Polyèdres réguliers : compte rendu d'activité

Marie-Claude Chevalier

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - Pau 1992.

Cet article présente des activités réalisées en formation initiale ou continu.
A travers l'activité vécue par les stagiaires, le formateur fait ressortir à la fois quelques notions de didactique (dialectique outil objet, situation didactique) et clarifie des notions de géométrie à propos des polyèdres réguliers.

Objectifs

Le principal objectif est de faire vivre une situation aux maîtres afin de conduire avec eux une réflexion sur l'activité mathématique et de pointer quelques concepts de didactique des mathématiques.

Les connaissances en géométrie sont relativement lointaines. peu disponibles, mal formalisées... Le cadre géométrique place les enseignants dans une position comparable à celle des élèves.

1-Déroulement de l'activité

Organisation et matériel
Les maîtres sont par groupes de 4 ou 5. Chaque groupe reçoit du matériel Plot[1]' (triangles équilatéraux. carrés, pentagones réguliers et hexagones réguliers).

Consigne
La consigne est donnée oralement et est écrite au tableau :
"Construire des polyèdres réguliers"

Première phase
Dans cette première phase, les maîtres construisent des polyèdres. Le matériel distribué plaît beaucoup. Chacun se lance dans des constructions. Dans certains groupes il y a coopération : un place les élastiques alors que l'autre tient les cartons, ou encore on voit une répartition des tâches d'assemblage.

Un oubli de la consigne est très net. Les gens sont pris par l'action.

[1] Plot - matériel n° 1 - APMEP - Orléans Tours

Deuxième phase

Un point est nécessaire. Le formateur choisit deux ou trois constructions réalisées, demande l'attention de tous et pose la question :
"Avons-nous des polyèdres réguliers?"

Dans le temps qui suit, les gens semblent découvrir la consigne. Ils interrogent l'animateur, en lui faisant même des reproches:
"C'est quoi un polyèdre régulier?"
"Vous nous laissez .faire des choses comme ça sans nous dire ce que vous attendez!"
…..
Des opinions sont émises à propos dos polyèdres construits. Il y a un accord rapide sur :
"Il faut que toutes les faces soient identiques. "
Le formateur se contente d'écrire cette phrase au tableau sans prendre position. Les maîtres pensent avoir trouvé là, la définition dont ils ont besoin.

Les maîtres connaissent la définition d'un polygone régulier. Ont-ils procédé par analogie, les côtés du polygone correspondant aux faces du polyèdre?

Obtient-on cette "définition" à partir de la représentation que chacun a d'un polyèdre régulier?

Troisième phase

Les enseignants reprennent le travail de construction qu'ils avaient interrompu, mais en ne recherchant cette fois ci que les polyèdres réguliers. Ils démolissent les solides obtenus en assemblant des polygones de nature différente.

Certains groupes assemblent des hexagones à n'en plus finir.

Quatrième phase

Le formateur guette la fabrication du polyèdre construit avec 10 triangles équilatéraux. Lorsqu'elle se produit, il montre le solide dans chaque groupe en demandant aux gens comment ils le trouvent. Les réactions tardent plus ou moins à se produire.

Un moment collectif est alors improvisé, souvent à l'initiative d'un stagiaire. Une vive discussion s'établit

"Toutes les faces sont égales !"
"Comment définit-on un polyèdre régulier ?"
"La définition est écrite au tableau !"

Un doute apparaît à propos de ce qui était accepté comme définition.
"Le polyèdre a un axe de symétrie ! "
" Il y a une rotation !"

Les transformations, jusque là ignorées, vont servir d'argument. Le solide est bien régulier puisqu'il peut tourner sur lui-même, ou bien puisqu'il est invariant par symétrie.

"Suivant l'endroit d'où on regarde ce solide, on ne le voit pas pareil !"
"Mais les angles ne sont pas les mêmes !"

Les isométries de l'espace apparaissent comme des connaissances peu sûres, elles sont abandonnées assez rapidement au profit de considérations sur les angles.

Le formateur fait remarquer que la notion d'angle dont on dispose est une notion de géométrie plane. Il aide à la reformulation de :
"Là, on a 5x60° alors que là on n'a que 4x60°" en suggérant de compter le nombre de faces réunies en un sommet.

A ce moment là, il y a accord à propos de la deuxième condition qui doit être réalisée :
"Chaque sommet réalise la réunion du même nombre de faces."

Cette phrase est écrite au tableau. La question sur la nature de ce que l'on est en train d'écrire se pose :
"Ce que nous avions écrit au début. ce n'était pas la définition !"
"Sommes-nous en train de donner une définition ou encore des propriétés ?"

L'animateur est sollicité en tant que détenteur du savoir mais ne donne pas son avis.

Cinquième phase
Au fur et à mesure de leur construction les polyèdres réguliers sont disposés sur un présentoir.

Le groupe qui assemble les hexagones commence à se désespérer. Bien que tous les membres du groupe coopèrent certains ont envie d'abandonner.
"De toute façon on n'aura jamais assez d'élastiques ou de cartons…"

Les autres groupes avaient codé leurs hexagones sans se poser de question mais certains enseignants commencent à s'intéresser à ce qui se passe.

"Ce n'est pas normal qu'ils n'arrivent pas à terminer !"
"Est-ce possible de construire un polyèdre régulier avec des hexagones ?"

Lorsqu'elle est formulée, la question est reprise collectivement. On arrive alors assez vite à l'idée de pavage du plan.
Avec les hexagones, vous ne sortez pas du plan !"
"On doit avoir 360°... "

Surgit une nouvelle question. II faudrait connaître la mesure d'un angle de l'hexagone Certains font appel à l'animateur, d'autres à leurs souvenirs mais devant la résistance rencontrée un stagiaire propose de calculer.
"Il suffit de trouver une méthode de calcul! "

Plusieurs stratégies pour calculer la mesure d'un angle d'un polygone régulier sont proposées par les maîtres en formation. Le polygone de n côtés est découpé en triangles :
- à partir d'un sommet : on obtient (n-2) triangles et la somme des angles est donnée par (n-2) x 180°.
- à partir d'un point intérieur : on obtient n triangles et la somme des angles du polygone est n x 180° - 360°.

Sixième phase
Des questions viennent tout naturellement :
"Y a-t-il un nombre fini de polyèdres réguliers ?"
"A-t-on construit tous les polyèdres réguliers qui existent ?"

On voit alors quelques souvenirs très confus :
"Il y a une relation entre le nombre de faces et le nombre de sommets. "
……..

En moment collectif, on cherche à vérifier si tous les polyèdres réguliers ont été construits.
En général, on découvre alors l'existence de l'icosaèdre, non réalisé jusque là. Des enseignants se lancent dans sa fabrication.

Septième phase
L'animateur distribue alors un polycopié reprenant les points importants[2] afin de répondre aux questions de plus en plus techniques qui se posent et de mettre fin à l'activité mathématique.

2 - Exploitation de l'activité

Le formateur propose aux maîtres de réfléchir à ce qui s'est passé au cours de l'activité. Pour cela il demande à chaque groupe de mettre rapidement par écrit quelques éléments de réflexion à propos des mathématiques rencontrées au cours de la situation mais aussi à propos du vécu de chacun en tant qu'apprenant.

Dans une synthèse collective, chaque phase est analysée sur le plan mathématique et sur le plan didactique.

[2] voir annexe p.26

Analyse de la 1ère phase

Dans la première phase, les enseignants utilisent des connaissances implicites sur les polyèdres réguliers.
Ces connaissances permettent des actions, des prises de décision.

La consigne n'est pas recevable par les stagiaires qui ont besoin de prendre connaissance du matériel mis à leur disposition, de manipuler en dehors de toute attente du formateur.

Cette première phase d'action permet en fait la dévolution du problème.

Analyse de la 2ème phase

Apparaît ici le problème de l'identité de l'objet mathématique "polyèdre régulier".
Les connaissances mobilisées permettent de formuler ce qui sera accepté comme une définition.
Cette "définition" reprend l'aspect le plus visible de l'objet et a un caractère fonctionnel. On peut tout de suite éliminer des solides construits en mélangeant triangles et carrés par exemple.

Dans cette deuxième phase, essentiellement de formulation, les connaissances mobilisées sont explicites, elles permettent des échanges de point de vue afin d'obtenir un consensus.
Le problème est la propriété de chacun.

Analyse de la 3ème phase

Les connaissances sont maintenant explicites, elles permettent des actions, des prises de décision.
On a une nouvelle phase d'action.

Analyse de la 4ème phase

La définition jusque là acceptée, est mise à l'épreuve des faits.

Les connaissances mobilisées lors des échanges ont pour but, soit de convaincre que le nouveau solide construit est bien un polyèdre régulier, soit au contraire de persuader qu'il n'est pas régulier.

Quel est le statut de la phrase : "Dans un polyèdre régulier, toutes les faces sont identiques" ? Une définition doit caractériser l'objet dont elle parle. Une propriété peut décrire partiellement un objet.

La définition initiale est actualisée pour rendre compte de la contingence.
Dans cette phase, les connaissances permettent des échanges d'information mais aussi des échanges de jugement.

L'appel au bon sens pour classer les solides ne suffit pas. II y a recherche d'arguments d'ordre mathématique.

Le formateur est censé détenir le savoir. On pourrait se contenter de son avis mais dans la mesure où il refuse de prendre position la nécessité de prouver apparaît.

Analyse de la 5ème phase

Lorsque le groupe qui travaille avec les hexagones commence à douter, il ne fait pas appel à des raisons mathématiques mais à des causes matérielles (nombre d'hexagones ou d'élastiques insuffisant). C'est un regard extérieur au groupe qui va permettre de replacer le problème dans son cadre.

La réponse : "on obtient un pavage du plan" parait évidente, cependant le besoin de preuve apparaît de manière très nette.

Les connaissances anciennes ne permettant pas de donner directement la mesure d'un angle d'un hexagone. Le formateur refusant à nouveau de livrer les informations, les stagiaires savent à ce moment là que ces informations sont à leur portée par le biais d'un calcul. Les mathématiques donnent un pouvoir sur les choses.

Les méthodes de calcul proposées sont pertinentes et se veulent générales. L'aspect universel des mathématiques est ici implicite.

Dans cette phase, la question d'existence de polyèdres construits à partir de polygones quelconques est posée pour la première fois. Des hypothèses sont alors formulées et validées.

Le savoir sur les polyèdres réguliers est en train de se construire.

Analyse de la 6ème phase

Dans cette phase, l'objet "polyèdre régulier" est étudié. Le souci d'exhaustivité apparaît. Les connaissances mathématiques permettent d'anticiper. L'icosaèdre est découvert théoriquement avant d'être réalisé.
Les connaissances mathématiques permettent de formuler des énoncés, des théorèmes : "il existe un polyèdre régulier dont les faces sont des triangles équilatéraux et tel que chaque sommet réalise la réunion de 5 triangles."
La réalisation de l'icosaèdre valide le théorème.

Analyse de la 7ème phase

Un point d'institutionnalisation est nécessaire pour répondre à une demande des maîtres en formation. Cela permet de dissiper toute ambiguïté : les connaissances établies au cours de la situation sont correctes.

Le formateur reprend ici sont rôle de garant du savoir mathématique.

Conclusion

La situation permet de parler des savoirs mathématiques. Ils apparaissent sous forme de connaissances implicites ou explicites dans la résolution de problèmes. On les rencontre à travers des définitions, des propriétés.
Ces savoirs sont tantôt objets d'étude, tantôt outils de résolution de problèmes.

A travers la situation, on voit un concept évoluer, s'affiner, prendre place à côté d'autres concepts. On peut parler de construction, de structuration, de réorganisation de connaissances...

La situation permet de pointer quelques caractères des mathématiques. Les connaissances donnent du pouvoir sur les objets, elles permettent des anticipations. Les énoncés mathématiques ont très souvent un caractère universel ou bien répondent à des problèmes d'existence. Enfin la nécessité de preuve, de démonstration fait partie de l'activité mathématique.

La théorie des situations de G Brousseau, donne un cadre de référence pour pointer :

- les moments où les connaissances permettent des actions ou des décisions.
- les moments où elles permettent des échanges d'informations codées dans un langage.
- les moments où elles permettent des échanges de jugement.

On a donc là une illustration des différentes fonctions des connaissances mathématiques dans les situations a-didactiques.

On voit très nettement quand le problème du formateur devient le problème des maîtres en formation. On a un exemple de situation où la consigne seule ne permet pas la dévolution de la situation a-didactique.

Les relations qui s'instaurent entre le formateur et les maîtres en formation à propos du savoir en jeu sont intéressantes à regarder à travers la notion de contrat didactique. Le fait que le formateur, qui détient le savoir, refuse de communiquer ce savoir est perçu comme une rupture de contrat. La dernière phase rétablit le contrat enseignant- enseigné dans sa forme classique.

Bibliographie

Douady R., " Jeux de cadres et dialectique outil-objet", Recherche en didactique des mathématiques, vol.7/2, Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble, 1987.
Briand J., Chevalier M.C., "Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques", Hatier, Paris, 1995.
Brouseau G., " Théorie des situations didactiques", Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble, 2001.

Annexe

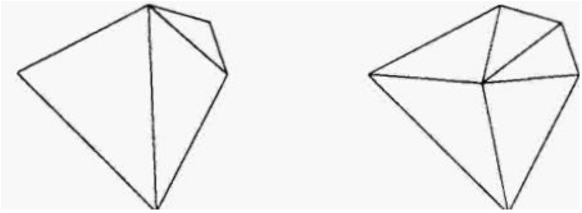
1 - Polyèdres réguliers
A partir du matériel Plot : triangles équilatéraux, carrés, pentagones et hexagones réguliers, on construit des polyèdres réguliers.

Dans un polyèdre convexe régulier :
- toutes les faces sont superposables.
- chaque sommet réalise la réunion du même nombre de faces.

2 - Mesure des angles d'un polygone régulier

La somme des angles internes d'un polygone (n côtés) est égale à :

(n - 2) x 180° = n x 180° - 360°



figures 1 et 2

La mesure d'un angle d'un polygone régulier de n côtés est : (n - 2) x 180° / n
Dans un pentagone régulier, un angle mesure : (5 - 2) x 180° / 5 = 108°
Dans un hexagone régulier, un angle mesure (6-2) x 180° / 6 = 120°

3 - Construction des polyèdres convexes réguliers

<u>Polyèdres dont les faces sont des triangles équilatéraux</u>

En réunissant 3 triangles autour d'un sommet (3x60° = 180°), on obtient le tétraèdre (4 faces).

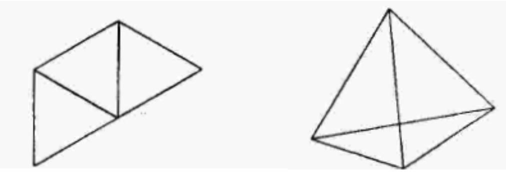


figure 3

En réunissant 4 triangles autour d'un sommet (4 x 60° = 240°), on obtient l'octaèdre (8 faces).

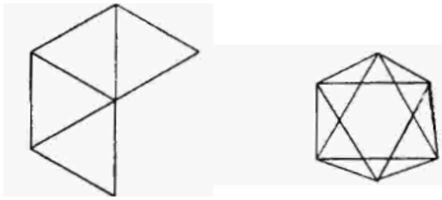


figure 4

En réunissant 5 triangles autour d'un sommet (5 x 60° = 300°), on obtient l'icosaèdre (20 faces).

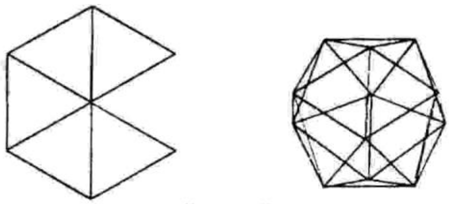


figure 5

Avec 6 triangles équilatéraux, on obtient le début d'un pavage du plan (6 x 60° = 360°).

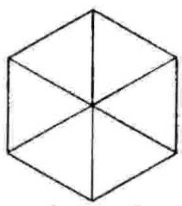


figure 6

Polyèdres dont les faces sont des carrés

En réunissant 3 carrés autour d'un sommet (3 x 90° = 270°), on obtient le cube (6 faces).

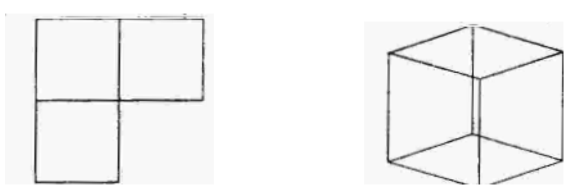


figure 7

Avec 4 carrés, on obtient le début d'un pavage du plan.

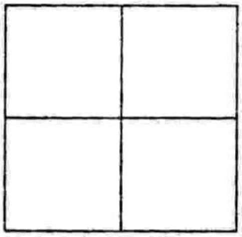


figure 8

Polyèdres dont les faces sont des pentagones réguliers

En réunissant 3 pentagones réguliers autour d'un sommet (3 x 105° = 315°), on obtient le dodécaèdre (12 faces).

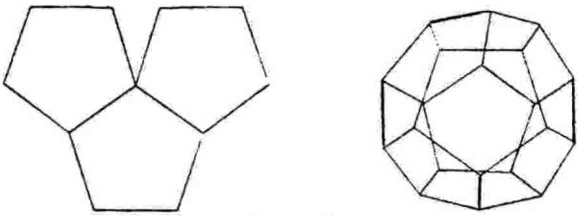


figure 9

4 x 105° > 360°

Avec les hexagones réguliers

Avec 3 hexagones réguliers. on obtient le début d'un pavage du plan.

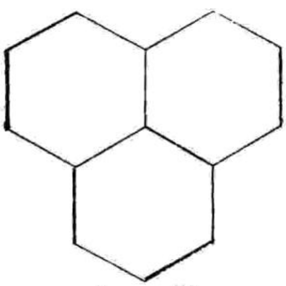


figure 10

Les polyèdres convexes réguliers ainsi construits sont les 5 solides de Platon.

4 - Des questions

Existe-t-il une relation liant le nombre de faces, le nombre d'arêtes et le nombre de sommets dans un polyèdre régulier ?

En prenant comme sommets les centres des faces d'un polyèdre régulier construit-on un nouveau polyèdre régulier?