Epistémologie et didactique : un exemple de cadre conceptuel pour analyser l'enseignement de la géométrie

Catherine Houdement - Alain Kuzniak

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques – Angers 1995.

Cet article, présente une réflexion globale sur l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. Il s'interroge notamment sur le sens et la cohérence à donner à cet enseignement. Il propose de fonder cette cohérence sur une approche épistémologique de la nature de la géométrie et des relations entre la géométrie et la notion d'espace.

I - Position du problème.

I.1 Un vieux débat

L'enseignement de la géométrie a toujours tenu une place à part dans l'édifice des mathématiques. Il a suscité des polémiques sur sa nature et ses formes d'enseignement, et cela non seulement chez les spécialistes des mathématiques, mais même dans les sphères politiques responsables des contenus d'enseignement.

Illustrons notre propos par un débat à la chambre des députés le 29 avril 1833, entre M.Guizot, ministre de l'instruction publique, et d'autres députés, débat qui porte sur la rédaction des contenus de l'instruction primaire et primaire supérieure. Des avis différents se manifestent d'une part sur la nécessité d'un enseignement des éléments de la géométrie aux instituteurs et d'autre part sur la différence entre dessin linéaire[1] et éléments de géométrie (au sens d'Euclide). Le débat oscille entre la nécessité d'enseigner les fondements avant de passer aux applications pratiques (les tracés) ou bien l'enseignement préalable des savoir-faire pratiques, accessibles à tous, pour garder l'enseignement des fondements pour plus tard (éventuellement). Notons ces deux citations :

“ Les éléments de géométrie sont le principe, le dessin linéaire n'est que l'écriture de la géométrie ; il faut dire éléments de géométrie, dessin linéaire, arpentage et autres applications ” (M de Tracy, député).

[1] Dessin linéaire : tracé aux instruments des lignes droites, des parallèles, des perpendiculaires, des courbes, des figures, des polygones inscrits ; division des lignes ; solides, usage de l'échelle, perspectives...Le tout sans essai de fondement, ni de justification théorique

“ Le dessin linéaire ne suppose pas la connaissance de la géométrie, c’est une chose purement mécanique ; l’on interdit même aux enfants qui apprennent le dessin de se rendre compte de ce qu’ils font ”. (M de Laborde, député).
Un autre débat met particulièrement en scène la géométrie. Doit-on enseigner des éléments de raisonnement (et donc des éléments de géométrie) aux enfants du peuple et à leurs enseignants issus des mêmes milieux sociaux ? Ou doit-on seulement leur enseigner des savoir-faire pratiques liés à l’arpentage ou aux problèmes concrets de mesure de l’époque ? Témoin de ces hésitations, la géométrie disparaîtra de l'enseignement en France (loi Falloux 1850) pour réapparaître quelques années plus tard.

I.2 Aujourd’hui

Les mêmes oppositions réactualisées s’exercent sur la formation actuelle en géométrie des professeurs d’école et rendent cette formation particulièrement problématique.
En effet on assiste à ce niveau à un phénomène de double évacuation de la géométrie :

- La tendance concrète tend à réduire la géométrie à une appropriation de connaissances spatiales basées sur la manipulation de différents matériels. Les objets de cette géométrie sont situés dans le monde 1 de Popper K. (1972), celui des objets physiques et matériels.
- La tendance abstraite fait évoluer la géométrie (des mathématiques en général) vers une étude des structures (groupe, espace vectoriel, programme d'Erlangen de Klein 1872) et regroupe des secteurs "anciens" par analogies structurales ; dans cette conception, la géométrie élémentaire n'existe plus en tant que telle ; elle n'est plus qu'une partie de l'algèbre linéaire. Or l'algèbre linéaire n'est pas un objet d'étude mathématique de l'école (ni des professeurs d'école). Cette fois, il s’agit clairement d’une géométrie insérée dans le monde 3 de Popper, celui des figures idéales et des théories.

La première difficulté de l'enseignement de la géométrie aux professeurs d'école provient des différentes conceptions de la géométrie qui apparaissent au cours de la formation des étudiants. Nous reviendrons sur cette question mais nous pouvons affirmer grossièrement que nos étudiants, avant leur entrée à l’IUFM ont généralement suivi des cours de géométrie de “ type Lycée ou Université ”et auront à enseigner une géométrie de type différent, pour faire bref disons de “ type école ”.
Le second problème est celui de la définition et même de l'existence de cette géométrie de “ type école ”, compte tenu du rôle du raisonnement dans l’enseignement. Certains auteurs pensent que sans démonstration, il n'y a pas de géométrie ; or les capacités de l'élève de l'école ne lui permettent pas d'accéder à cette maîtrise bien calibrée du raisonnement. Donc la géométrie de l'école n'est au mieux qu'un ensemble de recettes (... de la cuisine !).
Les conséquences de ces conceptions vont se faire sentir dans les centres de formation (I.U.F.M.) des enseignants. En effet, s'il n'y a pas de véritable

géométrie à l'Ecole Elémentaire, faut-il continuer à enseigner la géométrie en formation des maîtres du premier degré ? De même si la géométrie de l'école se réduit à un ensemble de recettes, ne vaut-il pas mieux laisser les futurs maîtres faire leur propre cuisine et restaurer le vieux clivage entre dessin linéaire et éléments de géométrie ?

II - Un exemple de cadre conceptuel.

Il nous semble qu'une grande partie de la confusion qui règne dans l'enseignement autour de la géométrie résulte de la diversité de points de vue qui renvoient finalement à des conceptions et à des approches méthodologiques différentes. Or, dans une perspective de formation d'enseignants il est nécessaire de s'interroger : " *pourquoi faire de la géométrie ?*" et *" pourquoi faire faire de la géométrie ?*". Cela suppose un détour épistémologique mais ce détour peut envisager de multiples chemins. Dans le cadre de notre étude qui concerne des enseignants apprenant les mathématiques pour les enseigner ensuite à des élèves, il nous semble important de privilégier les approches épistémologiques qui valorisent la relation entre le sujet et l'objet de connaissances.
Nous avons choisi comme première approche des problèmes posés précédemment d'utiliser les travaux de Ferdinand Gonseth en les interprétant en fonction de notre position de formateur d'enseignants.
Gonseth est né en 1890 dans le Jura bernois et est mort à Lausanne en 1974. C'est un mathématicien, contemporain de Piaget (1896-1980) qu'il a côtoyé et dont il a dit :"Piaget n'a aucun sens des mathématiques. Tout ce qu'il en dit, c'est moi qui le lui ai appris ...". Gonseth a été presque aveugle assez jeune. Il a été Professeur à l'école polytechnique de Zurich. Il a également formé pendant deux ans des enseignants, ce qui a donné naissance à son ouvrage *Les fondements des mathématiques* (1926 Editions Blanchard). Il est surtout connu pour ses écrits en philosophie des sciences. Parmi ses autres ouvrages traitant de la géométrie citons notamment :

1936 *Les mathématiques et la réalité*, Editions Blanchard

1945-1955 *La géométrie et le problème de l'espace*, Editions du Griffon, Lausanne

Un colloque a été consacré en 1990 à Gonseth dont les actes sont parus sous le titre suivant :

1992 *Espace et horizon de réalité*, colloque sur GONSETH, par Panza et Pont, Editions Masson

Gonseth intègre sa réflexion sur la géométrie dans le cadre plus vaste d'une réflexion sur la démarche scientifique. Son approche n'est pas historique mais dialectique et vise à mieux comprendre l'effort qui construit et fédère la géométrie dans son rapport à l'espace et au monde sensible. Pour cela, il dégage différentes synthèses dialectiques de la géométrie qui s'organisent précisément autour de trois piliers essentiels : intuition, expérience et déduction.

II.1. Intuition, expérience et déduction

Dans la perspective pédagogique qui est la notre, il importe de bien comprendre l'évolution et les rapports existants entre géométrie et réalité. Pour un sujet confronté à l'apprentissage de la géométrie, cette articulation passe par une meilleure définition des trois modes de connaissances de l'espace que constituent la déduction, l'intuition et l'expérience.
Nous allons maintenant préciser le sens que nous attribuons à ces trois termes en revisitant ces expressions. Puis nous développerons notre propre synthèse qui résulte d'une adaptation à notre sujet d'étude des travaux de Gonseth.

II.1.1. L'intuition.

Prendre en compte l'intuition nous semble fondamental dans l'approche de la géométrie. Mais le premier embarras que l'on éprouve en mettant l'accent sur l'intuition provient de la difficulté à définir précisément ce qu'englobe ce terme. A moins d'admettre que tout le monde a une intuition de ce qu'est l'intuition. Mais il nous importe ici d'être opératoire.
L'approche de l'intuition relève, sans doute, de différents champs de connaissance comme la logique ou la psychologie. Nous suivrons Gonseth lorsqu'il reprend l'idée kantienne de forme intuitive comme forme a priori de la connaissance de l'espace. L'intuition apparaît comme le réceptacle interprétatif de nos sensations, elle structure la pensée en terme d'évidence. L'intuition peut se caractériser alors comme une prise de contact immédiate, directe, concrète avec son objet. Mais ce contact direct réalise en même temps la compréhension la plus intime avec son objet, le saisissant dans son essence et dans sa singularité. L'intuition s'opposerait ainsi à tout ce qui est pensée discursive, "*chaîne de raisons ", détours de la démonstration, mise en œuvre formelle, application minutieuse d'une méthode*.
Dans notre conception, l'intuition peut évoluer avec le sujet grâce à un ensemble d'expériences et donc de connaissances a posteriori. La contradiction n'est qu'apparente : il faut voir l'intuition structurée au niveau de l'individu en un ensemble de strates qui se superposent et font oublier les premières intuitions. Certaines de ces strates seraient communes à tous les individus ; c'est le travail des psychologues de les mettre en évidence (théorie des stades), d'autres dépendraient de la pratique du sujet et seraient dépendantes du passé scolaire ou professionnel.

II.1.2. L'expérience.

L'expérience permet d'approcher la géométrie en restant proche de l'action et d'une certaine réalité physique. La nature de l'expérience géométrique va dépendre des objets sur lesquels elle s'exerce.
Ainsi dans un premier cas, faire une expérience en géométrie ce sera tenter de vérifier matériellement ce que l'on avance. On montrera par exemple que la somme des angles intérieurs d'un triangle est un angle plat en rapprochant des gabarits des trois angles du triangle. Pliages, découpages et constructions à la règle et au compas constituent la base de cette approche expérimentale qui peut

déjà être développée à l'école. Cette approche se développe dans un espace mesurable, grâce à la perception ou à des instruments.
Aux moyens traditionnels d'expérimentation s'ajoutent désormais les possibilités offertes par l'informatique avec certains logiciels (Cabri-géométre ou Logo). Il s'agit ici de simulations qui opèrent sur des objets virtuels. Ainsi peut-on découvrir certaines intersections de droites, certains alignements de points ou des lieux géométriques. Les fractales sont l'illustration la plus contemporaine de ce lien entre géométrie et expérience par l'intermédiaire de la simulation.
Enfin une dernière forme d'expérience peut être mentale, *experimental thought*, elle consiste à mettre en œuvre mentalement des déplacements, des découpages sans les effectuer réellement.

II.1.3. La déduction ou ratio.

On peut définir la déduction en disant que, certaines connaissances étant considérées comme acquises, elle consiste à en tirer d'autres qui en sont les conséquences. La déduction permet d'atteindre de nouvelles informations à partir de celles déjà acquises, sans recours à l'expérience ou à toute autre source extérieure. Elle est basée sur le raisonnement logique et elle permet de réorganiser les apports de l'expérience. Nous employons le mot **déduction** mais l'usage que nous en faisons est plus vaste et proche du raisonnement dans son ensemble.
Le pôle déductif et logique est certainement le plus naturel quand on pense à la géométrie. Certains ne justifient le maintien de l'enseignement de la géométrie que pour les apports logiques qu'elle est censée apporter. Mais il est important de ne pas réduire ces aspects déductifs à la démonstration basée sur des axiomes bien définis et en nombre réduit. L'enfant peut aussi faire des déductions et prouver des affirmations déduites de ses observations et basées sur des constructions. C'est graduellement qu'il lui sera demander d'argumenter à partir de certaines propriétés des figures qui auront été définies avec lui. Ces figures deviennent alors le support adapté pour guider l'intuition mais elles ne suffisent plus à fournir une preuve. Nous illustrerons plus loin ce point de vue.

II.1.4. Articulation entre intuition, expérience et déduction.

Chez Gonseth, l'intuition et l'expérience “ constituent le pôle empirique de la géométrie, la déduction participe du pôle théorique ”. Gonseth illustre le lien entre ces trois aspects par cette affirmation : “ être géomètre c'est ne pas confondre une évidence issue de l'intuition avec un renseignement issu de l'expérience et le résultat d'une expérience avec la conclusion d'un raisonnement ”.
Ainsi les élèves réussissent à tracer un "vrai" triangle dont les dimensions sont 8, 6 et 14. Le résultat de l'expérience est invalidé par la déduction (inégalité triangulaire) qui permet de conclure à la nature "aplatie" du triangle en question.
Enfin, René Thom illustre la nécessaire relation entre intuition et déduction par cette métaphore très audacieuse : “ La déduction est à l'aveugle ce que l'intuition est au paralytique, l'une avance et ne voit pas, l'autre voit mais n'avance pas ”.

II.2. Nos propres synthèses.

Gonseth propose trois synthèses dialectiques de la géométrie qui réorganisent les trois composantes précédentes. Nous avons repris son idée et l'avons transformée pour l'adapter à notre propos. La synthèse que nous présentons nous est personnelle et ne doit pas être comprise comme une présentation fidèle des idées de Gonseth.

II.2.1. La géométrie naturelle ou la confusion entre la géométrie et la réalité.

La géométrie naturelle a pour source de validation la réalité, le sensible. Elle comprend les trois aspects, intuition, expérience, déduction, mais la déduction s'exerce prioritairement sur des objets matériels à l'aide de la perception et de la manipulation d'instruments. En ce sens la géométrie d'Euclide n'est pas naturelle ; il s'agit plutôt de celle de Clairaut[2] (ou dans certains cas de Legendre) où la déduction peut être liée à une expérience mécanique et où on ne doit pas encombrer l'esprit en démontrant des choses évidentes.
Cette idée de preuve dynamique et mécanique s'oppose aux démonstrations statiques de la géométrie axiomatique, mais elle semble par contre très proche de la perception que peut avoir l'enfant de l'espace.
Une autre preuve peut aussi résulter de l'usage du pliage.
Ainsi que ce soit par pliage ou par "mouvement virtuel", la construction et la perception sont au cœur d'une géométrie naturelle de type expérimental. Le raisonnement que privilégie cette approche est le raisonnement de type constructif qui est fréquent dans la résolution de problèmes.

II.2.2. La géométrie axiomatique naturelle. La géométrie comme schéma de la réalité.

Dans la synthèse axiomatique euclidienne, les aspects “ non rigoureux ” et les appels à l'intuition de l'espace cèdent la place à la déduction logique et à la démonstration au sein d'un système axiomatique le plus précis possible. Gonseth pose un certain de nombre de questions sur cette géométrie. Quelle est la place de l'axiomatique ? Peut-on choisir n'importe quel type d'axiomes ? Quelle est la place de la réalité quand on axiomatise ?
Si l'axiomatisation est une formalisation, mais elle n'est pas nécessairement formelle, la syntaxe n'est pas coupée de la sémantique. La deuxième synthèse dialectique propose une géométrie qui n'est pas réduite au naturel, mais qui conjugue les notions d'horizon de la réalité, de schéma et de modèle. Cette géométrie ne prétend pas comme la géométrie naturelle qu'elle est la réalité, mais elle aspire à être un schéma de la réalité.
La géométrie euclidienne classique est basée sur ce pas de côté, mais tout l'effort de schématisation est dissimulé et reste implicite.

[2] Clairaut, (1741) Éléments de géométrie.

II.2.3. La géométrie axiomatique formaliste. Indépendance de la géométrie et de la réalité.

Cette fois, à la suite de l'apparition des géométries non-euclidiennes, le cordon ombilical qui liait la géométrie et la réalité est coupé. Les axiomes ne sont plus fondés sur le sensible et la primauté du raisonnement logique s'impose. L'approche axiomatique formaliste est bien explicitée par la rude affirmation de Wittgenstein qui clôt le débat entre géométrie et réalité :

" Les axiomes d'une géométrie peuvent ne contenir aucune vérité."

Dans l'enseignement, cette conception a permis d'introduire une géométrie élémentaire basée sur l'algèbre linéaire dont l'espace sous-jacent est l'espace R^3 muni d'un produit scalaire. Poussant jusqu'au bout les conséquences de cette vision algébrique de la géométrie Dieudonné peut affirmer dans l'introduction de son traité : " Je me suis permis de n'introduire aucune figure dans le texte, ne serait-ce que pour faire voir que l'on s'en passe fort bien. ".

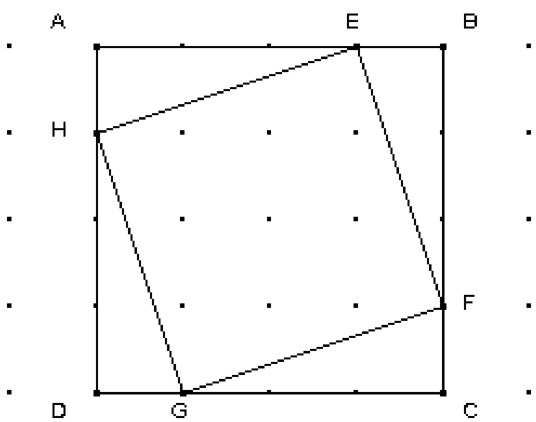
II.2.4. Notre synthèse dialectique.

Plutôt que de voir l'évolution de la géométrie comme une suite de ruptures irréconciliables, nous adoptons, à la suite de Gonseth, une vision unificatrice de la géométrie grâce à cette idée de synthèse dialectique évolutive entre divers pôles. Ce point de vue nous parait fondamental dans une perspective de formation des maîtres. La géométrie peut contenir les trois pôles (intuition, expérience, déduction) ; il y a malaise si l'un des pôles est perdu (exemple hypertrophie du pôle déductif).

II.3. Un exemple illustratif.

La figure suivante, sur papier pointé, est proposée aux élèves.

La question porte sur la nature du quadrilatère EFGH. Dans un premier temps les



seules hypothèses (on verra qu'elles peuvent dépendre du type de géométrie dans laquelle on souhaite implicitement que l'élève se place) sont la nature du support (réseau à mailles carrées) et le fait que les points soient des nœuds effectifs de ce réseau.

Telles quelles les hypothèses restent floues pour un vrai "mathématicien".
Les hypothèses à saisir sont-elles

- hypothèses 1 : ABCD est un carré, E, F, G, H quatre points situés sur les quatre côtés du carré pris dans cet ordre [AB], [BC], [CD] et [DA],
- hypothèses 2 : les hypothèses 1 et aussi les vecteurs AE et CG puis DH et BF sont égaux en longueur et opposés deux à deux
- hypothèses 3 : hypothèses 2 et aussi AE = 1/4 AB

Il existe des réponses relevant de chacune des géométries définies précédemment

Dans le cadre de la géométrie naturelle (géométrie I).

Le seul dessin permet de prendre position à l'intérieur de la géométrie I. On peut tout voir et tout lire sur la figure. Le problème se construit en suivant les étapes de construction de la figure : d'abord un carré initial, puis de segments intérieurs particuliers [EF], [FG], [GH] et [HE], apparaît alors une nouvelle figure EFGH. Quelle est sa nature ?
La première solution (**Solution 1**), purement <u>intuitive</u>, indique que EFGH est un carré, ça se voit, il a les cotés égaux et ses angles sont droits.
Cette appréhension intuitive de la figure sera à la base de toutes les solutions qui vont suivre. Elle est à rapprocher de la construction sur un géoplan ou planche à clous d'un carré avec un élastique. La seule justification donnée par les enfants est purement perceptive et intuitive : on allonge plus ou moins l'élastique. Elle pose parfois des problèmes lorsque des enfants ne sont pas d'accord sur la conservation des longueurs.
Une solution (**Solution 2**) basée sur <u>une expérience</u> va passer par la vérification de l'égalité des cotés avec un compas et de l'orthogonalité des cotés grâce à une équerre. On retrouve ici l'idée de Gonseth d'une première expérience liée à l'idée d'un espace mesurable. L'expérience doit rester proche de l'intuition pour garantir des résultats cohérents.
La solution (**Solution 3**) qui suit lie <u>déduction et expérience</u> dans le monde 1 de la géométrie naturelle : par superposition du gabarit d'un triangle rectangle égal à AEH, les élèves vérifient leur idée que l'angle AHE est égal à BEF. Ils utilisent une expérience antérieure qui leur avait permis de montrer que la somme des angles d'un triangle valait 180° pour en déduire que HEF est un angle droit.

Dans le cadre de la géométrie axiomatique naturelle (géométrie II).

Cette géométrie doit s'appuyer sur des hypothèses énoncées et non lues sur la figure : par exemple les hypothèses 2. Le texte de départ doit dégager de la figure ce qui peut y être lu (sous-entendu ce qui n'est pas écrit ne doit pas y être lu, mais déduit).
Commençons par une solution mixte (**Solution 4**) courante chez les élèves. Ils vérifient l'égalité des quatre côtés avec la règle graduée ou le compas, puis

constatent l'existence d'un angle droit avec l'équerre, enfin ils concluent que "EFGH est un carré comme losange avec un angle droit" . Cette solution est à mi-chemin entre la géométrie naturelle, expérience, et la géométrie axiomatique naturelle (puisque la conclusion est fournie par une définition-axiome).
Cette preuve présente un défaut de cohérence, puisque certains résultats sont vérifiés sur la figure, et d'autres sont montrés comme connaissances d'une certaine axiomatique. Notons que ce défaut de cohérence est d'ailleurs très courant dans les productions des élèves de collège, peut-être parce que justement les cadres respectifs des géométries où on se place pour la preuve ne sont jamais suffisamment explicités.
Envisageons maintenant une solution (**Solution 5**) homogène. L'intuition nous dit que les triangles AEH, BFE, CFG et DHG sont superposables. Confirmons cette intuition grâce à une démonstration : par hypothèse AE=BF=CG=DH et EB=FC=GD=HA et par le théorème de Pythagore, les côtés HE, EF, FG et GH sont de même longueur. Notre intuition est confirmée.
Donc les angles AEH, BFE, CGF et DHG ont même mesure, qui correspond au complémentaire des angles AHE, BEF, CFG et DGH. Les angles du quadrilatère sont donc droits (comme dernière partie d'un angle plat)
Le quadrilatère EFGH est donc un carré.
Voici une autre solution (**Solution 6**).
Les segments HE, EF, FG et GH sont des diagonales de rectangles (par exemple AEE'H). par déduction des égalité des longueurs de l'hypothèse, les rectangles sont superposables, donc les diagonales ont même longueur et font le même angle avec le côté correspondant. On obtient déjà que EFGH est un losange.
On considère la rotation de centre E et d'angle (EH, EA) : le point H se transforme en H' sur [EA) et simultanément F se transforme en F' sur la perpendiculaire à (AB) qui passe par E
F se transforme en F' sur la perpendiculaire à (AB) qui passe par E. G se transforme en G'.
On obtient un losange EF'G'H' avec un angle droit. C'est donc un carré. Par suite EFGH est aussi un carré.

Dans le cadre de la géométrie axiomatique formaliste (géométrie III).
L'énoncé est donné par exemple avec les hypothèses 2.
Dans cette géométrie qui utilise le substrat euclidien au sens du produit scalaire, la première étape consiste à écrire les coordonnées des vecteurs EF, FG, GH et HE issues de la perception (seule concession nécessaire à l'intuition) et des hypothèses. Ensuite le calcul des normes des vecteurs et du produit scalaire permet de montrer que EFGH est un carré. On peut s'aider de la figure, mais on ne peut pas utiliser des données évidentes, comme les égalités des longueurs EF, FG, GH et HE.

Conclusion.
L'existence de ces différentes façons d'envisager un même problème est une source constante de difficultés dans l'enseignement de la géométrie. De plus, elle nous semble spécifique de cette partie des mathématiques élémentaires. En effet,

prenons le problème concret suivant : 9 objets coûtent 15 F, quel est le prix de 15 objets ? La résolution de ce problème passe par l'utilisation d'un modèle, celui de la proportionnalité. Il existe plusieurs procédures de résolution, mais un seul choix de modèle (tout autre modèle contient la proportionnalité).
Prenons maintenant un problème géométrique, dans quel paradigme se placer pour le résoudre : géométrie I , II ou III ? Si le problème est théorique au départ, on reste dans la géométrie théorique (II ou III). Dans l'exemple que nous venons de traiter, la nécessité d'expliciter les hypothèses place la résolution en géométrie II ou III. Par contre si la question à résoudre se présente dans le monde physique ou si même si elle l'évoque, il existe un véritable choix de traitement : reste-t-on dans la géométrie I, ou passe-t-on dans la géométrie II ?
En résumé, il est en général demandé de traiter un problème dans une géométrie de niveau égal ou supérieur (géométrie I, II ou III) à celui dans lequel le problème est posé. Mais cette demande n'est pas explicitée, il n'existe même pas de mot pour dire, en général, ce niveau de géométrie.
Cette distinction de niveaux est pourtant reconnue dans certains problèmes, ainsi la construction effective d'un pentagone ou d'un heptagone régulier convexe se place dans la géométrie I (avec de l'intuition, de l'expérience et de la déduction notamment pour travailler sur des mesures approchées d'angles), mais le problème de la constructibilité (à la règle et au compas) se place en géométrie II ou III. Pour ces problèmes de reproduction de figures, il existe bien deux expressions différentes pour désigner le paradigme dans lequel on se place : construction et constructibilité. Par contre, et c'est un peu l'objet de nos écrits, il n'existe pas, pour la géométrie en général, de double ou triple expression pour désigner le paradigme dans lequel on travaille.
Pour nous, l'approche de la géométrie structurée autour de trois modes de connaissance identiques mais évoluant dans le temps peut constituer une source de clarification pour les futurs enseignants. Elle doit leur permettre d'enrichir leur propre conception de la géométrie et de la confronter avec une conception précise de la géométrie qu'il doivent enseigner à leurs élèves.

Conclusion générale

Nous avons tenté de poser différemment le problème de l'enseignement de la géométrie en fédérant celle-ci principalement autour des trois modes d'approche de connaissance que sont l'intuition, l'expérience et la déduction. En nous inspirant de Gonseth, nous avons dégagé trois synthèses possibles qui permettent d'articuler de manière cohérente la progression globale de l'enseignement de la géométrie : la géométrie naturelle (géométrie I), la géométrie axiomatique naturelle (géométrie II) et la géométrie axiomatique formaliste (géométrie III). Cette dernière, sans doute à cause du niveau d'enseignement étudié est restée à l'arrière-plan.
Nous avons appliqué à l'analyse de manuels de l'école élémentaire et aux sujets de concours de recrutement d'enseignants. Cette analyse nous a permis certains constats :

- Il n'y a pas à l'école de cohérence au sens de notre synthèse, il n'y a que des formes appauvries de la géométrie. Le pôle déductif est réduit à sa plus

simple expression. Il s'agit là d'une forme de dénaturation simplificatrice que nous avions déjà pointée dans notre étude des stratégies de formation des enseignants.
- Dans les sujets de concours, il existe un flou sur la nature du contrat attendu des candidats et espéré par les formateurs

Ce constat est renforcé et expliqué par l'analyse des conceptions des différents acteurs du systèmes qui se situent implicitement dans différents types de géométrie. Cette conception paraît diffuse et peu cohérente.

Pour nous, l'approche de la géométrie structurée autour de trois modes de connaissance identiques mais évoluant dans le temps peut constituer une source de clarification pour les futurs enseignants. Elle doit leur permettre d'enrichir leur propre conception de la géométrie et de la confronter avec une conception précise de la géométrie qu'il doivent enseigner à leurs élèves.

Cette clarification doit permettre d'éviter le type de confusion rapportée par Nimier[3] et qui est due à la juxtaposition de géométries différentes où le rôle respectif de l'intuition, de l'expérience et de la déduction ne sont pas les mêmes.

> "*On nous avait donc fait ça avec les vieux bouquins que vous trouverez de cette époque là, les cas d'égalité des triangles avec calque, etc… Et puis, on nous avait donné après un problème, alors moi j'ai fait le problème par la même méthode, c'est-à-dire : je prends un calque, je fais ci, je fais ça, j'ai répété le discours qu'on avait fait pour les cas d'égalité des triangles et mon prof m'a expliqué que c'est pas du tout ça qu'il fallait faire, que maintenant on avait les cas d'égalité des triangles et il fallait les appliquer et … démontre…, bon je ne sais pas pourquoi*."

Cependant de nombreuses questions restent en suspens même si l'on admet la pertinence de notre synthèse.

Notre cadre permet-il de donner une véritable cohérence de la géométrie à l'école ? Permet-il d'en faire un tout, préalable à celle du collège ? Permet-il réellement de favoriser l'articulation entre les différents cycles d'enseignement ? Enfin, comment sensibiliser les futurs enseignants à cette approche de la géométrie ?

[3] *Les modes de relation aux mathématiques* (Editions Méridiens-Klinsieck), 1988

Tableau général des différentes géométries

	Géométrie naturelle I	Géométrie axiomatique naturelle II	Géométrie axiomatique formaliste III
Intuition	Sensible, liée à la perception, enrichie par l'expérience	Liée aux figures	Interne aux mathématiques
Expérience	Liée à l'espace mesurable	Schéma de la réalité	De type logique
Déduction	Proche du réel et liée à l'expérience par la vue	Démonstration basée sur des axiomes	Démonstration basée sur des axiomes
Espace	Espace intuitif et physique	Espace physico-géométrique	Espace abstrait euclidien
Statut du dessin	Objet d'étude et de validation	Support du raisonnement et "figural concept"[4]	Schéma d'un objet théorique, outil heuristique
Aspect privilégié	Evidence et construction	Propriétés et démonstration	Démonstration et lien entre les objets

[4] FISCHBEIN (1993) The Theory of Figural Concepts dans *Educational Studies in Mathematics* N°24 (2) pages 139-162.