Éléments de cours sur la notion de problème pour professeurs stagiaires A.I.S. options E et F

Catherine Houdement

Extrait de Documents pour la formation des professeurs des écoles en didactique des mathématiques - Besançon 1997.

Cet article destiné à des formateurs de stagiaires AIS restitue la place de la résolution de problèmes dans les apprentissages et aborde la construction de situations destinées à des élèves relevant des RASED ou des SEGPA à partir de la distinction entre problématique mathématique et problématique de la réalité.
Prenant en compte les spécificités de l'AIS, l'auteur donne des pistes de réflexion pour les aides spécialisées en RASED et éclaire tout à fait les instructions données par la circulaire n°98 du 16 juin 1998 pour ce qui concerne l'enseignement des mathématiques en SEGPA
Une bibliographie est donnée par paragraphe.

Les stagiaires A.I.S. en formation, lorsque leur formation n'a pas été rénovée récemment, ont souvent besoin de "dépoussiérer" leur vision des mathématiques, a fortiori des problèmes de mathématiques. Leurs références sont quelquefois des manuels scolaires aux conceptions sous-jacentes un peu dépassées.

Ce cours essaie de pointer certaines remarques qu'il s'est avéré nécessaire de faire au cours des diverses séances de formation. Il ne prétend aucunement traiter le thème "problème mathématique" dans son intégralité, il jette quelques idées ou réflexions affinées au cours de la formation et évoquées avec les collègues formateurs.

I. Problèmes de mathématiques et manuels actuels

a. Les problèmes posés par les manuels

On appellera problème, dans un premier temps, tout support porteur d'informations relié à une question (ou plusieurs questions).

Les problèmes posés dans les manuels ont différentes finalités :

- avec les uns, on cherche à renforcer, consolider des savoirs et savoir-faire qui existent déjà chez l'élève ;

- avec d'autres, il s'agit de repérer, sur un thème précis, les compétences effectives des élèves, leurs difficultés spécifiques (à titre diagnostic ou à titre sommatif) ;

- d'autres encore offrent *a priori* une résistance aux élèves : les élèves n'ont en général pas encore le savoir ou savoir-faire expert qui permet de répondre aux questions ; ils vont donc, si le questionnement est bien construit, développer certaines attitudes, mettre en jeu certaines procédures qui vont contribuer à construire cette notion experte.

Ces derniers énoncés sont le plus proches des problèmes que rencontre le mathématicien, ce sont donc eux qui donnent du sens aux mathématiques. Ils doivent bénéficient d'un traitement particulier à l'école. C'est pour eux que le temps d'une réforme, on a inventé l'expression *situations - problèmes*[1]. Malheureusement on trouve peu de problèmes de ce type dans tous les manuels.

b. L'habillage, le contexte d'un problème

Dans les manuels, on trouve souvent, pour un texte associé à une question, deux libellés : exercices et problèmes. L'usage courant voudrait qu'on appelle exercice une suite de consignes décontextualisées (ou placées dans un contexte exclusivement mathématique), comme par exemple

(1) *Fais la division entière de 235 par 12*
(2) *Calcule 125 + 47 + 6*

et problème une suite de consignes placée dans un contexte dit "de la réalité" comme par exemple,

(3) C*ombien de boîtes de 12 œufs peut-on remplir avec 235 œufs ?.*
(4) *Chez le libraire, Pierre achète un livre à 125 F, une bande dessinée à 47 F et un journal à 6 F. Combien dépense-t-il ?*

Cette distinction ne porterait pas à conséquence si elle n'était suivie d'une hiérarchisation implicite : un exercice sur une notion serait résoluble par l'élève plus tôt qu'un problème comparable sur la même notion ; autrement dit un exercice serait plus simple qu'un problème, il intervient donc plus tôt dans les manuels. Examinons cette soi-disant hiérarchie.

***** Le problème des œufs (3) peut être résolu par un individu qui ne connaît pas la division : il peut en effet dessiner la situation et la résoudre par toute sorte d'approche (dessin effectif par paquets, approches additive ou multiplicative). Par contre l'énoncé (1) n'est compréhensible que par celui qui connaît le mot division et qui surtout sait que cette opération est liée à une répartition équitable avec reste minimum. L'énoncé contextualisé des œufs nécessite donc moins de connaissances préalables que l'autre énoncé (1), il peut donc être résolu plus tôt. Un "bon contexte" peut ainsi apporter du sens à une notion.

[1] cf. R. DOUADY (1984) *Cahier DIDIREM* n°3, IREM de Paris 7 et *Instructions officielles de 1980* où, déjà le sens premier était en partie perdu. Nous nous limiterons quant à nous au mot *problème*.

***** Pour un élève qui connaît l'addition, les énoncés (2) et (4) sont mathématiquement équivalents ; l'énoncé (4) n'offre pas plus de difficulté mathématique que l'énoncé (2).

L'habillage seul d'un énoncé, le fait qu'il soit référencé à une situation du côté de la réalité ou du côté des mathématiques n'est donc pas une distinction pertinente dans une problématique mathématique. Nous ne retiendrons pas la distinction exercice - problème sous cette forme.

II. Qu'est-ce qu'un problème mathématique ?

A. La distinction problèmes et exercices. Notion d'intention

Dans la vie courante, un problème est quelque chose qui résiste, qui crée un obstacle à un traitement immédiat. Un *problème mathématique* possède ce caractère, il doit offrir une résistance à l'apprenant. Cette résistance peut être vaincue en utilisant un ou plusieurs outils mathématiques[2]. Si l'énoncé n'offre plus cette résistance, il devient un *exercice*, une situation pour *exercer* un ou plusieurs outils mathématiques connus.

On peut donc parler de problèmes aussi bien en tout début d'apprentissage d'une notion, parce que l'élève ne possède pas encore l'outil expert qui lui permettrait de résoudre vite ce problème, qu'en fin d'apprentissage, lorsque l'élève doit combiner plusieurs outils mathématiques connus pour répondre aux questions. Dans tous les autres cas, où l'élève n'a qu'à appliquer un outil (ou plusieurs) qu'il a déjà acquis, on parlera d'*exercice*. Donnons deux exemples.

- Le texte « *partager équitablement 138 bonbons entre 15 enfants* » est en général un problème (dans un contexte lié au réel) pour un élève de CE2, mais devient un exercice pour un élève de CM2. C'est un problème de division, plus généralement appelé problème multiplicatif.
- En cycle 1, la situation suivante, « *poser devant l'élève côte à côte 5 cailloux et 3 cailloux et demander le nombre de cailloux* », n'est pas un problème additif, mais un exercice de dénombrement. Par contre, « *prendre une boîte vide, y déposer devant l'élève 5 cailloux, puis encore 3 cailloux, fermer la boîte et demander de trouver le nombre de cailloux dans la boîte* » est un problème (ou un exercice) additif (à condition qu'on ne puisse ouvrir la boîte que pour contrôler la solution proposée). En effet l'élève doit imaginer, penser le contenu de la boîte, il peut le matérialiser (avec ses doigts, des jetons), le dessiner, il peut compter 6, 7, 8, il peut aussi déclarer 8 car 5+3=8, etc. La recherche du mode de traitement du problème est à sa charge.

Remarquons que, si l'enfant ouvre la boîte pour chercher la réponse, il se situe dans une problématique du réel (il détourne l'intention mathématique du

[2] Mais qu'est-ce qu'un outil mathématique ? Nous nous contenterons d'une réponse naïve à cette question : le nombre est un outil au même titre que les opérations (et leurs algorithmes), la proportionnalité (et ses modes de résolution) ...

problème tourné vers l'addition, il retourne au dénombrement), mais non dans une problématique mathématique. Ainsi tout problème mathématique dans l'enseignement est donné avec une intention[3], celle de vouloir activer certaines notions ou de préparer la construction de nouvelles notions. On dit d'ailleurs que le problème (ou l'exercice) relève des outils mathématiques qui permettent de le résoudre. Le problème est bien construit quand il contient les contraintes qui exigent de rester dans l'intention souhaitée (dans l'exemple ci-dessus, la contrainte est de ne pas ouvrir la boîte pour anticiper sans se limiter à un constat). Une des tâches du professeur (et non des moindres) est de faire en sorte que les contraintes soient les moins artificielles possibles, qu'elles soient naturellement attachées à la situation, de façon à ce que l'élève les intègre pleinement dans sa recherche.

B. Situation réelle, situation évoquée et mathématisation

Un problème énoncé par écrit, quel qu'il soit, même s'il se réfère au réel, ne constitue pas une situation réelle, il ne fait (dans les meilleurs des cas) qu'évoquer le réel qui donne le cadre de la situation. La résolution d'un problème ou d'un exercice mathématique ne s'effectue pas dans la réalité, elle doit être pensée. Un problème se résout dans une problématique mathématique, l'accès au réel (quand la situation le permet) procure un contrôle des résultats et une validation. Mais l'accès au réel n'est pas total. Examinons cela sur un exemple.

1. La situation réelle

Acheter de la baguette de bois pour entourer un sous-verre de forme rectangulaire.
La résolution se fait alors dans une problématique de la réalité.
On peut prévoir d'en acheter un peu plus en cas d'erreur. Doit-on réfléchir à une taille en biseau pour encadrer joliment les quatre sommets du rectangle ou à un autre type de jonction ?

Plusieurs procédures sont possibles pour mesurer : on peut par exemple utiliser un mètre (ou une ficelle reportée sur un mètre rigide ou ...) pour simultanément mesurer et additionner les mesures de longueurs, mais on peut aussi mesurer longueur et largeur, puis les additionner deux fois ; cela suppose alors une connaissance au moins implicite de la notion de périmètre du rectangle.

[3] C'est une des différences avec un problème de mathématicien dont la seule intention est qu'il soit correctement résolu.

2. Une situation évoquée sur le même thème

Remarquons d'abord qu'il peut y avoir diverses évocations possibles de la situation réelle précédente : avec le dessin à l'échelle du cadre, avec un schéma sur lequel on reporte les mesures, etc.). Arrêtons nous sur l'énoncé suivant.

Paul possède un sous-verre de forme rectangulaire, dont les dimensions sont 42 cm sur 35 cm. Il veut construire un cadre autour. Quelle longueur minimum de baguette doit-il acheter ?
La résolution se fait dans une problématique mathématique.
Là le résultat attendu est l'exacte mesure du périmètre (154 cm). Le mot "minimum" essaie d'évacuer les références au réel que seraient une taille en biseau sur les quatre coins, ou un autre style de coupe.

Une procédure possible consiste à chercher un schéma : il s'agit de dessiner le rectangle, mais il ne tient pas sur une feuille, on peut alors dessiner un rectangle quelconque et chercher à voir comment obtenir son périmètre, pour ensuite additionner les longueurs deux fois.

3. Quelques remarques

- Dans des problèmes ou exercices mathématiques, certains mots font fonction de contrôle de l'évocation (ici minimum) ; ils ne sont pas toujours perçus en tant que tels ; c'est un phénomène de contrat.
- Cette dialectique entre problématique de la réalité et problématique mathématique est particulièrement sensible pour les élèves E et F. En effet les problèmes sur lesquels ils réagissent le plus sont ceux pour lesquels la réalité contredit leurs résultats[4]. Ils acceptent alors de remettre eux-mêmes en cause leurs procédures.

Il est nécessaire de faire prendre conscience aux apprenants F des deux problématiques en jeu, la problématique de la réalité et la problématique mathématique, celle qui fait partie du contrat pour l'école. Une des difficultés de l'enseignement en F sera d'ailleurs de relier problématique du réel, problématique mathématique et problématique professionnelle de l'atelier, où là, les objets d'étude sont plus réels, mais soumis à des contraintes liées aux instruments disponibles.

[4] C'est pourquoi les activités géométriques sont particulièrement pertinentes pour les F. En effet pour certaines situations géométriques telles que reproduction de figures planes ou de solides, la distance entre problématique de la réalité (dessins ou solides) et problématique mathématique peut être réduite.

C. Qu'est-ce que faire des mathématiques à l'école ?

Faire des mathématiques à l'école, c'est donc :

- résoudre des problèmes, c'est-à-dire anticiper le résultat d'une action soit réelle, soit évoquée ou encore symbolique,

- sans mener effectivement cette action (si elle est réelle ou évoquée), mais en la représentant par des schémas, par des écritures symboliques, en utilisant des outils mathématiques
- soit directement (par appel à une démarche efficiente déjà connue ou à un outil particulièrement efficace), soit après avoir construit une stratégie,
- en ayant des moyens de contrôle de la stratégie et de validation des résultats produits ;

- mais c'est aussi s'entraîner au maniement d'outils efficaces, introduits à l'occasion de la résolution des problèmes qui précèdent.

Faire des mathématiques à l'école, c'est donc résoudre des problèmes dans une problématique mathématique.

III Exemples de problèmes à construire par le professeur

Le maître construit des situations qui donnent l'occasion aux élèves de faire des mathématiques. Ces situations sont tantôt des problèmes, tantôt des exercices. Sont alors à la charge de l'élève plusieurs tâches, pas seulement mathématiques : la lecture du texte, de la question, la compréhension, la représentation, le traitement (la construction d'une démarche de résolution), l'explicitation de la solution. Le professeur peut moduler ses exigences par rapport à ces différentes phases, par exemple il peut choisir de lancer le problème par oral (pour éviter lecture de texte avec image), il peut matérialiser le problème de façon à faciliter la représentation (attention au rôle du matériel), il peut laisser l'élève poser un problème au professeur (pour changer la rapport de l'élève à la question), etc.

Les problèmes choisis pour apprendre doivent permettre une entrée rapide dans le problème par l'élève, un intérêt de la part de l'élève pour la question posée, la construction possible de procédures de résolution par l'élève allant dans la direction visée par l'apprentissage, si possible un contrôle sur les procédures ...

Il est alors intéressant de prévoir une gestion du groupe ou de la classe, en plusieurs phases :

- un temps de recherche individuelle, avec l'aide éventuelle du professeur pour lancer la recherche, sans induire de solution,
- un temps de confrontation des procédures : les élèves constatent alors, avec l'aide du professeur, que certaines procédures ont abouti, mais qu'elles sont différentes les unes des autres, que d'autres n'ont pas abouti, mais qu'elles auraient pu se poursuivre ...

On constate que les élèves A.I.S., face à ces derniers problèmes, emploient des procédures particulièrement "dispersées", beaucoup plus que dans une classe "ordinaire". Quelques raisons peuvent être signalées a priori : la variété des parcours des enfants regroupés dans l'A.I.S., les effets des déperditions successives, le peu de contrôle qu'ils ont l'habitude d'exercer sur leurs productions.

La phase de synthèse par le professeur est l'occasion pour l'élève de porter un regard sur ce qui lui a permis de réussir ou sur ce qui l'a fait "perdre".

C'est la répétition d'activités de ce même type qui permettra à l'individu de se forger une idée du "résoudre un problème de mathématique" et d'acquérir une "certaine autonomie".

Un entraînement (série d'exercices) sur des activités de même type est indispensable pour fixer les connaissances et procurer à l'individu le plaisir de la réussite répétée.

Les problèmes classiques que l'on peut rencontrer dans les manuels n'offrent pas souvent de telles caractéristiques (même sous les expressions *activité de recherche*, *activité préparatoire*, *recherche*, etc.). Pour construire du sens et apprendre à raisonner en permettant un auto-contrôle de la situation, pour distinguer la problématique du réel de la problématique mathématique, il est nécessaire de vivre des problèmes réels (contextualisés) mais relevant d'une problématique mathématique, et ce avant de passer aux situations seulement évoquées.

Dans cette partie du cours, il s'agit de trouver, construire de tels problèmes avec les stagiaires et de leur donner des références bibliographiques qui devraient leur permettre de trouver de la matière (essentiellement nombre et numération pour les E, plus diversifié pour les F).

Suivent quelques exemples pour les E (déjà vus en numération).

a. Suite de situations pour la compréhension de l'aspect algorithmique de la numération écrite : le jeu du château

Lire *Apprentissages numériques ERMEL CP* (1991) éditions Hatier, page 281 et suivantes.

L'élève peut entrer dans le problème grâce au conte qui lui donne du sens. Il a plusieurs procédures à sa disposition, par exemple dans le champ numérique qu'il maîtrise oralement :

- parcourir la suite de cases et réciter la comptine jusqu'à la case du trésor, chercher sur la bande numérique l'écriture en chiffres du nombre cité ;
- prendre des indices sur la ligne de la case trésor et déduire l'écriture chiffrée ;
- prendre des indices sur la colonne de la case trésor et déduire l'écriture chiffrée.

Quand la situation globale a pris du sens, que l'élève a une représentation de la tâche finie, le thème du château peut être réinvesti dans plusieurs exercices individuels, qui permettront à l'élève de conforter et fixer ses connaissances.

b. Travail avec Magali sur la compréhension de l'aspect décimal de la numération

cf. C. PEZÉ, La rééducation de Magali[5]

IV. Résolution de problèmes par l'élève

Il s'agit ici de renvoyer le stagiaire à des lectures qui lui permettront d'affiner sa vision de la tâche de l'élève résolvant un problème.

Listons les différentes tâches :
- la lecture de l'énoncé, de l'image, des questions : notamment difficultés liées à la sémantique, à la syntaxe,
- la prise d'informations nécessaires au traitement, donc un passage obligé par une représentation du problème,
- le traitement du problème, et les difficultés liées notamment au décalage entre la structure sémantique et la structure mathématique d'un énoncé,
- la formulation de la réponse, la communication à un tiers.

Sur quels points pouvons nous avancer avec les stagiaires en formation AIS ?

a. La spécificité de la lecture d'un problème

S'agit-il de faire une lecture directe des informations ou, l'appropriation des informations nécessite-t-elle un travail de reformulation (lecture d'un tableau, d'un dessin, ...) ? Une fois la question lue, il est souvent nécessaire de relire l'énoncé pour en retirer des informations nécessaires au traitement : FAYOL[6] note que le placement en tête de la question entraîne une amélioration systématique des réussites aux problèmes additifs pour tout type de problème et tout âge. Quelle progression adapter pour améliorer en fin de cours l'autonomie du sujet sur la lecture du problème ?

Références

- dans la revue *Grand N* , I.R.E.M. de Grenoble :

- n°42 F. BOULE, C. WASSERER (1988) "Lecture des énoncés mathématiques"
- n°50 R. NEYRET (1992) "Lecture d'énoncés et progression thématique"
  D. BUTLEN (1992) "Situations d'aide aux élèves en difficulté et gestion de classe associée"
- n°51 J. BOLON (1993) "Regards insolites sur quelques manuels"

- dans les *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* volume 4, IREM de Strasbourg :

[5] Article présent dans ce tome.

[6] *L'enfant et le nombre*, 1990, page 174, éditions Delachaux et Niestlé, Neuchatel.

R. DUVAL (1991) "Interaction des niveaux de représentation dans la compréhension des textes".

b. La notion de structure : un exemple, les problèmes additifs

Dans ce paragraphe, on peut traiter
- de la notion de champ de problèmes, en liaison avec les champs conceptuels de G. VERGNAUD, en faisant travailler les stagiaires sur les problèmes additifs ;
- de l'impact des présentations et modes de formulation des énoncés, notamment des notions de structure sémantique et structure mathématique de l'énoncé.

Références

- EHRLICH S. (1990) *Sémantique et mathématiques. Apprendre / enseigner l'arithmétique simple*, éditions Nathan.
- FAYOL M. (1990) *L'enfant et le nombre. Du comptage à la résolution de problèmes,* éditions Delachaux et Niestlé.
- VERGNAUD G. (1981) *L'enfant, la mathématique et la réalité,* éditions Peter Lang.

Grâce à ces éléments d'information, on insistera en particulier sur les points suivants, avec les stagiaires en formation :

- couvrir le champ des structures additives, ne pas se limiter à un seul type de problèmes ;
- donner du sens à la soustraction en choisissant des problèmes appropriés.
- prendre garde à évaluer avec des problèmes de même type que ceux sur lesquels on a entraîné les élèves ;
- prendre garde à ne pas ajouter de difficulté sémantique aux problèmes d'évaluation ;

c. La notion de représentation d'un problème

On trouvera les références de quelques ouvrages récents sur la notion de "boîte noire" dans la psychologie cognitive, appliquée aux mathématiques. On citera brièvement :
- la représentation d'un problème par le dessin, par le mime ...
- les représentations plus élaborées : schéma ...
- les aides possibles à la représentation ...

Références

- DESCAVES A. (1992) *Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes* Éditions Hachette.

Un début confus, plus intéressant après la page 18.

- JULO J.(1995) *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*, éditions Presses Universitaires de Rennes.
- JULO J. (1996) Une séquence d'apprentissage autour du problème de la proportionnalité, pages 110-115, in *Documents pour la Formation des Professeurs d'École en Didactique des Mathématiques*, tome V, IREM de Paris 7.
- SARRAZY B. (1996) *Résolution de problèmes et représentation*. Thèse de 3ème cycle. Université de Bordeaux II.

d. Le transfert ou l'éducabilité cognitive

Qu'en est-il de l'existence d'une capacité générale à résoudre les problèmes ? On peut évoquer à cette occasion les propositions institutionnelles de médiation cognitive (ARL, PEI, etc.) auxquelles seront confrontés les stagiaires A.I.S, et leur redonner une plus juste place

Référence

COULET J-C. (1996) Les méthodes d'éducation cognitive, p. 145-168 in *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques (1997)* tome V, IREM de Paris 7.