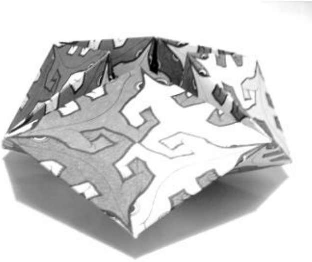
Des kaléidocycles

Gérard Ozan - Claudine Hervieu - François Huguet

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques – Angers 1995.

Les trois parties qui suivent sont trois articles présentant des compte-rendus d'activité en formation initiale ou continue ; ils abordent de façon différente l'étude des kaléidocycles.
L'activité du premier article propose au stagiaire de reproduire un objet donné, puis analyse les démarches et les difficultés rencontrées.
Dans l'article suivant, le choix est porté sur l'analyse géométrique de patron et permet ainsi l'étude d'autres kaléidocycles.
Quant au dernier article, les démarches proposées en formation permettent un réinvestissement immédiat en classe de cycle 3.



A - Des Kaléidocycles - Gérard Ozan

Introduction

Un kaléidocycle est un anneau à trois dimensions, constitué de tétraèdres identiques dont les faces sont quatre triangles isométriques. La jonction au niveau des arêtes communes à deux tétraèdres voisins est souple et on peut le faire tourner indéfiniment sur son centre.
J'ai utilisé pour cette séance les patrons fournis avec le livre M.C. Escher, Kaléidocycles de Doris Schattschneider et Wallace Walker aux éditions Taschen Ktiln (1992).

Ces kaléidocycles présentent la particularité d'être composés de six ou huit tétraèdres à faces isocèles et leur trou central est presque réduit à un point. (voir figures 1 et 2)

Ils sont en outre décorés par des motifs périodiques adaptés de dessins d'Escher, ce qui leur donne un aspect esthétique qui plaît beaucoup et permet d'annoncer un travail ultérieur sur les pavages.

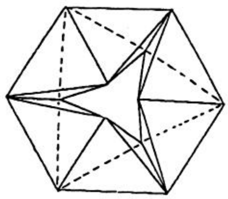


Figure 1

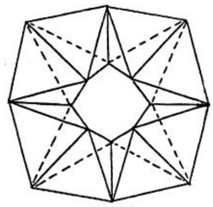


Figure 2

Contexte

J'ai utilisé cette situation en formation initiale avec des PE2 et en formation continue avec des instituteurs de cycle 3, dans des séances de 3 heures.

L'ACTIVITÉ

Objectifs
Aborder une démarche de reproduction d'un objet complexe mais motivant, posant de réels problèmes aux adultes en formation leur permettant de faire le point sur leurs savoirs et savoir-faire, puis de réfléchir à la mise en place d'une suite d'activités géométriques en classe :

- revenir sur leurs connaissances des solides,
- découvrir la variété des méthodes possibles.

Matériel
Un kaléidocycle par groupe de 4 ou 5 stagiaires, pouvant être manipulé sans l'endommager.
Double décimètre, équerre, compas, papier Canson, scotch, ciseaux, feuille format affiche.

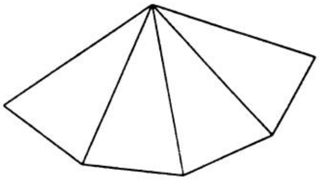
Consignes

1. *Reproduisez et décrivez ce solide.*
2. *Cherchez-en un patron.*

Déroulement
En général les stagiaires s'engagent rapidement dans une première analyse de l'objet (comptage des tétraèdres et des faces, mesure d'arêtes) puis tracent (au compas ou avec des gabarits), découpent et assemblent des figures planes (triangles quelquefois équilatéraux, losanges) puis essaient d'assembler leurs tétraèdres, pour vérifier enfin la bonne rotation de l'engin sur lui-même.

Certaines difficultés apparaissent :

- pour assembler des triangles, l'assemblage ne donnant pas toujours un tétraèdre,



- pour réunir les tétraèdres lorsque ne sont pas identifiées les deux arêtes opposées aux longueurs différentes des quatre autres,
- pour regrouper des losanges qui ne sont pas perçus "à cheval" sur deux tétraèdres,
- pour faire tourner le kaléidocycle constitué uniquement de triangles équilatéraux (figure 1) ou qui laisse un grand trou central (figure 2).

Certains groupes rédigent leur recherche au fur et à mesure de leur construction, mais les plus nombreux s'occupent de la description dans un deuxième temps.

Il arrive quelquefois que soient tracés directement des patrons de tétraèdres (un triangle central, les autres autour) ou encore un assemblage de triangles et de losanges donnant deux tétraèdres articulés... mais le plus souvent les PE2 ne démarrent la recherche du patron qu'après une première réalisation, comme l'ordre des consignes peut le laisser supposer. Par contre il est arrivé qu'un groupe de maîtres de cycle 3 s'obstine à chercher directement le patron pendant plus d'une heure avant d'accepter un premier objectif plus modeste : n'y a-t-il pas là un effet de leurs représentations ou de leurs habitudes ?

Mise en commun

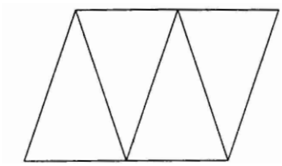
Après 1 h 45 environ, quand chaque groupe peut présenter une description, nous affichons les différentes productions, expliquons les démarches, analysons les erreurs et les blocages observés pendant la recherche, puis en synthèse nous rédigeons collectivement une description ayant l’accord de tous et utilisant un vocabulaire minimum, mais précis.

Institutionnalisation mathématique

Les notions de polyèdre, sommet, arête, face, côté sont redéfinies, celles de tétraèdre et de pyramide sont distinguées. Le nombre et la disposition des faces autour des sommets permet une description claire.
Les propriétés des triangles isocèles et équilatéraux sont rappelées et mises en relation avec des méthodes de construction.
Différentes méthodes de traçage et de construction sont passées en revue : empreinte, piquetage, gabarit, calque, papier quadrillé, patrons partiels...

Fin de l'activité

Il s'agit de relancer ensuite la recherche du patron : soit en partant des différents patrons possibles du tétraèdre et des façons de les assembler, soit en retirant le scotch de certaines arêtes pour mettre à plat toutes les faces... Je suis souvent obligé d'aider les groupes pour obtenir un résultat. Puis je distribue un document où figurent plusieurs patrons de kaléidocycles, construits en juxtaposant des bandes de quatre triangles.



Conclusion

La synthèse sur les contenus géométriques ayant été faite précédemment, je réserve le dernier quart d'heure pour faire une analyse pédagogique et didactique :

- il s'agit bien d'une séance de mathématiques avec les aller-retour entre l'action et la réflexion ;
- rappel de la nature des activités géométriques en référence aux instructions complémentaires parues en 1986 à la suite des programmes de 1985... : après lecture des programmes de 1995, elles semblent encore d'actualité ;
- comment on peut mener une activité en classe au cycle 3 à partir du modèle qui vient effectivement d'être vécu : j'aime à présenter le kaléidocycle comme un des objets terminaux d'une progression de cycle dont certaines étapes pourraient être des polyèdres réguliers ou semi-réguliers ou étoilés, d'autres des boîtes de formes diverses ;
- tout cela permettant aux élèves de travailler (articulation espace-plan avec des patrons pas toujours possibles, à partir d'instruments et de supports variés favorisant (évolution de leurs procédures de construction et de dessin en lien avec la technologie et les arts plastiques ;
- enfin ce que peut être une analyse a priori (d'après les exemples de démarches et d'erreurs qui ont été précédemment analysées) et son utilité pour la préparation de classe.

B - **Différents types de kaléidocycles** - Claudine Hervieu

I- Présentation de l'activité

I.1. Travail sur les patrons

Des patrons de solides déformables sont donnés en dimension réduite sur une feuille A4.

Dans un premier temps, il s'agit, uniquement par la perception visuelle, de les comparer (ressemblances, différences) et de faire des hypothèses sur les propriétés perçues en l'absence d'autres informations.

Dans un deuxième temps, où de nouvelles informations sont données, il s'agit d'affiner la perception visuelle, de rectifier le cas échéant et de compléter les hypothèses précédentes, afin de conclure sur les propriétés des figures et sur des stratégies de construction de ces patrons agrandis.

I.2. Kaléidocycles

Le travail porte sur des kaléidocycles de type hexagone, carré ou étoile pentagonale.

Réaliser des solides, à une taille convenable, avec un matériel adéquat ; utilisation liée à leur particularité (flexibilité).

Comprendre les contraintes mathématiques imposées pour la construction des 3 patrons.

Prévoir, éventuellement, des patrons d'autres types de kaléidocycles.

II. - Déroulement succinct

Organisation

Toujours par groupes de 3, sauf au moment des synthèses.

II.1. Travail sur les patrons

II.1.1. Observation

matériel

Une feuille A4 par personne avec les figures n°l, n°2, n°3 (cf. p.65).

consigne 1

Analysez ces 3 figures, patrons de solides déformables, dont les languettes pour le collage sont les surfaces ayant des signes + ; écrivez les hypothèses sur les propriétés des figures, leurs ressemblances, leurs différences.

Attention, il manque des informations.

quelques formulations obtenues
"..nombre pair variable (par la suite appelé 2n) de bandes de 4 triangles de même taille (2n = 6 ou 8 ou 10) .. rectangles .. droites parallèles .. parallélogrammes .. hexagones réguliers.. "

II.1.2. Informations et agrandissement

a) Informations

matériel
Le même que précédemment

consigne 2
Tous les petits triangles (sans signe +) de la figure n° 1 sont isocèles et isométriques, leurs bases ayant toutes la même direction (PS); il en est de même pour les figures n° 2 et n° 3. Enfin PQRS est un rectangle. Quelles conclusions en tirez-vous ?
Attention, il manque encore des informations.

quelques formulations obtenues
" .. on a bien des rectangles puisque toutes les bases de même longueur des triangles envisagés sont perpendiculaires à (PQ) .. losanges (4 côtés de même longueur) .. triangles isocèles mais aussi équilatéraux!"

consigne 3
Dernière information: on pose PA = x et PB = y (longueurs en mm); les rapports x/y ont pour valeurs 1, $\sqrt{2}$, (1+$\sqrt{5}$)/2 respectivement pour les figures n° 1, n° 2, n° 3. Conclusions ?

formulations obtenues
" .. d'une figure à l'autre, triangles de formes différentes mais non équilatéraux .. et donc pas d'hexagones réguliers.. "

conclusion
Les propriétés minimales pour l'agrandissement sont perçues.

b) agrandissement

matériel
Feuille A3 par personne et outils.

consigne 4
Toujours par groupes de 3, construire les 3 figures pour x = 40 (une seule sur un A3 dont les bords peuvent être astucieusement utilisés)

procédure la plus utilisée
Calculs de y à 1/10 près (40 ; 56,5 ; 64,7) puis construction d'un rectangle de dimensions 2nx sur 3y dans lequel on trace un quadrillage de mailles x sur y. On obtient aussi un quadrillage de mailles 2x sur y ; on trace les diagonales de ces dernières mailles. Il reste à bien délimiter le contour du patron et à gommer 2 lignes de construction.
Dans chaque groupe se fait à nouveau la comparaison des 3 figures avec des essais vains de superposition pour contrôler, d'une figure à l'autre, les différences de formes des petits triangles.

II.2. Travail sur les kaléidocycles (hexagone, carré et étoile pentagonale)

II.2.1. Réalisation
(si possible en temps libre)

matériel conseillé
Bristol fin (550 mm sur 600 mm) pour faire des bandes de largeur 3y

construction des patrons
Si x = 50 les valeurs approchées de y sont 50, 60, 70.

découpage

pliage
Plis (très bien faits) en crête pour toutes les bases y et en creux pour les côtés de même longueur des triangles isocèles (ainsi les lignes de construction seront cachées). Ceci permet d'obtenir une chaîne de 2n tétraèdres reliés par des arêtes de longueur y.

collage
Languettes (triangles avec signes +) sous les faces des tétraèdres; puis on ferme la chaîne avec les 2 autres languettes (situées à une extrémité des patrons).

II.2.2. Justification des choix
Il s'agit de justifier les choix des valeurs des rapports y/x en liaison avec les types hexagone, carre, étoile pentagonale.

a) rotation

L'utilisation de ces objets déformables par rotation fait apparaître une position particulière où tous les tétraèdres ont un sommet commun O, n arêtes de sommet O de longueur y sont dans un même plan (par exemple horizontal noté (P1)) et enfin n autres arêtes de longueur y sont verticales.

b) section par (P1)

consigne
Il s'agit d'étudier la section de chaque kaléidocycle par le plan (P1), plan qui est d'ailleurs un plan de symétrie, et de conclure sur y/x.

résultats
Dans chaque cas, la section est un polygone formé de 2n triangles d'angle 360°/2n en O, de côtés x, x, y.

c) étude détaillée

figure n ° 4
La section est un hexagone régulier si x = y (6 triangles isocèles d'angle 60° en O, de côtés x, x, y).

figure n ° 5
La section est un carré si $y = x\sqrt{2}$ (8 triangles isocèles d'angle 45° en O, de côtés x, x, y).

figure n° 6
La section est une étoile pentagonale (10 triangles isocèles d'angle 36° en O, de côtés x, x, y) ; on retrouve là la *divine proportion*. Cela nécessite une étude complémentaire (ci-dessous).

figure n ° 7
Étude complémentaire sur ces triangles d'or et sur la "divine proportion":
I, J, L étant alignés, dans les triangles 1JK et IKL on a :
(y + x)/y = y/x = k ce qui donne k * k - k = 1 puis 4(k*k) - 4k + 1 = 4+1
d'où (2k - 1) * (2k - 1) = 5.
On trouve pour k le nombre d'or : $(1 + \sqrt{5})/2$.

II.2.3. Autres kaléidocycles

Si 2n = 12, pour avoir un point O, la section par (P 1) doit être formée de 12 triangles isocèles d'angles 30° en O, de côtés x, x, y (figure non faite) ; 3 triangles comme ceux-ci donnent un triangle équilatéral de côté y, de hauteur(3/2)x, ce qui donne $(3/2)x = (\sqrt{3}/2)x$ d'où $y/x = \sqrt{3}$.

Remarque : si $2n \geq 8$, on peut faire des anneaux de tétraèdres réguliers mais le point O ne peut exister.

Figures

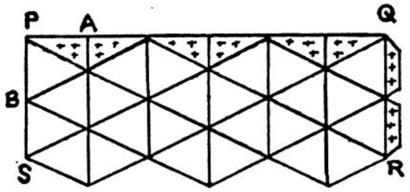


Figure n° 1

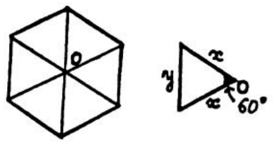


Figure n° 4

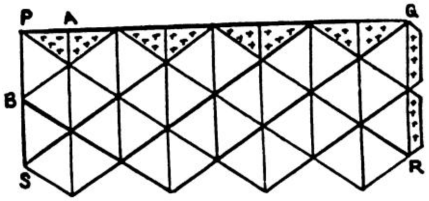


Figure n° 2

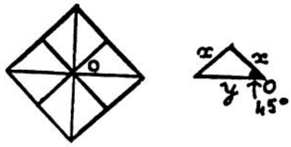


Figure n° 5

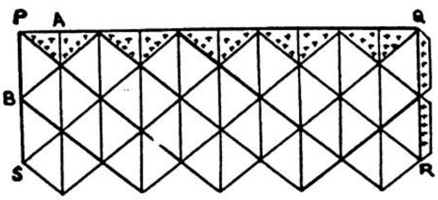


Figure n° 3

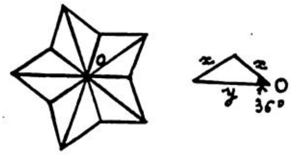


Figure n° 6

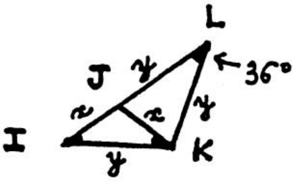


Figure n° 7

C - Le Kaléidocycle - François Huguet

"Lors de l'introduction de notions nouvelles, les élèves sont mis en situation d'apprentissage actif : ils découvrent les notions comme des réponses à des problèmes. " (I. 0.1985)

Contexte

J'ai utilisé cette situation plusieurs fois en Formation Initiale. Les étudiants doivent tout d'abord chercher à résoudre ce problème de construction de solide, puis après analyse des difficultés rencontrées nous essayons de concevoir ensemble une séquence d'une heure qu'ils pourront expérimenter au niveau d'un CM 1 ou d'un CM2.

Certains étudiants pensent qu'il serait intéressant de montrer l'objet fini à réaliser afin de motiver davantage l'activité des enfants.

Tout en respectant leur liberté de choix des variables didactiques de la situation, j'essaie tout de même de les convaincre d'expérimenter aussi une démarche inductive permettant de confronter l'enfant à une suite d'obstacles qu'il devra franchir avec l'aide ou la collaboration de ses camarades.

Travail possible en formation initiale ou continue

1. Faire vivre la situation en respectant la même démarche et organisation de travail

- Résolution d'une suite de problèmes de construction
- Travail individuel puis par groupes de deux...
- Phase de validation

2. Faire une analyse a priori des procédures et des difficultés des enfants de CM

- Réfléchir au problème de l'auto -validation
- Envisager des aides pour faciliter la compréhension et la réalisation pratique.
- Prévoir un déroulement possible dans une classe de CM, si possible ne dépassant pas une heure.

3. Analyser le problème de construction d'un point de vue mathématique.

- Voir l'incidence de la contrainte de départ
  Base = Hauteur du triangle isocèle
- Retrouver la propriété "Côté de l'hexagone = Rayon du cercle circonscrit".
- Éventuellement s'intéresser au problème du patron du Kaléidocycle.
- Faire découvrir qu'il existe d'autres modèles de Kaléidocycles. (Voir document annexe)

4. Faire une analyse de l'activité en relation avec les connaissances en jeu pour des enfants de CM.

- Recenser les notions abordées, voir le vocabulaire utilisable
- S'intéresser aux techniques et sa voir-faire mis en place
- Réfléchir à la « phase d'institutionnalisation »

Chronique d'une des séquences réalisées au CM

Matériel

- Des feuilles de papier Casson ou de carton fin mais rigide.
- Des règles, des doubles décimètres.
- Des ciseaux, des équerres et des rouleaux de scotch.

1ère phase : appropriation du 1er problème de construction en grand groupe

Consigne

Cette consigne est écrite au tableau.

> *Nous allons construire des triangles isocèles ABC dont la hauteur [AH] mesure 8 cm et le côté [BC] mesure 8 cm.*

Lecture et questions à propos des mots inconnus "isocèle" "hauteur".

Les explications fournies par le maître ne vont pas reposer sur des définitions ! Par exemple, il montre un grand triangle construit en carton, fait constater par pliage que deux côtés ont même longueur et dit : "ce triangle est isocèle".

2ème phase : construction individuelle

Consigne

> *Choisis les instruments nécessaires pour la construction. Réalise 2 triangles isocèles comme indiqué précédemment. Compare les avec ceux construits par ton voisin.*

Une validation peut être rapidement effectuée par diverses procédures :

- Comparaison avec un modèle donné
- Mesurage
- Retournement.

Remarques à propos des difficultés constatées.

> - Certains enfants construisent [BC] puis [AH] sans placer H au milieu de [BC]. Ils constatent alors que les triangles ainsi construits ne sont pas isocèles. Ce type d'erreur va favoriser la découverte de cette propriété caractéristique de tous les triangles isocèles !
> - Nous avons constaté aussi que peu d'enfants utilisent le compas !

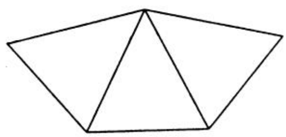
3ème phase : nouveau problème d'agencement (travail par équipe de deux).

Consigne

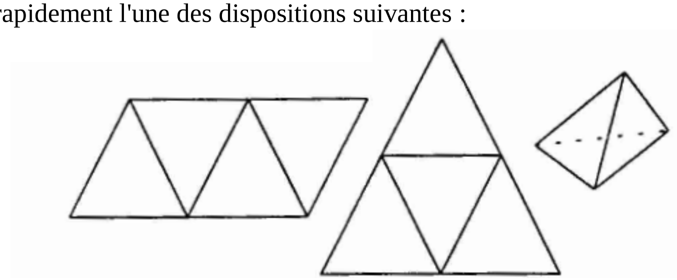
Avec 4 de vos triangles essayez de construire un solide " bien fermé". (Tétraèdre)

Remarques à propos des difficultés rencontrées.

• Le maître peut indiquer une technique pratique à deux pour l’assemblage à l’aide de scotch.
Par exemple l’un des enfants place et maintient tendu le scotch à l’envers contre la table, l’autre enfant peut alors aisément juxtaposer les côtés des triangles qu'il souhaite assembler.
• Certaines équipes essaient sans réfléchir d'assembler 3 triangles ainsi :



• Les enfants constatent alors que le 4ème triangle ne peut être placé pour "fermer" le solide !
• Certains enfants pensent alors à l'idée de "patron" et adoptent assez rapidement l'une des dispositions suivantes :

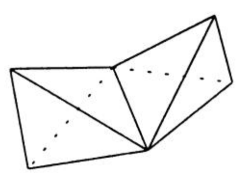


4ème phase : assemblage des solides réalisés (travail "Inter - Equipes").

Consigne

Essayez d'assembler les solides en juxtaposant les arêtes de 8 cm.

Remarques à propos des réalisations.



• Les enfants vont constater qu'après avoir assemblé 6 tétraèdres "en chaîne", il est possible de former une sorte de couronne en reliant, comme précédemment par l'arête de 8 cm, le 6ème solide au 1er solide !

• Ce nouvel assemblage possède des propriétés curieuses
Par un mouvement de rotation perpétuelle, les différentes faces vont apparaître les unes après les autres un peu comme dans un Kaléidoscope ! D'où son nom "Kaléidocycle" !
• Bien naturellement les groupes les plus rapides ont eu l'idée de colorier ou de décorer les différentes faces permettant ainsi de mieux mettre en valeur le phénomène.
• Beaucoup d'enfants ont reconstruit ensuite chez eux d'autres Kaléidocycles afin d'en avoir un personnellement.

5ème phase : institutionnalisation

Après analyse des productions et des difficultés rencontrées, nous avons pu constater la bonne compréhension par l'ensemble de la classe de termes géométriques utilisés lors de cette séquence (par exemple : face, arête, sommet, triangle isocèle ...)
Il aurait été possible aussi d'institutionnaliser certains "savoir-faire" concernant les techniques d'assemblage, l'usage du compas ...

Conclusion

Ce type d'activité a évidemment l'inconvénient de son caractère trop ponctuel par rapport à la vie d'une classe.

Cependant, les étudiants qui ont réalisé cette expérience, l'ont jugée fort intéressante et ont apprécié plus particulièrement la démarche consistant à faire résoudre individuellement ou collectivement une suite de problèmes.

Lors des diverses expériences réalisées, les enfants sont toujours restés motivés, actifs et coopérants. Bien évidemment s'est posé le problème de l'hétérogénéité car tous les enfants ne sont pas capables de travailler au même rythme et avec le même soin.

L'intérêt de cette forme de travail a été de permettre aux plus lents de travailler à leur rythme tandis que les autres pouvaient :
- soit construire d'autres kaléidocycles en partant directement de patrons de tétraèdres
- soit dessiner des motifs sur les faces des solides permettant de faire apparaître par rotation huit dessins différents !

Mais nous avons pu voir également les difficultés de gestion et aussi les techniques permettant de passer du travail individuel au travail en équipes. (voir l'avantage et le rôle des consignes écrites ...)

Nous avons pu enfin constater le niveau d'habileté manuelle des enfants et réfléchir aux activités à mettre en place pour les faire progresser dans ce domaine.

Remarque d'ordre mathématique
La contrainte AH = BC imposée au départ de ce problème a en fait une grande utilité ! En effet, c'est grâce à elle que le Kaléidocycle peut "juste" pivoter sur lui même.
Cela peut également servir pour la validation de ce travail. Par exemple avec 6 tétraèdres réguliers cela ne marcherait pas !
Mais cette contrainte est-elle "large" ou "précise" ? A vous de le démontrer !

Bibliographie

- Revue Pentamino - n° 6 et n° 8, année 1979 « La ronde des berlingots »

- M.C.Escher, « Kaléidocycles », Edition Taschen, 1992

De nombreux kaléidocycles constructibles à partir de patrons déjà faits

- Fénichel M., Dubois C.,.Pauvert M., « Se former pour enseigner les mathématiques », Tome 1, pp. 154 - 161, A.Colin, 1993
  Séances de classe autour des kaléidocycles