

# Assemblages de triangles équilatéraux

Catherine Houdement - Marie-Lise Peltier

*Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - Cahors 1991.*

*Il s'agit d'une activité à proposer en formation initiale ou continue à des professeurs d'école pour traiter de questions géométriques relatives aux polygones, à la symétrie axiale et à la symétrie centrale et de questions de mesure relatives à l'aire et au périmètre de figures planes. Cette situation permet par homologie de réfléchir à la construction d'une séquence d'apprentissage pour des élèves de cycle 3. Cette situation a été initiée par Cécile Véron, ancien professeur d'école normale à Rouen et intègre un prolongement en logo sur l'idée de Sylviane Dupuis-Cogens, IEN à Neufchâtel en Bray*

## 1- OBJECTIFS

### a) Objectifs mathématiques

- Sans rappel préalable, réactiver les connaissances des étudiants ou stagiaires sur polygone, aire, périmètre, convexité, symétrie axiale, symétrie centrale.
- Illustrer l'émergence d'une propriété mathématique par le tri entre objets ayant cette propriété et objets ne l'ayant pas.

### b) Objectifs didactiques

- Montrer une utilisation première du travail de groupe : échange et confrontation en vue de la constitution d'un matériel de travail commun.
- Pointer la notion de cadre dans l'exploitation faite des classements : cadre numérique (dénombrement, mesure) et cadre géométrique.

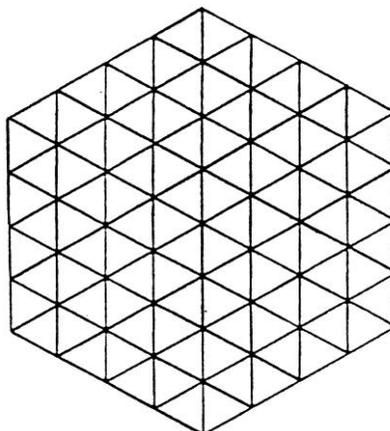
## 2- ACTIVITE 1

**But** : constitution d'un stock de figures planes obtenues par assemblages de triangles équilatéraux.

**Organisation** : jeu à deux.

### Matériel pour chaque groupe de deux

- Grille hexagonale de 96 triangles équilatéraux de côté 3 cm
- Dés à jouer classiques
- Crayons de couleur
- Ciseaux



#### a) Phase 1

##### Consigne 1

*"Vous disposez pour deux d'une grille constituée de cases triangulaires. Vous décidez par un jet de dé le joueur qui va commencer; puis alternativement vous lancez le dé et vous coloriez autant de cases adjacentes que le nombre de points indiqué sur le dé, en essayant de faire le maximum d'assemblages différents. Si vous ne pouvez pas jouer, vous passez votre tour.*

*Des assemblages adjacents obtenus par des jets de dés différents doivent être de couleurs différentes. Si vous ne pouvez pas jouer, vous passez votre tour.*

*Le gagnant de cette phase est celui qui finit le premier le coloriage de la grille."*

##### Remarques

1 - Le professeur peut demander aux joueurs de remplir une feuille de route avec les points tirés par chacun en cochant ceux qui n'ont pas pu être joués, ceci afin de permettre une vérification en fin de partie.

2 - Il peut également demander aux joueurs de mettre un signe de reconnaissance sur les assemblages qu'ils ont eux-mêmes coloriés (par le choix de couleurs attribuées à chacun par exemple).

3 - On observe différentes stratégies chez les étudiants ou stagiaires : certains partent d'un bord, d'autres du centre; certains collaborent, d'autres jouent de façon dispersée jusqu'au moment où ils constatent que cette stratégie est bloquante pour les deux joueurs.

#### b) Phase 2

##### Objectif

Distinguer la superposition sans retournement (nous dirons "mêmes formes" pour désigner des formes directement superposables) de la superposition après

retournement (nous parlerons alors de "formes symétriques" ou de formes "jumelles").

### **Consigne 2**

*"Lorsque la grille est complètement coloriée, vous découpez les différents assemblages et vous gardez un seul exemplaire de chaque assemblage (deux assemblages qui ne sont superposables qu'après retournement sont considérés comme distincts).*

*Le groupe gagnant de cette phase est celui qui a obtenu le maximum d'assemblages différents".*

### **Remarque**

Dans cette phase, le fait que les assemblages aient été coloriés facilite la distinction entre superpositions directes et superpositions après retournement.

### **c) Phase 3**

#### **Objectifs**

- Réinvestir l'analyse précédente : distinction entre "mêmes formes" et formes symétriques.
- Augmenter le stock de formes.

### **Consigne 3**

*"Par groupes de 4 (puis de 8), vous comparez les formes obtenues et vous ne conservez qu'un seul exemplaire de chaque sorte."*

### **Remarque**

A l'issue de cette phase, le professeur peut comptabiliser le nombre d'assemblages distincts de chaque groupe. Il peut également demander à chaque groupe de constituer un deuxième jeu pour avoir plus de matériel par la suite.

Il est intéressant de pointer le fait qu'à chaque regroupement le nombre d'assemblages distincts augmente, mais la recherche exhaustive de tous les assemblages possibles n'est pas un but de l'activité.

## **3- ACTIVITE 2**

### **But**

Faire émerger un certain nombre de propriétés des assemblages obtenus.

## Espace et géométrie

### a) Déroulement

#### Matériel

Le jeu de pièces obtenues lors de la consigne 3

#### Organisation

Par groupes de quatre (ou de huit)

#### Consigne

*"Avec le jeu de pièces que vous avez obtenues précédemment, vous allez proposer divers classements de ces pièces en essayant de préciser le critère qui vous permet de réaliser ce classement.*

*Dans chaque groupe, un secrétaire note les critères retenus et les classements correspondants."*

#### Remarque

Le professeur précise les conditions requises pour qu'il s'agisse d'un classement effectif.

#### Mise en commun

Chaque groupe vient présenter les classements réalisés.

### b) Les divers classements : analyse et exploitation en termes de propriétés mathématiques

1) Le **classement par le nombre de triangles** constituant l'assemblage permet de pointer la notion d'aire (si on choisit le triangle de base comme unité d'aire, la mesure de l'aire de l'assemblage est le nombre de triangles utilisés).

2) Le **classement par le nombre de côtés** permet de préciser l'origine du vocabulaire lié aux polygones, de l'associer au classement par le nombre de sommets et de rappeler la propriété : pour les polygones, le nombre de sommets est égal au nombre de côtés.

3) Le **classement par le nombre de côtés de triangles de base** dans le contour de l'assemblage permet de pointer la notion de périmètre et notamment de différencier numériquement les notions de périmètre et d'aire. On constate en effet que deux assemblages peuvent avoir même périmètre sans avoir la même aire, d'où une nouvelle question : peut-on trouver des assemblages ayant même aire et des périmètres différents, des assemblages ayant même aire, même périmètre mais de formes différentes ?

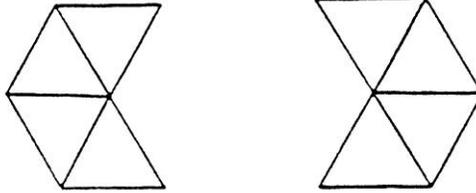
4) Le lot d'assemblages comporte toujours des **figures superposables** non pas directement, mais **après retournement**. Deux telles figures seront désignées par la suite par l'expression "figures jumelles".  
Le classement des assemblages selon l'existence ou non de figures jumelles est retravaillé collectivement même s'il n'est pas proposé par les différents groupes.

### Consigne

*"Dans chaque groupe, vous effectuez le classement en deux classes : figures ayant leur jumelle et les autres; et pour chaque figure n'ayant pas de jumelle dans le stock de vos pièces, cherchez s'il est possible de construire sa jumelle."*

### Constats

- Deux figures jumelles se superposent seulement après retournement.  
Ceci n'est pas évident pour tous les étudiants ou stagiaires ; par exemple, les deux assemblages ci-dessous leur paraissent jumeaux alors qu'ils se superposent sans retournement.



- Lorsque deux figures sont jumelles, on peut les positionner dans le plan de telle sorte qu'il existe une symétrie axiale transformant la première en la seconde (et vice-versa).

- Certaines figures n'admettent pas de jumelle.

### Consigne

*"Dégagez les particularités des figures n'admettant pas de figure jumelle."*

Il s'agit ici de dégager la notion d'axe de symétrie : les figures n'ayant pas de jumelles admettent au moins un axe de symétrie.

5) Cette phase peut être prolongée par un **classement suivant le nombre d'axes de symétrie**.

## Espace et géométrie

### 6) **Autres classements**, proposés ou imposés :

- figures convexes, figures non convexes ;
- figures ayant un centre de symétrie (elles coïncident exactement avec leur empreinte après un demi-tour), mise en relation avec la parité du nombre d'axes de symétrie ;
- assemblages réalisant ou non un patron de solide (tri par anticipation, validation éventuelle par construction).

### c) **L'institutionnalisation choisie**

- La symétrie axiale

Notion d'axe de symétrie, notion d'invariant (figures ayant des axes de symétrie), aspect *statique* de la symétrie axiale.

Notion de transformation (figures se déduisant l'une de l'autre par symétrie axiale), aspect *dynamique* de la symétrie axiale..

Mise en relation de ces deux aspects : une figure possède un axe de symétrie **d** si et seulement si elle est invariante par symétrie axiale d'axe **d**.

- Lien avec la symétrie centrale.

### d) **Petite analyse didactique**

- L'aspect ludique de la phase 1 permet une entrée rapide dans la tâche d'analyse des figures obtenues.

- La construction du matériel par les étudiants ou les stagiaires au cours du jeu permet une appropriation rapide des propriétés des figures obtenues.

- La mobilité des figures étudiées permet de dégager les propriétés intrinsèques des figures indépendamment de leur orientation dans le plan.

- Les activités de classement dichotomique ont pour but l'émergence de certains concepts (convexité, existence d'axes de symétrie...). On retrouve ici un point de vue piagétien de l'émergence de certains concepts.

- Le matériel se prête bien à une distinction aire périmètre des figures planes et permet de pointer l'importance du choix des unités de mesure pour effectuer des comparaisons.

L'étude a posteriori du déroulement de la séance permet de pointer les différents rôles des phases d'action, de formulation, d'institutionnalisation dans un processus d'apprentissage.

### e) Travail individuel

- **Rédiger une fiche de préparation** pour une activité pour des élèves à partir d'assemblages de figures (carrés, triangles rectangles isocèles ou triangles équilatéraux).

- **Construire un jeu de cartes** permettant un travail de reconnaissance de formes à partir des assemblages obtenus (le jeu est constitué d'assemblages jumeaux dans des positions variées et d'un assemblage n'ayant pas de jumeau). Proposer diverses règles du jeu (jeu de mariage, memory, jeu de l'intrus ou du pouilleux, etc.).

## 4 - ACTIVITE 3

Prolongements possibles avec LOGO

(Ce prolongement a été mis au point après un échange avec Sylvianne Dupuis – Cogens)

### Objectifs

- Etude de triangles réguliers ; propriétés angulaires.
- Comparaison d'unités de longueur.

### Reproduction d'assemblages à l'écran

- En mode direct avec les primitives usuelles.
- En mode direct avec la primitive “ triangle régulier ” .
- En mode programme avec deux options :
  - le professeur impose le côté du triangle-écran en pas de tortue;
  - le professeur demande un triangle-écran superposable au triangle du jeu. On pourra ensuite dans ce cas proposer une étude des périmètres des différents assemblages en fonction de l'unité de longueur choisie : côté de triangle équilatéral, centimètre, pas de tortue, et pointer la proportionnalité entre les différentes mesures obtenues.

### Fabrication d'assemblages

- Avec contrainte de périmètre.
- Avec contrainte d'aire.

**Travail individuel**

Construction d'une situation de classe présentant une démarche analogue.

**Recensement des différents assemblages pouvant être obtenus**

