Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1

Bernard Parzysz

Extrait du XXVIII ème colloque de la COPIRELEM – Tours 2001.

Cet article précise le rapport à la géométrie des PE. L'analyse s'appuie sur l'articulation Géométrie I/ Géométrie II que l'auteur définit dans la première partie de l'article.

1- Le cadre théorique

1.1 Un modèle synthétique

Le cadre théorique dans lequel se place la recherche menée actuellement à l'IUFM Orléans-Tours par le GReDiM résulte d'une synthèse réalisée à partir de recherches antérieures dans le domaine de l'enseignement de la géométrie[1].

a) Notre première référence est relativement ancienne, puisqu'il s'agit du modèle de P. van Hiele [van Hiele 1984], qui distingue cinq niveaux dans le développement de la pensée géométrique chez l'enfant que je rappelle brièvement :

- niveau 0 (visualisation) : les figures sont identifiées uniquement par leur aspect général;
- niveau 1 (analyse) : l'enfant commence à discerner les propriétés des figures, mais sans pouvoir encore les expliciter;
- niveau 2 (déduction informelle) : l'enfant peut établir des relations intra- et inter-figurales. Les définitions font sens, les résultats obtenus empiriquement sont souvent utilisés conjointement avec des techniques déductives;
- niveau 3 (déduction formelle) : la déduction est perçue comme outil de validation, à l'intérieur d'un système axiomatique; il en est de même du rôle respectif des notions primitives, des axiomes, des définitions, des théorèmes.

[1] Ce cadre théorique a déjà été exposé, de façon succincte, au précédent colloque de la COPIRELEM par Brigitte NICOLAS-LORRAIN [Nicolas-Lorrain 2000].

- niveau 4 (rigueur) : l'élève (l'étudiant) est capable de se placer dans différents systèmes axiomatiques (géométries non euclidiennes, par exemple) et de les comparer.

Comme on le voit, les niveaux 0 et 1 sont fondés sur les "figures" (au sens de "dessins" [Parzysz 1989]) : la géométrie correspondante est donc une géométrie "concrète", dont les objets sont matériels (dessins, maquettes, objets de la vie courante...), et dans laquelle l'argumentation s'appuie essentiellement sur des critères perceptifs. Au contraire, la géométrie des niveaux 3 et 4 est une géométrie "théorique", dont les objets sont conceptuels, et dans laquelle la seule argumentation acceptable est la démonstration.

Reste le niveau 2, qui constitue en quelque sorte le niveau-charnière entre ces deux types de géométrie, dans lequel la théorie est en train de se mettre en place chez l'élève -principalement sous l'effet de l'éducation-, en se construisant contre la perception, jusque-là acceptée. C'est le moment où apparaît le plus clairement le conflit entre le su et le perçu, que j'ai déjà étudié dans le cadre de la géométrie de l'espace [Parzysz 1989, Colmez & Parzysz 1993].

Cette distinction en niveaux, prise au pied de la lettre, risque cependant de laisser penser qu'un individu donné, à un moment donné de son développement, doit se situer à un niveau donné. Mais ce serait faire abstraction de la *situation* dans laquelle se trouve cet individu à cet instant, et qui peut jouer un rôle déterminant : on sait qu'un "expert" d'un domaine particulier peut ne plus se comporter en expert lorsqu'il est placé dans une situation non familière, même lorsqu'elle ressortit à son domaine d'expertise.

b) S'inspirant des idées développées par Ferdinand Gonseth dans "La géométrie et le problème de l'espace" [Gonseth 1945-1955], Catherine Houdement et Alain Kuzniak [Houdement & Kuzniak 1998] définissent trois types de géométrie qu'ils distinguent par les rapports qu'entretiennent intuition, expérience et déduction, et qu'ils dénomment respectivement *géométrie naturelle* (G1), *géométrie axiomatique naturelle* (G2) et *géométrie axiomatique formaliste* (G3). La première "confond géométrie et réalité" (comme dans les niveaux 0 et 1 de van Hiele) et la seconde est conçue comme un "schéma" de cette réalité (niveaux 2(?) et 3 de van Hiele); dans la troisième, enfin, on "coupe le cordon ombilical" avec la réalité (niveau 4 de van Hiele).

c) Dans un article récent, Michel Henry, opérant un parallèle entre probabilités et géométrie [Henry 1999], distingue lui aussi trois types de rapports à l'espace dans l'enseignement / apprentissage de la géométrie :

(i) la situation concrète ;

(ii) une première modélisation, consistant en *"l'observation d'une situation réelle et sa description en termes courants. (...) La description qui en découle est alors une sorte d'abstraction et de simplification de la réalité perçue dans sa complexité, dans la mesure où certains choix sont faits pour ne retenir que ce qui semble pertinent de cette situation vis-à-vis du problème étudié."* (loc. cit. p. 28)

(iii) une mathématisation, qui s'opère à partir du modèle précédent.

A première vue, ce modèle présente de fortes analogies avec celui développé par Houdement-Kuzniak. Cependant, l'expression "géométrie axiomatique naturelle" que ceux-ci utilisent les distingue, puisque chez Henry la présence d'une axiomatique sous-jacente n'est pas indispensable dans la première modélisation, même si parfois *"(la) description peut être pilotée par ce que l'on peut appeler un* "regard théorique", *c'est-à-dire une connaissance de type scientifique s'appuyant sur des modèles généraux préconstruits"* (ibid). Cette "première modélisation" se placerait donc entre G1 et G2, et constituerait une étape intermédiaire précédant la construction de l'axiomatisation (correspondant *grosso modo* au niveau 2 de van Hiele).

D'autre part, la terminologie de Houdement-Kuzniak semble établir une sorte de tuilage -donc de continuité- entre les trois "géométries" ainsi définies : G1 et G2 ont en commun d'être "naturelles", tandis que G2 et G3 sont toutes deux "axiomatiques". G2 apparaît alors comme une géométrie intermédiaire entre G1 et G3. Il semble cependant que l'articulation entre G1 et G2 -de nature épistémique- est plus fondamentale que celle qui sépare G2 et G3; en fait, elle correspond en quelque sorte au niveau 2 de van Hiele, lequel se situe au cœur de la question de la modélisation géométrique. En effet, dans G1 les objets de la géométrie sont encore des éléments physiques idéalisant plus ou moins des situations de la "réalité" (maquette d'une pièce d'habitation, dessin d'un champ...), et la validation reste d'ordre perceptif (instrumenté ou non). Au contraire, dans G2 comme dans G3, les objets en jeu sont des éléments situés hors de toute réalité (mais *représentés* par des objets physiques), la validation des affirmations étant d'ordre déductif : *"l'élève est invité à abandonner un contrôle empirique de ses déclarations au profit d'un contrôle par le moyen de raisonnements"* [Berthelot & Salin 1992, p. 32]. La distinction de G2 par rapport à G1 et à G3 tient alors essentiellement à deux aspects :

1° G2 est une *modélisation de l'espace "physique"* (c'est-à-dire de G1), alors que G3 ne fait plus référence à aucune "réalité";

2° G2 est en quelque sorte une G3 *incomplètement axiomatisée*, ou plutôt une géométrie dont les "axiomes" (canoniques ou non) sont partiellement implicites (que ce soit de façon consciente ou non)[2]. Plus précisément, G2 s'appuie sur des raisonnements déductifs opérant à partir d'un certain nombre de faits considérés comme "évidents"; en cela elle est analogue à G3 (version "euclidienne"). *Grosso modo*, à certains endroits, là où G3 comporterait un axiome, et éventuellement des définitions et des théorèmes qui en découlent, G2 se contente d'un "on constate que" (qui peut même être implicite). La perception est encore présente, mais elle est censée servir uniquement à construire une théorie de l'espace perçu, et non plus -tout au moins en principe- à appuyer une argumentation (même si les "on constate que" contredisent *de facto* cette remarque).

[2] Même si on n'y utilise pas le terme "axiome" (on lui substitue en général le mot "propriété", terme "passe-partout" qui en fait obscurcit plus qu'il n'éclaire).

d) En suivant les distinctions faites ci-dessus, nous proposons un essai de synthèse des modèles précédents, comportant en particulier une articulation légèrement différente de celle proposée par Houdement-Kuzniak pour les raisons évoquées plus haut. Les éléments sur lesquels repose ce modèle sont, d'une part la nature des objets en jeu (physique *vs* théorique), d'autre part les modes de validation (perceptif *vs* logico-déductif). Partant de la "réalité", ou encore du "concret" (G0), qui n'est pas géométrique, nous opposerons d'une part une géométrie non axiomatique, s'appuyant sur des situations concrètes[3] qui sont idéalisées pour constituer le "spatio-graphique"[4] (G1) et d'autre part une géométrie axiomatique, l'axiomatisation pouvant être explicitée complètement (G3) ou non (G2), et la référence au "réel" étant facultative pour G2 (mais pas pour G1); dans le dernier cas, nous parlerons de géométrie *proto-axiomatique*. La situation peut alors être schématisée par le diagramme ci-après :

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">géométries non axiomatiques</td><td colspan="2">géométries axiomatiques</td></tr>
<tr><td>type de géométrie</td><td>géométrie concrète (G0)</td><td colspan="2">géom. spatio-graphique (G1)</td><td>géom. proto-axiomatique G2)</td><td>géométrie axiomatique (G3)</td></tr>
<tr><td>objets</td><td colspan="3">physiques</td><td colspan="2">théoriques</td></tr>
<tr><td>validations</td><td colspan="3">perceptives</td><td colspan="2">déductives</td></tr>
<tr><td>van Hiele</td><td>niveau 0</td><td>niveau 1</td><td>niveau 2</td><td>niveau 3</td><td>niveau 4</td></tr>
</table>

Du point de vue didactique, la distinction entre ces géométries apparaît dans les *ruptures de contrat* qui se produisent entre l'une et l'autre, et plus précisément:

- passage de G0 à G1 : matérialité des objets en jeu (bois, carton, paille...)

[3] D'après le Petit Larousse (éd. 2000): "1. qui se rapporte à la réalité, à ce qui est matériel (...) 2. Qui désigne un être ou un objet réel".
[4] Qualificatif dû à Colette Laborde (voir par exemple [LABORDE & CAPPONI 1995]).

- passage de G1 à G2 : épaisseur des traits, des points; justification par le perçu
- passage de G2 à G3 : propriétés jugées "évidentes".

En se référant à la théorie anthropologique du didactique [Chevallard 1999], on peut considérer G1 et G2 comme deux praxéologies qui, pour un même type de problèmes (comme par exemple les problèmes de construction sous des contraintes fixées) se distinguent à la fois au niveau des *techniques* , des *technologies* et des *théories* :

∗ pour G1, les *techniques* utilisées pour la résolution de ce type de tâches sont essentiellement liées à l'usage d'instruments tels que règle graduée, compas, équerre, rapporteur (perception instrumentée). Les *technologies* (mode de validation) font également usage des instruments, qui sont alors utilisés pour contrôler le dessin construit par la constatation visuelle de coïncidences ou de superpositions : graduations de la règle, pointes du compas, bords de l'équerre, rayons du rapporteur ... Le *niveau théorique* -absent dans la pratique usuelle- serait une théorie relative à la précision ou à l'économie des tracés (qui est effectivement attestée au début du 20^{e} siècle).

∗ pour G2 et pour le même type de tâches, les *techniques* concernent des objets géométriques (droites, points, segments, cercles...) dont l'existence est assurée par des énoncés (définitions, axiomes, propriétés admises...), et l'usage des instruments permet d'en obtenir des représentations (dessins). Les *technologies* correspondantes consistent en la production d'un discours de type déductif appliqué aux données de l'énoncé et utilisant des éléments de G2 rencontrés antérieurement. Le *niveau théorique* est constitué par une géométrie axiomatique de type G3 (la géométrie affine euclidienne). Comme nous l'avons dit cependant, une technique très générale dans G2 est la réalisation et l'étude de "figures" (dessins) sur lesquelles on fera éventuellement agir des techniques de G1 dans le but de rechercher des indices qui permettront d'aboutir à une démonstration.

En ce qui concerne les institutions dans lesquelles vivent ces différentes géométries, on peut dire que, de façon très grossière, G1 correspond à l'école élémentaire, tandis que G2 correspond au lycée et G3 à l'université. Mais qu'en est-il pour le collège ? En fait, ce sont essentiellement les "figures", objets communs à G1 et G2, qui mettent ces deux géométries *en concurrence* chez des non-experts comme le sont les élèves de collège. Plus précisément, pour un élève donné confronté à une tâche de géométrie :

- si elle est perçue comme relevant de G1, elle conduira à s'appuyer sur des techniques de G1 (réalisation d'une "figure" + comparaison, superposition, mesurage...)

- si elle est perçue comme relevant de G2, elle conduira à s'appuyer sur des techniques de G2 (réalisation d'une "figure" + démonstration).

Notons enfin que G1 et G2 sont susceptibles de se contrôler l'une l'autre :

- *G2 contrôle G1 :* si une contradiction perceptive est relevée sur la "figure" (G1), on peut rechercher dans G2 l'erreur de démonstration qui l'a produite ;

- *G1 contrôle G2* : si la conclusion d'un raisonnement géométrique surprend, le retour à la "figure" et aux techniques de G1 peut permettre de confirmer ou d'infirmer ce résultat.

1.2 La relation G1 / G2 dans l'activité géométrique

Pour préciser ce qui précède, plaçons-nous maintenant au niveau de l'activité géométrique. Dans G1 les objets en jeu sont *matériels* (maquettes, dessins...), et les propriétés de ces objets sont des propriétés *physiques*, qui sont validées (déterminées, vérifiées et éventuellement contredites) par des techniques spécifiques (méthodes de comparaison, mesures, etc.), et par exemple un dessin sera accepté comme triangle si ses “côtés“ (= traits) sont “droits“. De même, ce triangle sera accepté comme isocèle si, à l'aide d'un compas dont la pointe sèche est piquée en l'un des sommets (bien choisi), on peut tracer un cercle passant par les deux autres sommets; ou bien si la mesure de deux de ses côtés fournit le même résultat. Au contraire, on pourra lui refuser la propriété si l'on constate un écart, éventuellement même minime). On se situe donc ici dans une *problématique de la précision*.

Par contre, dans G2 les objets en jeu sont des concepts *abstraits*, qui peuvent être *représentés* par des objets physiques *mais ne se réduisent pas à ces objets*. Ce qui était objet dans G1 devient donc, dans G2 ou G3, simple *représentation* d'un objet, c'est-à-dire qu'il s'intègre à un concept d'ordre supérieur[5]. Par exemple, un dessin de triangle sera considéré comme une représentation de l'objet "triangle" de G2 dans le registre figural de Duval [Duval 1996], de même que la phrase "Soit un triangle ABC" en constituera une représentation dans le registre langagier. On se situe donc ici dans une *problématique de la déduction*.

Considérons maintenant un utilisateur "expert" de géométrie : pour résoudre un problème dans G2, il se place dans le registre de représentation qui lui semble le mieux adapté et en change aussi souvent qu'il en ressent le besoin, tout en conservant en permanence à l'esprit que *l'objet sur lequel il travaille reste le même* à travers les formes sous lesquelles il se (re)présente, et ceci même s'il n'en est pas réellement conscient.

Par contre, pour un non-expert, le changement de registre s'accompagnera d'un changement d'objet ; c'est ainsi que la "figure" (= dessin) réalisée à partir de l'énoncé d'un problème de géométrie deviendra pour lui l'objet même à propos duquel sont posées les questions du problème (il passe ainsi, sans même s'en rendre compte, de G2 à G1). Et, inversement, une propriété contingente du dessin réalisé, une fois qu'il l'aura constatée, pourra être comprise -et annoncée- comme une propriété de la configuration (= objet géométrique) définie par l'énoncé[6] (il passe cette fois, toujours sans s'en rendre compte, de G1 à G2; c'est ce que nous appelons la "contamination du su par le

[5] On pourrait ici, comme pour l'interprétation d'un texte, parler de "premier degré" et de "second degré": un dessin peut être considéré au premier degré (G1) ou au second degré (G2), c'est-à-dire comme ne représentant que lui-même (en tant qu'objet physique localisé dans l'espace, et alors un "carré posé sur sa pointe" n'est pas un carré mais un losange) ou comme représentant un objet géométrique (abstrait), comme par exemple l'objet "triangle équilatéral". La notion de *concept figural*, développée par Fischbein [Fischbein 1993], dans laquelle les images sont partie intégrante du concept, s'avère ici pertinente.

[6] Il ne s'agit pas d'un simple passage du particulier au général, mais bien d'une confusion de deux types d'objets (et, partant, de deux géométries).

perçu" (CSP)). Bien entendu, cette distinction G1 / G2 n'est pas perçue par l'apprenti géomètre, pas plus que les passages de l'une à l'autre.

Ce caractère permanent de l'objet d'étude, ainsi que la versatilité des registres de travail susceptibles d'être mis en œuvre de façon consciente lors de son étude, constituent en fait deux aspects fondamentaux de l'expertise, et l'acquisition par l'élève de ces deux capacités en quelque sorte antagonistes est l'une des finalités que doit à mon avis viser l'enseignement de la géométrie.

2- La recherche en cours

2.1 Contenus et finalités

La recherche que nous avons entreprise concerne les étudiants admis en IUFM pour y préparer le concours de professeur des écoles (PE1). Elle a d'abord commencé à l'IUFM de Lorraine puis s'est poursuivie à l'IUFM Orléans-Tours[7]. Elle est partie du constat selon lequel le rapport personnel des professeurs des écoles à la géométrie ne leur permet pas toujours d'être à même de préparer efficacement leurs élèves à entreprendre une démarche de conceptualisation géométrique qui s'étend sur toute la durée du cursus obligatoire (et même-au-delà pour certains d'entre eux). Nous nous sommes alors posé la question de la nature des insuffisances constatées et des moyens possibles pour y remédier. D'où la double dimension de notre travail, qui comprend :
- un volet "fondamental", constitué d'une recherche destinée en partie à tester la validité de notre cadre théorique, mais surtout à préciser le rapport personnel des PE1 à la géométrie;
- un volet "développement", consistant à élaborer, à mettre en œuvre et à évaluer des ingénieries didactiques prenant en compte les résultats obtenus dans l'autre volet et destinées à prendre place dans la formation des PE1.

Plus précisément, et en référence à notre cadre théorique, les finalités de notre recherche peuvent s'établir comme suit :

---

[7] J'en profite pour exprimer mes plus vifs remerciements aux collègues formateurs PE de ces deux IUFM qui m'ont accompagné-et m'accompagnent encore- dans cette recherche.

(F1) établir un inventaire et une classification des types d'argumentation utilisés en géométrie par les PE1.

(F2) mettre à l'épreuve le cadre théorique et les hypothèses de recherche.

(F3) élaborer et tester des ingénieries didactiques (en environnements papier / crayon et informatique) destinées à faire prendre conscience aux PE1 de la distinction G1 / G2 et à les amener à un comportement plus expert en géométrie

[Notons que, du point de vue déontologique, la présence du concours de recrutement nous impose, vis-à-vis de nos étudiants, la contrainte d'intégrer les divers éléments de notre recherche dans le cadre du plan de formation de l'IUFM.]

2.2 Nos hypothèses

Les études préliminaires nous ont conduits à formuler les *hypothèses de recherche* suivantes, que nous allons chercher à valider, à modifier ou à infirmer :

(R1) Certains PE1 ne distinguent pas clairement G1 et G2.

(R'1) *Conséquence :* certains PE1 ne distinguent pas les validations théoriques de G2 (démonstration) des validations perceptives de G1 (constatation, mesure).

(R2) Même chez un PE1 qui a conscience de travailler dans G2, l' "évidence" de la figure peut provoquer une contamination du su par le perçu.

D'autre part, nous nous appuyons sur les *hypothèses de travail* suivantes :

(T1) Dans les conduites expertes en géométrie élémentaire (G2), les géométries G1 et G2 sont susceptibles de se contrôler l'une l'autre (dialectique G1 / G2) (voir plus haut).

(T2) Il est nécessaire qu'un professeur des écoles ait une conscience claire de la distinction G1/G2.

Il n'est peut-être pas inutile de justifier sur un exemple ce dernier point. Par exemple, dans une tâche de construction aux instruments, un professeur des écoles est amené à valider / invalider les productions de ses élèves et il faut donc qu'il soit en mesure de pouvoir distinguer les propriétés intrinsèques d'une figure géométrique des propriétés contingentes d'une représentation dessinée de cette figure (contrôle des techniques de G1 par la technologie de G2).

3- Une séance de travaux dirigés

Dans l'état actuel, le volet "fondamental" de notre recherche se compose lui-même de deux éléments méthodologiques distincts et complémentaires :

- un *questionnaire* passé par les PE1 à leur arrivée à l'IUFM, avant toute formation en géométrie
- une *séance de travaux dirigés*, réalisée au tout début de la formation.

L'état actuel de l'analyse du questionnaire a été présenté au colloque inter-IREM de Montpellier [Parzysz & Jore 2001]. Nous présentons ici la séquence de travaux dirigés et les premiers résultats qu'elle nous a permis d'obtenir.

3.1 La situation proposée

L'idée qui a gouverné l'élaboration de cette séance est de proposer aux étudiants une situation géométrique "ambiguë" (en ce sens qu'on ne précise pas si on se place dans G1 ou dans G2), dans laquelle les validations usuelles de type perceptif (relevant de G1) risquent d'être mises en défaut. Une telle situation conduit normalement un "expert" à rechercher une validation au niveau technologico-théorique (G2/G3), mais, avec des "non experts" comme le sont la plupart des PE1 (dont seulement une minorité a fait des études scientifiques), nous espérions voir apparaître des références à des validations alternatives relevant de G1. En outre, nous ne souhaitions pas voir les étudiants résoudre le problème posé (ce qui risquait d'introduire des difficultés au niveau de la mise en œuvre des techniques), mais seulement *indiquer des possibilités de validation*.

Une technologie de G2 nous semblait faire partie des connaissances - sinon disponibles, du moins mobilisables- de la quasi-totalité des étudiants : la "propriété de Pythagore". C'est pourquoi nous avons recherché une situation fondée sur la notion de triplets pythagoricien[8] (TP) ou pseudo-pythagoricien[9].

[8] C'est-à-dire un triplet (a, b, c) d'entiers naturels tels que = $a^2 + b^2 = c^2$. Exemple: (5, 12, 13).

(TPP) : un tel triplet sera utilisé pour construire, à la règle et au compas, un triangle qui dans G2 sera rectangle (TP) ou non (TPP), mais qui dans G1 sera sans doute perçu comme rectangle. Finalement, la situation retenue a été celle de l'exemple suivant :

> *Tracer une droite d. On appelle O un point de cette droite.*
>
> *Tracer le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre O et de rayon 2. Ce cercle coupe la droite d en deux points A et B.*
>
> *Tracer le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre O et de rayon 3,5.*
>
> *Tracer le cercle $\mathcal{C}_3$ de centre A et de rayon 4. Ce cercle coupe le cercle $\mathcal{C}_1$ en deux points C et D.*
>
> *Quel(s) moyen(s) pouvez-vous mettre en œuvre pour savoir si la droite (CD) est, ou non, la médiatrice du segment [AB] ?*

Commentaires :

1) Les valeurs numériques données aux trois rayons constituent une variable didactique qui (à un facteur multiplicatif près) peut correspondre, au choix, à un TP ou à un TPP (sur l'exemple ci-dessus, il s'agit du TPP (4, 7, 8)).

2) L'unité n'est pas précisée, de façon à permettre aux étudiants de jouer sur la taille du dessin.

3) En se plaçant dans G2 : d'après la symétrie de la construction, (CD) est dans tous les cas perpendiculaire à (AB); la seule question est donc théoriquement de savoir si (CD) passe par O ou non.

4) La consigne ne fait référence ni à G1 ni à G2 : on demande de "mettre en œuvre" des "moyens", et non de "démontrer" ou de "vérifier".

3.2 Le déroulement

La mise en œuvre de cette situation, au cours d'une séance de deux heures, s'est opérée selon un scénario inspiré de l'équipe lyonnaise de G. Arsac. On trouvera les justifications du recours à ce type de fonctionnement dans [Arsac *et al.* 1992].

---

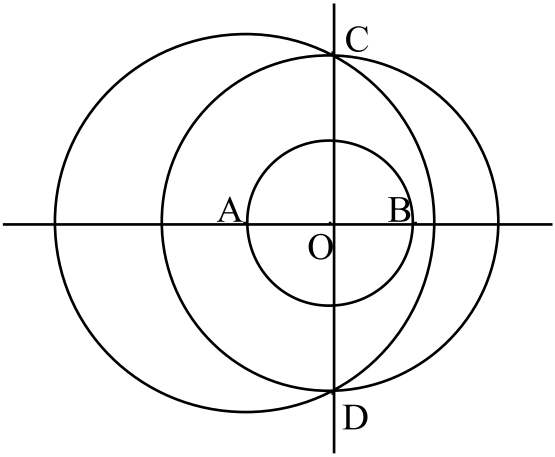
[9] C'est-à-dire un triplet (a, b, c) d'entiers naturels tels que $a^2 + b^2 = c^2 \pm 1$. Exemples: (4, 7, 8) et (4, 8, 9).

1) Mise en place : les étudiants d'un groupe de formation sont répartis en équipes de 4 (avec éventuellement un ou deux groupes de 3). Les étudiants d'origine scientifique sont regroupés, afin d'éviter d'éventuels phénomènes de "leadership". Une feuille comportant un énoncé est distribuée à chacun.

N.B. Dans l'équipe, chaque étudiant dispose d'un énoncé dans lequel les valeurs numériques sont différentes. Le tableau ci-dessous indique, pour chacune des 4 versions de l'énoncé, les valeurs numériques choisies, le triplet correspondant et la nature de celui-ci :

version	**valeurs des rayons**	**triplet correspondant**	**nature du triplet**
A	1 1 1,5	(2, 2, 3)	TPP
B	2,5 6 6,5	(5, 12, 13)	TP
C	2 4 4,5	(4, 8, 9)	TPP
D	8 15 17	(8, 15, 17)	TP

Voici à titre d'exemple un dessin obtenu à l'aide de Cabri-Géomètre pour la version C :



2) *Séquence individuelle :* réalisation de la construction demandée et recherche d'une réponse possible à la consigne.

3) *Travail par équipes :* comparaison des productions obtenues à la séquence précédente; réalisation d'une affiche qui sera exposée au tableau avec les autres à la fin de la séquence.

4) *Séquence collective :* un membre de chaque équipe vient commenter l'affiche de son équipe et répondre aux questions individuelles. Puis une synthèse est réalisée par l'enseignant(e).

3.3 Les résultats

Nous nous contenterons ici d'étudier, du point de vue des validations, les 31 affiches produites dans 5 groupes de PE1 de l'IUFM Orléans-Tours (chaque groupe comportant de 5 à 7 équipes).

[N.B.: les groupes sont identifiés par le prénom de leur enseignant(e) (Laurence ayant en charge deux groupes , ils sont notés B et C). Dans chaque groupe les équipes sont numérotées de 1 à 5, 6 ou 7 selon le cas.]

Nous appelons ici "validation" une technique proposée par une équipe de PE1 pour déterminer si (CD) est médiatrice de [AB] ou non. Nous avons distingué les validations figurant dans les affiches selon qu'elles relèvent de G1 ou de G2. Lorsqu'il y a plusieurs validations proposées dans une même affiche, les cas suivants ont pu être constatés :

(i) soit ces validations ressortissent toutes à l'un des deux paradigmes géométriques G1 ou G2 (et alors l'affiche est classée dans G1 ou dans G2).

Exemples : affiche 4 chez Ghislaine (dans G1) et affiche C7 chez Laurence (dans G2) :

<u>Définition de la médiatrice</u> : C'est une droite qui coupe un segment en son milieu perpendiculairement. Donc tout point situé sur la médiatrice d'un segment [AB] est situé à égale distance de A et de B. <u>Moyens</u> : * pour vérifier que (CD) passe par le milieu de [AB] : - O milieu de [AB]. (CD) passe-t-elle par O? - avec compas ou règle graduée : est-ce que CA = CB? ou DA = DB? * pour vérifier que (CD) $\perp$ [AB] : - avec équerre * pour vérifier que (CD) est la médiatrice de [AB] :

- construire la médiatrice de [AB], si elle est confondue avec (CD) alors (CD) est la médiatrice de [AB].
- construction du losange ACB'D. B = B'?

[Commentaire : Malgré le vocabulaire, les notations et la définition de la médiatrice, on se trouve ici sans ambiguïté dans G1 (le "donc" de la partie "définition" montre déjà qu'on n'a pas affaire à une équipe experte de G2). Tous les moyens listés ici relèvent de la perception, instrumentée ou non. En particulier, le principe consistant à dessiner aux instruments l'objet conjecturé, puis à observer s'il y a ou non coïncidence avec le tracé existant revient à plusieurs reprises.]

La médiatrice du segment [AB] le coupe perpendiculairement en son milieu O.

Si AOC est triangle rectangle en O, alors la droite (CD) est la médiatrice de [AB]. On applique la réciproque du théorème de Pythagore :

Si $AC^2 = CO^2 + OA^2$, alors AOC est triangle rectangle en O.

Même chose avec le triangle AOD.

Si AOC et AOD sont triangles rectangle en O, alors C, O, D sont alignés et (CD) est la médiatrice de [AB].

[Commentaire : Il s'agit d'une démonstration classique de G2.]

(ii) soit certaines validations se situent dans G1 et les autres dans G2, sans qu'il soit établi de distinction entre les deux types de validation (et alors l'affiche est considérée comme mettant sur un pied d'égalité G1 et G2).

Exemple : affiche C4 chez Laurence :

Méthode arithmétique :

Médiatrice : passe par le milieu de [AB] et perpendiculaire

∗ on suppose CD ⊥ AB, et O milieu de [CD].

Donc si OB ⊥ OC d'après Pythagore dans le triangle BOC rectangle en O on a :

$BC^2 = OB^2 + OC^2$

$(4,5)^2 = 4^2 + 2^2$

$20,25 \neq 20$ ∗ Donc le triangle BOC n'est pas rectangle en O et

∗ BO n'est pas perpendiculaire à OC

Donc (CD) n'est pas médiatrice de [AB]

Méthode géométrique :

∗ Médiatrice : tout point sur la médiatrice est équidistant à [AB]

Or en vérifiant avec le compas AC ≠ BC

∗ Par la figure en traçant la médiatrice à [AB] passant par O on s'aperçoit que (CD) et la médiatrice ne sont pas confondues.

[Commentaire : La méthode “arithmétique” se situe dans G2: c’est une démonstration par l’absurde exemplifiée par la version C de l'énoncé. La méthode “géométrique” se situe clairement dans G1. Les deux méthodes sont placées sur un pied d’égalité. A noter que, pour cette équipe, le qualificatif “arithmétique” semble correspondre à la présence de calculs numériques, tandis que “géométrique” paraît lié à l’utilisation d'instruments.]

Lorsque l'affiche propose une seule validation, celle-ci peut se situer dans G1 (perception instrumentée) ou dans G2 (démonstration). Un autre cas se présente également, celui dans lequel, bien que la démarche argumentative se situe clairement dans G2 (vocabulaire, référence à des résultats de G2, etc.), s'opère à un moment donné une CSP, c'est-à-dire que la démonstration inclut, de façon plus ou moins implicite, des éléments relevant de la perception.

Exemple : affiche 3 chez Ghislaine :

C_1 est le cercle de centre O: tous les points du cercle sont situés à égale distance du point O.

Donc: * OA = OB

* O milieu de [AB]

Comme A et B ∈ à (d), les points A, O, B sont alignés.

- C et D sont sur les cercles C_2 et C_3 respectivement de centre O et A.

Donc: * OC = OD, O milieu de [CD]

* AC = AD.

- le triangle ACD est isocèle en A car AC = AD. La demi-droite [Ad) issue de A coupe [CD] en O. Comme O est milieu de [CD], [AO] est la hauteur et la médiatrice de [CD].

- On en déduit que [AB] et [CD] sont perpendiculaires en O. Donc [CD] médiatrice de [AB].

[<u>Commentaire</u> : cette démonstration en 4 points fait preuve d'une certaine expertise dans G2 : le vocabulaire et le symbolisme sont correctement utilisés (y compris la demi-droite), le développement de l'argumentation est clairement exposé et les affirmations justifiées, à l'exception d'une seule : l'alignement sous-entendu des points C, D, O : le perçu est venu mettre à bas le bel édifice soigneusement construit.]

Le tableau ci-dessous indique la répartition que nous avons obtenue en nous situant selon les types de validations indiqués et exemplifiés plus haut:

	Edith	Ghislaine	Jean	Laurence B	Laurence C	Total
validation dans G2	4	5	4	1. 3. 4. 5. 6	2. 7	**10**
val. dans G2 + CSP		1. 3	1. 3	2. 7	3	**7**
parité G1 - G2	3. 6	2			4. 5. 6	**6**
validation dans G1	1. 2. 5	4	2. 5. 6		1	**8**

Tout d'abord, ce tableau met en évidence la grande disparité des 5 groupes étudiés, du point de vue du rapport à la géométrie; ceci n'est guère étonnant étant donné la diversité des origines scolaires et universitaires des PE1. On peut au passage noter le “haut niveau” relatif du groupe B de Laurence.

On peut ensuite constater que seules quelques équipes (10 sur 31) se placent sans ambiguïté dans G2. Quelques autres (8 sur 31) travaillent uniquement dans G1, mais il n'en reste pas moins qu'une part importante des équipes (13 sur 31) font "coexister" d'une façon ou d'une autre les deux géométries, le plus souvent de façon non consciente. En fait, la distinction claire entre les modes de validation de G1 et ceux de G2 n'est le fait que d'une faible minorité des PE1 : elle n'est exprimée que dans 3 affiches, parmi les 10 qui se placent dans G2.

D'autre part, 12 équipes ont formulé une assertion relative à la véracité de l'affirmation "(CD) est médiatrice de [AB]" (ce qui n'était pas demandé). Dans 3 cas les situations pour lesquelles la réponse est "oui" (versions B et D de l'énoncé) et celles pour lesquelles elle est "non" (version A et C) ont été correctement identifiées (au moins partiellement). Par contre, dans les 9 autres cas, une réponse unique a été donnée pour les 4 versions : "oui" pour 8 équipes (effet de contrat ?) et "non" pour la dernière. Ceci confirme notre intuition initiale que la seule validation perceptive (instrumentée ou non) se révèlerait insuffisante pour déterminer la réponse à cette question, d'autant plus qu'aucun étudiant n'a indiqué le "changement d'unité" comme moyen de validation (relatif à G1).

4- Conclusion

Comme on le voit, l'ensemble de ces premiers résultats tend à confirmer nos hypothèses de recherche R1 et R2 quant au rapport qu'entretiennent les PE1 avec la géométrie. Ainsi, nombre d'entre eux n'établissent pas de différence de nature entre les divers modes de validation, et ne sont apparemment pas conscients du fait qu'ils ne portent pas sur les mêmes objets. Il s'agit pourtant d'étudiants qui ont été confrontés à la totalité du cursus obligatoire, et qui donc, en particulier, ont eu des activités géométriques jusqu'en classe de Seconde inclusivement. Ils montrent d'ailleurs qu'ils disposent dans ce domaine, dans leur quasi-totalité, d'un ensemble de connaissances non négligeable, comprenant en particulier du vocabulaire ainsi qu'un certain nombre de constructions "classiques" aux instruments (médiatrice, losange) et d'énoncés (définitions, théorèmes), ce qui pourtant n'empêche pas qu'ils se comportent dans leur grande majorité comme des "non experts". Ceci renforce notre conviction qu'une formation initiale des PE1 doit viser à les amener à un niveau minimum d'expertise géométrique, et c'est à cette tâche que nous travaillons, en particulier par la recherche d'ingénieries didactiques susceptibles de favoriser une évolution de leur rapport personnel aux savoirs géométriques.

Bibliographie

ARSAC Gilbert et al. (1992) : *Initiation au raisonnement déductif au collège.* Presses Universitaires de Lyon

BERTHELOT René & SALIN Marie-Hélène (1992) : *Espace et géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse, Université de Bordeaux 1

CHEVALLARD Yves (1999) : L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, in *"Recherches en Didactique des Mathématiques"* 19/2, 221-266

COLMEZ François & PARZYSZ Bernard (1993) : Le vu et le su dans l'évolution de dessins de pyramides, du CE2 à la Seconde, in *"Espaces graphiques et graphismes d'espaces. Contribution de psychologues et de didacticiens à l'étude de la construction des savoirs spatiaux"* (sous la direction d'A. Bessot et P. Vérillon), 35-55. Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble

FISCHBEIN Ephraim (1993) : The theory of figural concepts, in *Educational Studies in Mathematics* 24/2, 139-162.

GONSETH Ferdinand (1945-1955) : *La géométrie et le problème de l'espace.* Ed. du Griffon, Lausanne

HENRY Michel (1999) : L'introduction des probabilités au lycée: un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie, in *Repères-IREM* 36, 15-34

HOUDEMENT Catherine & KUZNIAK Alain (1999) : Quelques éléments de réflexrion sur l'enseignement de la géométrie : de l'école primaire à la formation des maîtres, in *Petit x* n°51

LABORDE Colette & CAPPONI Bernard (1995) : Modélisation à double sens, in *Actes de la 8ème Ecole d'été de Didactique des mathématiques*. Ed. IREM de Clermont-Ferrand

NICOLAS-LORRAIN Brigitte (2000) : Conceptualisation géométrique en formation de PE, in *Actes du colloque COPIRELEM de Chamonix)*. Ed. Univ. Joseph-Fourier, Grenoble , 165-178

PARZYSZ Bernard (1989) : *Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée. Contribution à l'étude de la relation voir/savoir.* Thèse de doctorat. Université Paris-7. Ed. IREM Paris-7

PARZYSZ Bernard & JORE Françoise (2001) : Qu'ont-ils retenu de la géométrie du collège ? Le rapport à la géométrie des futurs professeurs de écoles, in *Actes du colloque inter-IREM de Montpellier*). Ed. Univ. de Montpellier (à paraître)

Van HIELE Pierre (1984) : A child’s thought and geometry, in *English translations of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele* (D. Geddes, D. Fuys & R. Tischler, eds.). Research in Science Education Program of the National Science Foundation (USA)