d'en montrer la pertinence pour l'enseignement. Il s'agit tout d'abord de préciser les relations entre aire et périmètre, deux grandeurs différentes pour une même surface, et de rectifier une erreur courante, qui a pu apparaître lors du test initial. Ce dernier objectif ne peut évidemment être annoncé.

a) Différenciation aire/périmètre.

Le problème

On voudrait trouver une surface dont l'aire est plus petite que celle de A et dont le périmètre est plus grand que celui de B. Est-ce possible ?



Phase 1 : Pari initial, puis travail en groupes homogènes.

Le problème est écrit au tableau. Les étudiants ont cinq minutes pour comprendre la consigne et se prononcer, sans rien écrire.

Ils sont invités à donner leur réponse spontanément. Le formateur fait l'appel des réponses et les comptabilise : *c'est possible, c'est impossible, autre réponse*, en faisant expliciter la position de ceux qui se placent dans la troisième catégorie (*je ne peux pas savoir sans essayer, ça dépend de la figure, je n'ai aucune idée, etc..).*

Les étudiants se regroupent alors suivant leur réponse, et la consigne suivante est donnée :

1. <u>Réponse : *C'est possible*</u>
   Consigne : *Justifiez. Pouvez vous modifier la figure, ou les deux de façon que la réponse soit : « c'est impossible » ?*

2. <u>Réponse : *C'est impossible*</u>
   Consigne : *Justifiez. Pouvez vous modifier la figure, ou les deux de façon que la réponse soit : « c'est possible » ?*

3. <u>Réponse : *Je ne sais pas*</u>
   Consigne : *Pouvez vous modifier une figure, ou les deux, de façon que :*
   (1) la réponse soit : « C'est possible » ;
   (2) la réponse soit : « C'est impossible» ?

Si certains groupes n'arrivent pas à la conclusion *« c'est toujours possible théoriquement »,* on intercale la face 1bis.

Phase 1bis : Travail en groupes hétérogènes

On mixe rapidement les groupes précédents.

Consigne : *Il s'agit de savoir si le problème posé a ou non une solution, d'abord pour les figures données, puis plus généralement dans tous les cas de figure. Vous devez vous mettre d'accord sur une réponse commune.*

Remarques :

- En posant la question du « toujours possible », on se situe implicitement dans une théorie générale qui va nécessiter d'envisager des figures idéales, des cas limites, et l'emploi du raisonnement déductif. Cette question peut rester ouverte, mais son statut de question théorique doit être pointé.
- Un certain nombre de procédures (pavage, découpage de surfaces) développées, et même encouragées, dans la première séquence, montrent ici leurs limites. Les moyens de validation changent en même temps que le statut de la question. C'est également à noter.
- Cette question très ouverte permet de relancer ou maintenir la recherche de chacun, en évitant que les uns ne convainquent trop vite les autres.

Phase 2 : Conclusion

Un seul exemple suffit à invalider la réponse « c'est impossible », la phase 1bis a, s'il en était encore besoin, fait disparaître cette réponse. Il peut être utile, dans un premier temps, de revenir sur les réponses spontanées et sur les raisons qui ont fait changer d'avis.

L'objectif de l'activité est ensuite énoncé. Il s'agissait de pointer l'existence d'un « théorème- élève » résistant, et de le démonter :

Contrairement à une « intuition » très répandue, aire et périmètre d'une surface ne varient pas toujours dans le même sens.

On peut alors entamer une discussion puis apporter des éléments d'analyse didactique sur l'origine de cette erreur en s'appuyant sur les travaux de M.J.Perrin.

b) Synthèse sur les notions mathématiques abordées.

Elle porte sur les points suivants :

- Notion de grandeur, grandeur mesurable ;
- La mesure d'une grandeur suppose le choix d'une unité ou plutôt d'un système d'unités ;
- La mesure d'aires comme produit de mesures de longueurs.

c) Approche des problèmes d'enseignements.

Certaines hypothèses avancées par M.J. Perrin dans sa thèse sont alors présentées et défendues :

« Les problèmes d'aires mettent de façon essentielle en relation les cadres numériques et géométriques. Un certain nombre de difficultés bien connues des élèves sont liées au traitement des problèmes d'aire soit du point de vue des

surfaces (considérées comme parties du plan), soit du point de vue des nombres, sans établir de relation entre ces points de vue. D'autre part, une identification trop précoce des grandeurs aux nombres semble favoriser l'amalgame entre les différentes grandeurs, en particulier aires et longueurs… Le développement dans l'enseignement du concept d'aire en tant que grandeur permettrait aux élèves d'établir les relations nécessaires entre les cadres numériques et géométriques. »
Ces hypothèses conduisent à développer des activités permettant de dissocier les grandeurs d'une part des objets (segments, lignes brisées, surfaces), d'autre part des nombres, avant d'aborder la mesure et les relations entre ces mesures.
L'exposé s'appuie sur des exemples d'activités et d'exercices (construire une figure de même périmètre qu'une figure donnée sans règle graduée…)

d) Variantes et prolongements possibles.

- Faire analyser des erreurs d'élèves (on peut utiliser par exemple des évaluations début 6ème), avant d'introduire les éléments de l'analyse de M. J. Perrin.
- A partir de manuels scolaires et d'autres documents, chercher ou analyser des activités pour les élèves permettant de différencier aire et périmètre, ou de travailler sur aire ou longueur, sans utiliser la mesure.

Bibliographie

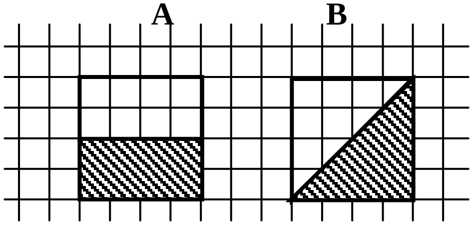
- Brousseau G., *Problèmes de mesurage en CM*, Grand N n°50, 1991-1992.
- Combier G., Philippon M., *Aire et périmètre*, IREM Lyon, 1994 (Activités pour la sixième, accessible aux étudiants).
- Douady R., Perrin M.J., *Aires de surfaces planes*, petit x n°6 et n° 8, 1984-1985, IREM de Grenoble ; et Grand N n°39-40, 1986.
- Douady R., Perrin M.J., *Mesures des longueurs et des aires*, Brochure n°48, IREM de Paris VII.
- Dubois C., Fénichel M., Pauvert M., *Se former pour enseigner les mathématiques*, A. Colin.
- Rouche N., *Le sens de la mesure*, Didier-Hatier.
- APMEP, *Grandeur mesure* (MOTS VI), brochure n°46, 1982

Annexe 1 – Fiche 1

Pour chaque situation, entourez le numéro de la bonne réponse :

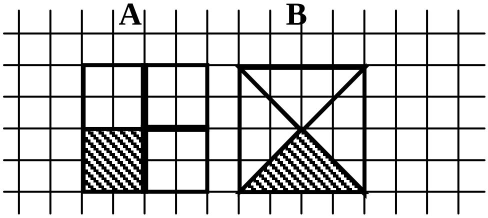
1-l’aire de la surface hachurée A est plus grande que celle de B.
2-l’aire de la surface hachurée A est égale celle de B.
3- l’aire de la surface hachurée A est plus petite que celle de B.

A **B**



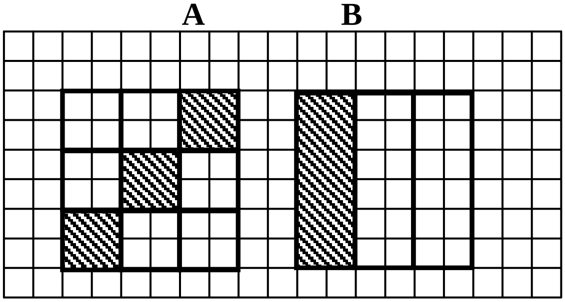
1 2 3

A **B**

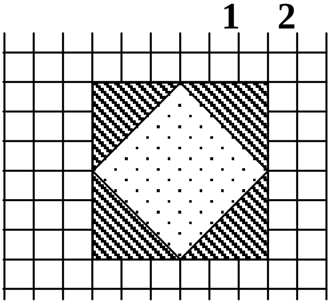


1 2 3

A **B**



1 2 3

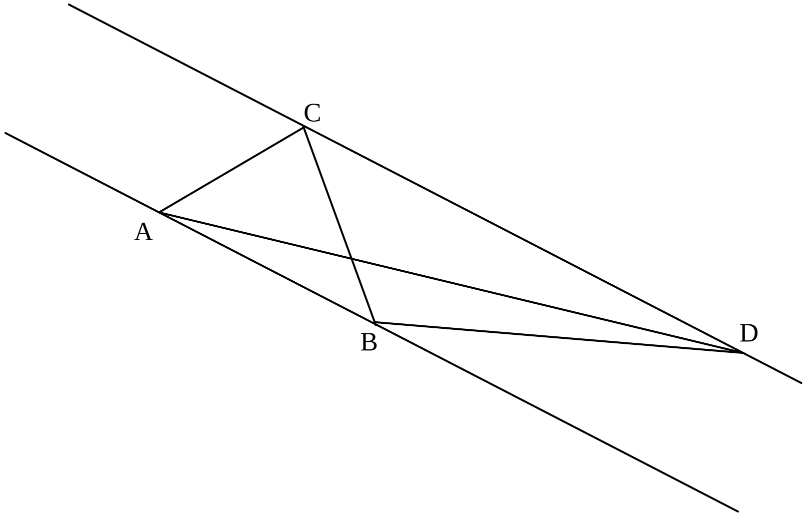


Surface A = surface hachurée

Surface B = surface pointillée.

1 2 3

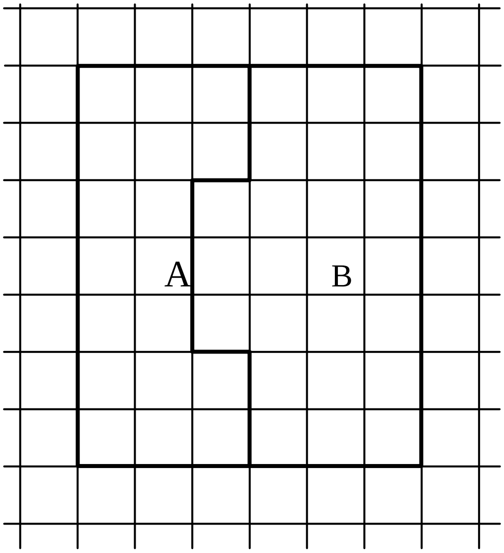
Annexe 1 – Fiche 2



Les droites (CD) et (AB) sont parallèles. Entourez le numéro de la bonne réponse :

1. L'aire du triangle ABC est plus grande que celle du triangle ABD.
2. L'aire du triangle ABC est égale à celle du triangle ABD.
3. L'aire du triangle ABC est plus petite que celle du triangle ABD.

Annexe 1 – Fiche 3



Un terrain a été partagé comme l'indique la figure ci-dessus.

Entoure dans chaque cas la réponse qui convient :

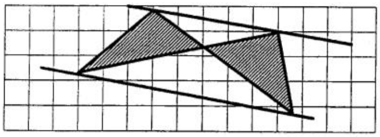
a *L'aire de la parcelle A est la plus grande* | *Les deux parcelles ont la même aire* | *L'aire de la parcelle B est la plus grande*

Explique ton choix :

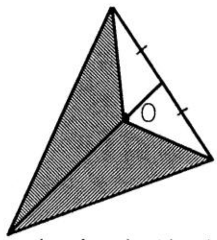
b *Le périmètre de la parcelle A est le plus grand* | *Les deux parcelles ont le même périmètre.* | *Le périmètre de la parcelle B est le plus grand*

Explique ton choix :

Annexe 2 : d'après « Cinq sur cinq » 6ème et 5ème Hachette, 1994- 1995

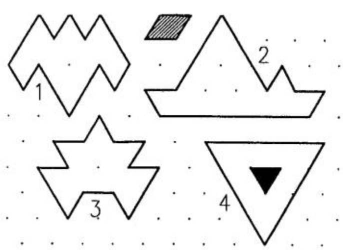


Comparer les aires des triangles hachurés



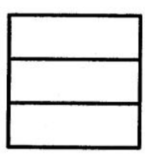
a) Comparer les aires des triangles hachurés. *(S'intéresser aux triangles non hachurés).*

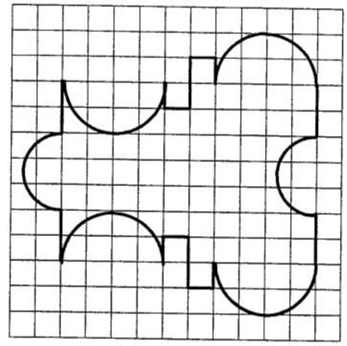
b) Où placer le point O de façon que le grand triangle soit partagé en quatre triangles de même aire?



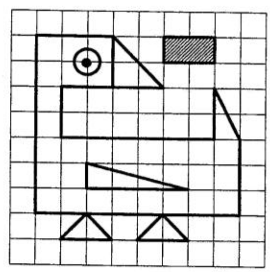
Déterminer l'aire de chacune des figures ci-dessus en prenant le losange hachuré comme unité d'aire.

On partage un carré en trois rectangles superposables. Quel est le périmètre du carré et de chaque rectangle si l'aire de chacun d'eux est égale à 12 cm^2?

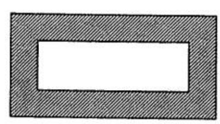




Construire un rectangle ayant la même aire que la figure ci-dessus. (Les arcs de cercle sont des demi-cercles.)



Jeu de l'oie : déterminer l'aire de l'"oie" en prenant le rectangle hachuré comme unité d'aire.



Calculer l'aire de la bande hachurée sachant qu'elle a 1 m de largeur et que le périmètre du grand rectangle est 26 m.