Pour une définition dynamique des figures planes

Bernard Bettinelli

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - Besançon 1997.

Cet article présente certains travaux, menés par l'auteur, sur une approche dynamique des figures planes (parallélogrammes, polygones réguliers, triangles). Des pistes d'activités pour les classes sont présentées. Les élèves, par l'usage d'un matériel adapté, sont amenés à découvrir des propriétés géométriques des figures de base.

1 - L'origine du langage géométrique

Si on ouvre les « Éléments » d'Euclide [1], à la première page du Livre 1, on trouve une longue liste de définitions qui constitue le langage que le grand Géomètre va utiliser tout au long de son œuvre. En voici quelques-unes :

1 - Le point est ce dont la partie est nulle
2 - Une ligne est une longueur sans largeur
3 - Les extrémités d'une ligne sont des points
4 - La ligne droite est celle qui est également placée entre ses points
5 - Une surface est ce qui a seulement longueur et largeur
6 - Les extrémités d'une surface sont des lignes
8 - Un angle plan est l'inclinaison mutuelle de deux lignes qui se touchent dans un plan, et qui ne sont point placées dans la même direction
10 - Lorsqu'une droite tombant sur une droite fait deux angles de suite égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit ; et la droite placée au-dessus est dite perpendiculaire à celle sur laquelle elle est placée
14 - Une figure est ce qui est compris par une seule ou plusieurs limites
20 - Les figures rectilignes sont celles qui sont terminées par des droites
21 - Les figures trilatères sont terminées par trois droites
22 - Les quadrilatères, par quatre
23 - Les multilatères, par plus de quatre
24 - Parmi les figures trilatères, le triangle équilatéral est celle qui a ses trois côtés égaux
25 - Le triangle isocèle, celle qui a seulement deux côtés égaux
26 - Le triangle scalène, celle qui a ses trois côtés inégaux
27 - De plus, parmi les figures trilatères, le triangle rectangle est celle qui a un angle droit

---

[1] Les œuvres d'Euclide, trad. Peyrard

30 - Parmi les figures quadrilatères, le quarré est celle qui est équilatérale et rectangulaire
31 - Le rectangle, celle qui est rectangulaire et non équilatérale
32 - Le rhombe, celle qui est équilatérale et non rectangulaire
33 - le rhomboïde, celle qui a ses côtés et ses angles opposés égaux entre eux et qui n'est ni équilatérale, ni rectangulaire
34 - Les autres quadrilatères, ceux-la exceptés, se nomment trapèzes
35 - Les parallèles sont des droites, qui, étant situées dans un même plan et prolongées à l'infini de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté, ni de l'autre

On peut découvrir que le langage actuel est en grande partie fixé dès cette époque :
• Les premières définitions partant directement de l'observation, sont parfois obscures (point, ligne, droite, …), et confondent l'objet et sa mesure (ligne et longueur),
• Une ligne (ou surface) n'est pas un ensemble de points ; seules ses extrémités en sont,
• La droite est ce qu'on nomme aujourd'hui segment,
• La première grandeur définie est l'angle de deux lignes, et la première configuration particulière, l'angle droit, qui utilise une notion d'égalité non précisée (superposition),
• les classes de triangles et de quadrilatères sont désignées, mais définies de manière exclusive (Le rectangle, celle qui est rectangulaire et non équilatérale). Certains mots ont changé, en particulier le rhombe est devenu losange (vers 1 300), mot formé à partir de «losa» devenu lauze, qui désigne les pierres plates dont on recouvrait les toits des maisons,
• Le parallélogramme quelconque est désigné du mot « rhomboïde », c'est-à-dire « faux-losange » et que le mot parallélogramme n'y figure pas.
Cependant, en feuilletant le Livre 1, on le voit apparaître, après la construction de la parallèle à une droite donnée passant par un point donné (qui se fait par l'intermédiaire de deux triangles isométriques formant un parallélogramme !), à la proposition XXXIV :
« Les côtés et les angles opposés des *parallélogrammes* sont égaux entre eux, et la diagonale les partage en 2 parties égales. »
Ceci veut dire que ce mot englobe toutes les familles de quadrilatères qui ont leurs côtés opposés parallèles : carrés, rectangles, rhombes et rhomboïdes.
On peut faire une autre constatation, en comparant les classes de triangles et celles de quadrilatères : Euclide (et nous à sa suite !) désigne les classes de quadrilatères par des noms (carrés, rectangles, …) , alors qu'il différencie les triangles par des adjectifs (triangles rectangles, isocèles, …) : ne serait-ce pas un indice des qualités premières des parallélogrammes, dont celles des triangles et polygones se déduisent ?

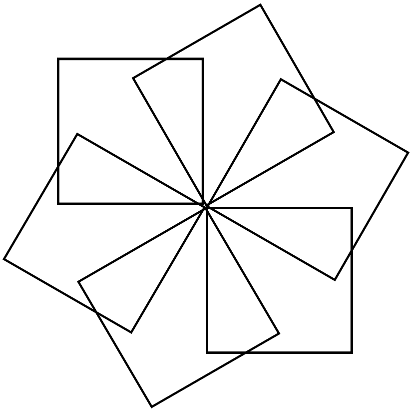
2 - Position du problème

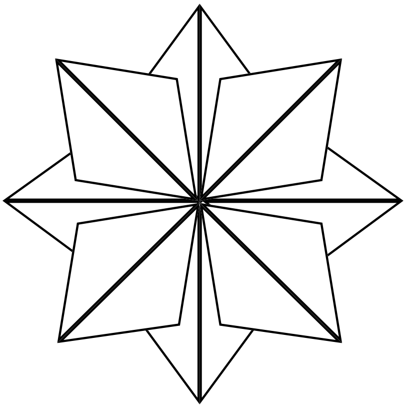
Les figures planes sont utilisées depuis la Maternelle dans des jeux de mosaïques, puzzles, … et les plus simples sont reconnues globalement : carrés, rectangles, losanges, ronds. Les petits refusent souvent d'appeler "triangles", des triangles quelconques : beaucoup réservent ce nom aux triangles équilatéraux ou isocèles.

Lorsqu'on veut faire des dessins géométriques, les outils qui me semblent premiers sont ceux qui permettent une reproduction conforme des figures : les gabarits. L'avantage des gabarits - et en même temps leur inconvénient - est de porter en eux la forme qu'on désire produire, et donc de ne servir qu'à elle. Leur usage nécessite, de ce fait, l'emploi de toute une « boîte à outils » de gabarits différents. Cette boîte à outils devient plus souple quand on commence à découvrir que les formes contenues ne sont pas indépendantes et qu'on peut se servir des unes pour dessiner soit les autres, soit des figures non contenues. Par exemple, on peut faire un carré avec un losange, un octogone régulier avec un carré, ou une étoile à 8 branches avec un octogone régulier. En procédant ainsi, on prend petit à petit conscience que chaque figure possède un grand nombre de qualités cachées, communes avec d'autres figures, et qu'elles entretiennent des « liens de famille ».

L'observation de figures planes placées entre deux miroirs reliés par un dos et s'ouvrant comme un livre à angle variable est une autre source d'observation d'une multiplicité de dispositions de figures (sur le principe du kaléidoscope). Je me suis donné comme projet de faire reproduire de telles configurations, et d'autres encore plus complexes, en cycle III, avec le jeu de gabarits [2].

Voici deux exemples :

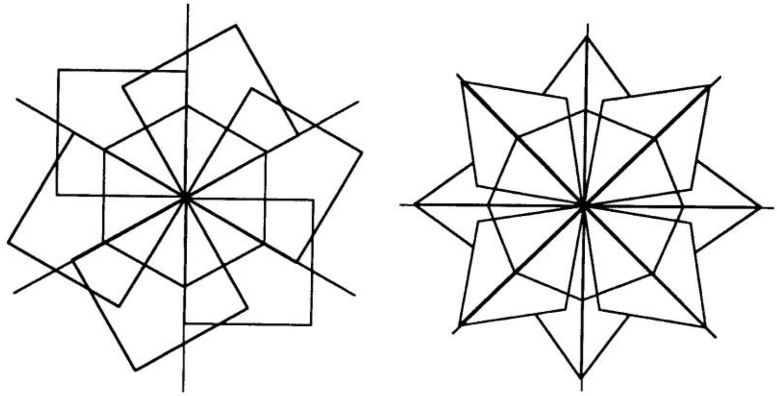




La figure reproduite est facilement repérable dans la boîte à outils (carré ou triangle isocèle), mais comment faire pour disposer correctement les différentes copies ? Les « fleurs » ont 6 et 8 pétales qui tournent comme un manège ; et ces nombres 6 et 8 sont inscrits l'un dans l'hexagone, l'autre dans l'octogone réguliers qui peuvent devenir le moteur de ces manèges. Les enfants ont très vite compris

[2]La Moisson des Formes, B. Bettinelli

cette relation, et sur de multiples dessins, en ont utilisé les effets en choisissant comme dans les exemples ci-dessus, deux pièces : soit un carré et un hexagone, soit un triangle et un octogone. Le polygone régulier est utilisé en premier et permet la construction d'une sorte d'échafaudage formé de ses grandes diagonales, dessiné au crayon, et dont le rôle indispensable pour le placement de l'autre figure doit s'effacer en fin de tracé.



Ces exemples parmi beaucoup [3] montre les deux rôles : objet (figure faisant partie du dessin final) ou outil (producteur de lignes de construction) que peut prendre un gabarit. Et ce sont des déplacements et retournements qui peuvent décrire les étapes de la construction.
Voici un autre élément de réflexion : on présente souvent les figures simples (en particulier les différentes classes de parallélogrammes) à l'aide d'une liste de propriétés de mesures (un losange est un quadrilatère qui a 4 côtés de même longueur, des diagonales perpendiculaires, …). L'élève du Primaire devra comprendre qu'on différencie l'une d'elles pour définir, et les autres comme conséquences non équivalentes en général dans une liste où toutes les propositions sont de même nature ; celui du Collège aura à faire un retournement de pensée important en triant ce qui est caractéristique parmi toutes ces propriétés. Souvent, il vérifiera un excès de ces propriétés avant d'oser donner la classe de la figure, et cela mérite que nous y accordions une grande importance car c'est à peu près la première forme de démonstration qu'il rencontre : *si je sais que ..., alors je peux affirmer que c'est un ...*
Pour toutes ces raisons, j'aimerais proposer une présentation des figures planes à l'aide de définitions dynamiques qui se décrivent en termes de mouvements et reproductions et non par une liste de propriétés de mesure, propriétés que l'élève découvrira lui-même à travers les actions.
Voici quelques propositions qui me semblent répondre à cette question :

[3]Instruments géométriques à l'École élémentaire, IREM de Besançon

3 - Reconnaissance des invariants

a) Le dessin géométrique

L'organisation de figures complexes faites à l'aide de gabarits permet une imprégnation des qualités de mesure : juxtaposition de pièces dans une frise ou un pavage, qui ont même longueur de côté, pièces qui s'alignent parce que leurs angles sont supplémentaires, …

L'utilisation de la règle et du compas permet une intégration d'un dessin dans un contexte plus vaste (par exemple un dessin de base de pentagone régulier permet avec une grande règle de construire une grande imbrication d'étoiles et de pentagones gigognes aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur du premier tracé, le compas permet de créer des polygones réguliers de toutes tailles à partir de ceux de la boîte à outils, …) ; mais ils permettent aussi la construction de lignes supports sur lesquelles se placeront les éléments du dessin comme dans les exemples décrits ci-dessus.

Certaines activités forceront la prise de conscience de l'originalité fonctionnelle de ces figures qui ont un nom : carré, rectangle, hexagone régulier, …

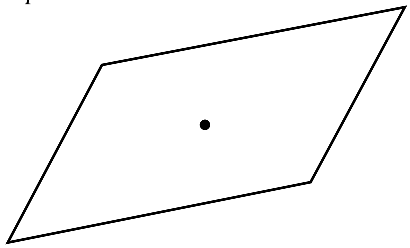
b) Le jeu des traces

Wheeler[4] en 1970 proposait de découper au cutter une figure dessinée sur carton et d'essayer de la replacer dans le trou ainsi formé. Chaque famille intéressante a ses propres façons de se replacer. Plus simplement, en disposant de figures matérielles, on peut, au crayon, tracer le contour de chacune et la placer et replacer pour qu'elle rentre dans sa trace, en analysant les mouvements permis.

Les mouvements les plus faciles à repérer sont les retournements (demi-tours dans l'espace qui correspondent aux réflexions du plan) qui permettent de replacer :

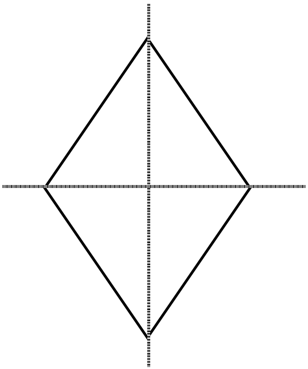
- un losange, en le retournant autour des diagonales
- un rectangle, en le retournant autour des médianes
- un carré, en le retournant autour des médianes et des diagonales.

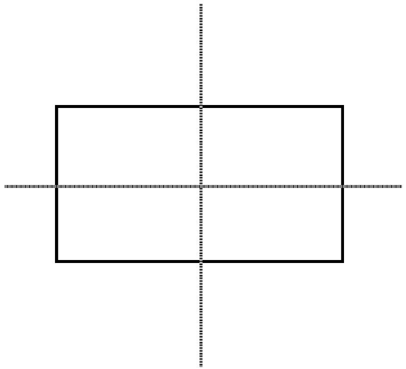
Les rotations qui transportent chaque côté sur le suivant dans les polygones réguliers (et donc dans le cas du carré) sont, elles aussi, familières. Par contre, il est beaucoup moins naturel de penser à faire exécuter un demi-tour « complet » à un parallélogramme (symétrie centrale) pour le replacer « tête en bas ». *Et c'est cependant l'invariant commun à tous les parallélogrammes, particuliers ou non*.



[4]Wheeler D., (1970) : « Mathématiques pour l'École élémentaire », O.C.D.L.

Il est facile de découvrir, en retournant un losange dans sa trace, que ses 4 côtés ont même longueur, ou que chaque diagonale est bissectrice des angles au sommets qu'elle partage et aussi médiatrice de l'autre :
- par l'un des retournements, les côtés « supérieur » et « inférieur » s'échangent (donc ont même longueur) ; par l'autre, c'est les côtés « droit » et « gauche ».
- de même les petits secteurs formés par une diagonale dans chaque secteur au sommet qu'elle découpe, s'échangent 2 à 2, ainsi que les 2 segments découpés sur l'autre diagonale et les angles qu'ils font avec elle.





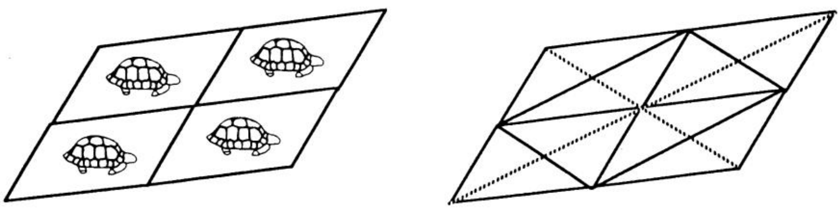
Mais en retournant un rectangle dans sa trace, chaque secteur prend la place des 3 autres et ils font le même angle, mais faut-il savoir que la somme des angles de tout quadrilatère est 360° pour pouvoir affirmer qu'il a 4 angles droits ?

Pour que cette analyse soit plus facile, on peut charger le gabarit de différents repères :
• un dessin figuratif non symétrique (animal ou personnage) collé sur les deux faces par transparence, et qui va se retrouver retourné de droite à gauche ou de haut en bas, ou tourné « les quatre fers en l'air »,
• des lignes colorées sur les côtés ou les diagonales, pour voir où elles vont et affirmer que des segments qui prennent la place l'un de l'autre on même longueur (par exemple un polygone régulier a tous ses côtés de même longueur ; un rectangle a deux diagonales de même longueur, un losange a ses 4 côtés de même longueur, …),
• de petits secteurs circulaires colorés pour voir comment ils s'échangent et donc ont le même angle (deux secteurs opposés d'un parallélogramme, les secteurs découpés par une même diagonale d'un losange, les secteurs aux sommets des polygones réguliers, …).

L'idée d'agrandissement est elle aussi porteuse d'un grand nombre de renseignements faciles à lire.

c) Agrandissements « par translations » et parallélogrammes

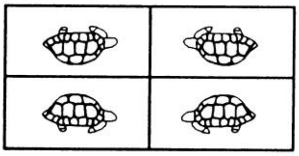
D'où viennent les particularités des parallélogrammes ? du parallélisme de ses côtés, bien sûr ! et comment faire intervenir ce parallélisme dans un jeu de manipulation ?
C'est en essayant de répondre à cette question que j'ai découvert un fait simple mais étonnant :
Je peux agrandir un parallélogramme - particulier ou non - et doubler ses dimensions en glissant un gabarit le long de ses côtés, et ce sont les seules figures (pas seulement quadrilatères, mais surfaces compactes) auxquelles je peux appliquer ce procédé.
Et voilà, en termes de transformations, une caractérisation des parallélogrammes!

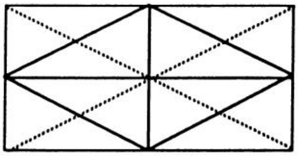


Une première chose saute aux yeux : j'ai placé les 4 secteurs autour du point central et ils remplissent le plan, c'est à dire : la somme des 4 angles de tout parallélogramme est 360°.
Une deuxième : les côtés opposés se sont recollés en glissant et sont donc parallèles et de même longueur.
Une troisième : les diagonales du grand parallélogramme sont formées chacune de 2 exemplaires d'une diagonale du gabarit, donc se coupent en leur milieu
Et d'autres encore : les secteurs opposés se retrouvent au centre, opposés par leur sommet, les autres diagonales du gabarit forment un nouveau parallélogramme joignant les milieux des côtés du grand, …

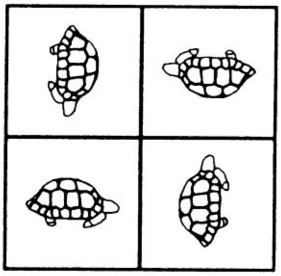
Y aurait-il alors un agrandissement particulier rendant compte de la particularité des rectangles ?
L'agrandissement « par translations » est toujours possible **parce que tout rectangle est un parallélogramme** et c'est donc un moyen de le faire admettre comme élément de cette famille. Mais le même grand rectangle peut être construit <u>en retournant le gabarit</u> successivement autour de chacun de ses côtés. Et cette fois les qualités qu'on lui découvre par ce nouveau procédé sont celles qui lui sont particulières :
• D'abord, on voit que c'est le même secteur qui remplit 4 fois le secteur plein central, et donc : chaque angle est le quart de l'angle plein, soit ce qu'on nomme angle droit (comme dans le pliage en 4 de la feuille de papier).

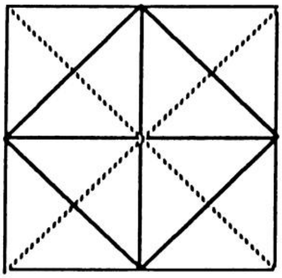
• Ensuite, c'est la même diagonale qui construit les 2 diagonales du grand rectangle par son double : donc elles ont même longueur (et même milieu)
• Enfin l'autre diagonale construit un losange joignant les milieux de ses côtés.



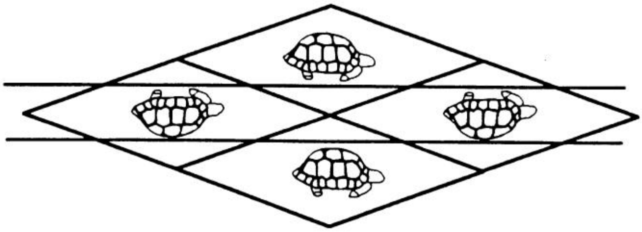


Et de même, peut-on agrandir un carré d'une manière qui lui est propre ? Par quarts de tour autour d'un de ses sommets, bien sûr ! Les résultats qui s'en déduisent sont comparables à ceux qu'on obtient par quarts de tour à l'intérieur de la trace.





Et pour les losanges, qu'en est-il ? Il y a aussi un type d'isométries qui lui est propre : des symétries glissées d'axes passant par les milieux de 2 côtés consécutifs. Elles ne sont ni connues, ni simples à utiliser ; mais heureusement pour nous, comme je l'ai décrit plus haut, le jeu des traces, dans leur cas, nous donne tous les renseignements que l'on peut désirer. En particulier, les deux diagonales le partagent en 4 triangles, deux à deux juxtaposés et symétriques.



On peut remarquer que pour tous les parallélogrammes, il existe encore une autre façon de se déplacer dans son double : par demi-tours autour des milieux des côtés jointifs.
Il n'est pas très « naturel » de définir une figure par rapport à son agrandissement (de rapport 2) ; je vais donc plutôt comparer la figure à une partie propre capable de produire la figure complète par certaines transformations.

4 - Propriétés de mesures et « classements inclusifs » des quadrilatères

En exploitant conjointement les 2 méthodes de découverte décrites plus haut : jeu des traces et agrandissements, les propriétés des parallélogrammes qu'on enseigne au Collège sont accessibles directement par les étudiants. Si un côté vient sur un autre par glissement le long d'une règle, ces 2 côtés sont parallèles ; si un côté prend la place d'un autre par un mouvement quelconque, ils ont même longueur ; si un secteur prend la place d'un autre par un mouvement quelconque, ils ont même angle.
Quelles propriétés fondamentales des différentes familles de parallélogrammes ne peut-on découvrir, soit par l'une, soit par l'autre de ces 2 dynamiques, soit par les deux ?
Les propriétés-outils utilisées implicitement dans cette démarche sont les suivantes :
• Conservation des longueurs et angles par les translations, réflexions et rotations,
• L'image de toute droite par une translation ou une symétrie centrale est une droite parallèle.
On peut remarquer que le jeu des traces sert aussi à trier les polygones réguliers et à découvrir leurs propriétés, puisqu'ils sont les seuls polygones invariants par une rotation amenant un côté sur un côté consécutif. Et c'est ainsi qu'avec ses quarts de tour, le carré est comme on l'écrivait avant : un quarré ou quadrilatère régulier.
Doit-on demander à nos élèves de toujours disposer de figures gabarits ? Certainement pas, et à l'image des enfants qui tournent naturellement la feuille pour se mettre dans l'axe d'un losange, nous devons leur proposer une action symbolique, par la pensée, directement sur de dessin, dès qu'ils en ont conscience.
C'est en voyant dans leur tête tourner et retourner les figures qu'ils auront des critères intérieurs de la vérité de leurs propositions.

5- Définitions et propriétés dynamiques

Parmi les figures planes, une définition dynamique $\mathcal{D}$ et une propriété de reproduction[5] $\mathcal{P}$ (par isométries) sont intéressantes pour les classes de parallélogrammes et les polygones réguliers. Elles peuvent avoir la forme suivante :

[5] Un rectangle, un carré, un triangle demi-rectangle et un triangle demi-carré placé entre 2 miroirs à angle droit donnent la vision de toutes les propriétés de reproduction par réflexion des parallélogrammes particuliers.

• $\mathcal{D}$: Un **parallélogramme** est un quadrilatère invariant (c.-à-d. qu'il revient dans sa trace) par demi-tour (symétrie centrale).

$\mathcal{P}$: On peut partager tout parallélogramme en quatre parties par des parallèles aux côtés passant par le centre. Il est engendré à partir de l'une d'elles par des translations[6].

• $\mathcal{D}$: Un **rectangle** est un quadrilatère invariant par réflexions autour de ses médianes (droites passant par les milieux de côtés opposés).

$\mathcal{P}$: On peut partager tout rectangle en quatre parties par ses médianes et il est engendré à partir de l'une d'elles par des réflexions.

• $\mathcal{D}$: Un **losange** est un quadrilatère invariant par réflexions autour de ses diagonales.

$\mathcal{P}$: On peut partager tout losange en quatre triangles par ses diagonales et il est engendré à partir de l'un d'eux par des réflexions.

• $\mathcal{D}$: Un **carré** est un quadrilatère invariant par un quart de tour (rotation à droite ou à gauche de 90°).

$\mathcal{P}$: On peut partager tout carré en quatre parties triangles ou quadrilatères et il est engendré à partir de l'une d'elles par quarts de tour répétés.

• $\mathcal{D}$: Un **polygone régulier** est un polygone qu'on peut tourner dans sa trace pour amener un côté sur le suivant.

$\mathcal{P}$: On peut partager tout polygone à n côtés régulier en n triangles et il est engendré à partir de l'un d'eux par rotations répétées de $\frac{1}{n}$ tour.

Tout triangle est un « demi-parallélogramme » : tout parallélogramme se partage en deux triangles symétriques par rapport à son centre par l'une ou l'autre des diagonales ; tout triangle peut être « doublé » de 3 façons en un parallélogramme par demi-tour autour du milieu de chacun de ses côtés.
Pour les différentes classes de triangles - leurs définitions se réfèrent aux précédentes :

• Un **triangle isocèle** est un « triangle demi-losange ».
• Un **triangle rectangle** est un « triangle demi-rectangle ».
• Un **triangle isocèle rectangle** est un « triangle demi-carré ».
• Un **triangle équilatéral** est un « triangle régulier ».

Ces propriétés des parallélogrammes et des polygones réguliers sont fonctionnelles. J'ai montré qu'elles permettent la découverte des propriétés de mesures ; elles donnent aussi celles des triangles : par exemple, l'aire des polygones se réfère à celle des triangles par découpages, qui se réfère à celle des triangles rectangles, qui se réfère elle-même à celle des rectangles par moitié ; la somme des angles d'un parallélogramme est naturellement de 360° puisque ses quatre secteurs se placent au centre de l'agrandissement ; donc la somme des angles d'un triangle est moitié, soit 180°, celle d'un quadrilatère 360° parce qu'il se coupe en deux triangles, …

[6]On peut faire le rapprochement avec les notions de domaine fondamental et de motif minimal d'un pavage du plan.

Une question se pose au sujet de ces définitions : doit-on les transmettre ou peut-on les faire découvrir par les élèves ? Le fait d'avoir utilisé les isométries dans la construction de dessins complexes ne suffit pas à en prendre conscience, mais en donne la chance. Les images mentales laissées par ces dynamiques peuvent permettre, au moment opportun, de découvrir les qualités de conservation qui leur ont donné ce nom.
La qualité « être un rectangle, parallélogramme, polygone régulier, … » n'est jamais le propre d'une figure particulière, mais d'une famille infinie. Et pour qu'un élève ait la chance de découvrir cette qualité, il doit exercer sa sagacité sur un grand nombre d'exemples de deux familles complémentaires : celles qui la possèdent et celles qui ne la possèdent pas.

Le travail remarquable de Britt-Mary Barth[7] donne des moyens que je vais esquisser sur l'exemple de la définition des polygones réguliers :
L'objet d'étude est inconnu, donc n'a pas encore de nom ; et pour éviter que le nom crée une image fausse préétablie, appelons-le « la chose ». Dans un premier temps, il s'agit de donner la règle du jeu :
« Je vais vous présenter des objets séparés en 2 familles par un critère que j'ai en tête et que vous allez découvrir. La première contient les exemples "OUI", qui vérifient tous le critère ; l'autre contient les "NON" qui ne le vérifient pas. Vous allez essayer de deviner ce critère. Toutes les idées seront notées au tableau. Elles seront ensuite rayées si elles ne sont pas un attribut essentiel de tous les "OUI" ».
Le premier exemple "OUI" sera par exemple un hexagone régulier et le premier "NON", un cercle. Chacun tente une distinction que l'enseignant écrit.
Les exemples "OUI" et "NON" seront ensuite choisis pour confirmer ou infirmer les hypothèses jusqu'à l'obtention d'un critère ou d'une liste de critères tous vérifiés par chaque "OUI" ; jamais totalement par chaque "NON".
Les questions posées par l'enseignant forceront les élèves à affiner leur analyse : Est-que ce critère est vérifié par *tous* les "OUI" ? Voyez-vous une autre *propriété commune* à *tous* les "OUI" ? ; Est-que cet exemple "NON" remet en cause certains critères énoncés précédemment ?
L'auto-évaluation consistera, pour chacun, à dessiner un essai de "OUI" et de "NON" ; l'enseignant saura si le critère est intégré en totalité ou si de nouveaux exemples ou un retour sur ceux qui sont présentés est nécessaire.
La difficulté est d'avoir présente une batterie significative d'exemples "OUI" et "NON" et de les donner au bon moment pour faire sentir l'adéquation ou la non-adéquation d'une hypothèse. Les exemples doivent présenter au départ une opposition franche ; puis, petit à petit, permettre de cerner le concept.

Traces graphiques, traces écrites

Quelles traces peut-on demander aux élèves dans l'optique envisagée ?

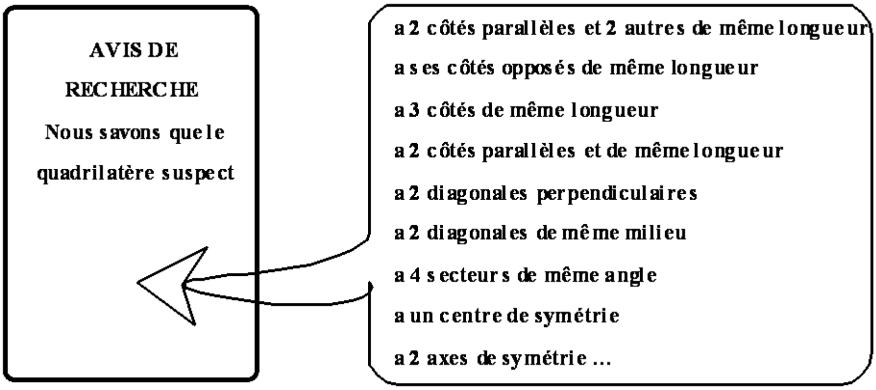
---

[7] L'apprentissage de l'abstraction, Britt-Mary Barth, 1987, Ed Retz

• D'abord le dessin géométrique, brouillon et définitif d'une configuration réalisée avec les gabarits, la règle et le compas qui peut être soit une création sur un thème (frise, pavage, mosaïque, étoile, couronne, …), soit la reproduction fidèle d'un modèle.
• L'explication écrite par un petit texte de la chronologie des tracés.
• L'analyse, dans une page de modèles, du « programme de construction » de chaque dessin (sans les réaliser effectivement).
• Sur des traces d'un gabarit, le collage de gommettes - ou le dessin figuratif - d'un animal, drapeau ou objet repère du mouvement.
• Dans l'angle de 2 miroirs placés à angle droit, placer successivement un gabarit rectangle, un carré, un triangle demi-rectangle, un triangle demi-carré pour former un parallélogramme particulier et représenter avec ces gabarits les configurations observées.
• Sur la trace double d'un gabarit de parallélogramme, rectangle, carré, le collage de gommettes de l'objet repère des mouvements.
• Sur la trace d'un parallélogramme, losange, rectangle, carré, le partage en quatre et le collage de gommettes de l'objet repère des mouvements.
• Sur une (ou des) trace(s) d'un gabarit, la mise en même couleur des propriétés de mesures repérées.
• La liste écrite de ces propriétés.
• Sur une fiche identité contenant une liste préétablie de propriétés, des cases "Vrai" ou "Faux" à cocher pour une figure donnée.

L'action réciproque, qui demande de savoir choisir parmi la liste des propriétés de mesure, lesquelles - ou quels sous-ensembles desquelles - permettent d'étiqueter la figure dans une famille, doit être abordé avec des activités adaptées, afin d'en permettre la prise de conscience.
Pour aborder ce point, j'ai essayé de construire plusieurs jeux de cartes où une propriété de mesure (*Polygone mystérieux, Avis de recherche*) est inscrite. (Le nom de ces jeux inclut une part de mystère, comme dans une enquête policière où on dispose d'indices parfois insuffisants, parfois suffisants pour découvrir un coupable). On tire une ou plusieurs cartes d'un jeu et, comme l'inspecteur, on essaie de trouver - ou construire - la figure inconnue à travers les indices recueillis [8].

[8] Voir les documents (manuel et cahiers) accompagnant la Moisson des Formes.



Plusieurs types d'actions sont possibles :
• A partir d'une figure, un « codeur » trie les cartes qui sont vraies ; le « décodeur » tire successivement des cartes et essaie de bâtir une sorte de « portrait-robot » de la figure à découvrir. Certaines cartes donneront des indices nouveaux, d'autres n'apprendront rien de plus.
• Avec le même départ, le codeur insère un « faux-témoignage » (incompatibilité). Le but est de trouver le « faux-témoin ».
• Par un tirage aléatoire dans l'ensemble des cartes, on peut chercher à construire une figure. Il est important alors de reconnaître les « faux-témoins ».
• Les cartes du jeu peuvent aussi être classées et rangées :
  - classées par piles donnant des informations équivalentes.
  - piles rangées lorsque les informations sont rangées par implication.

Bibliographie

PEYRARD, *Les œuvres d'Euclide,* trad., Librairie Blanchard [1966]
D. WHEELER, *Mathématiques pour l'École élémentaire*, . OCDL [1970]
B.-M. BARTH, *L'apprentissage de l'abstraction,* RETZ [1987]
B. BETTINELLI, *La Moisson des Formes* (livre et matériel) [1994] ; 5 cahiers (*Le dessin géométrique avec la Moisson des formes, niveaux 1, 2, 3* [1995] ; *Mesures* [1996] ; *Géométrie au Collège,* [98], 1 rue de la Perrouse 25 115 POUILLEY LES VIGNES