Aire de surfaces planes.

Marie-Lise Peltier - Catherine Houdement

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - Pau 1992.

Cet article propose un dispositif destiné à la formation initiale et continue prévu pour deux séances de trois heures. Il s'appuie sur un problème très simple : chercher un maximum de façons de partager une feuille de papier rectangulaire en deux parties superposables.
Les auteurs décrivent le déroulement en plusieurs phases distinctes dont les objectifs sont clairement identifiés au départ. En fin d'article, le dispositif est analysé à la fois sur le plan mathématique et sur le plan didactique.

1. Objectifs

a) Objectifs mathématiques

- Indépendamment, dans un premier temps, du dénombrement sur quadrillage, du calcul numérique et de l'utilisation de formules :
    - Construire le concept d'aire,
    - Construire la notion de mesure,
    - Faire fonctionner l'additivité des mesures d'aire.
- Distinguer aire, périmètre et forme d'une surface.
- Utiliser la symétrie centrale comme outil de résolution de problème et en déduire quelques propriétés.
- Introduire les fractions, produire des égalités entre fractions, les comparer, les ranger.

b) Objectifs didactiques

La situation présentée illustre les notions d'outil et d'objet puisqu'elle permet de mettre en jeu deux concepts mathématiques : l'aire en tant qu'objet, la symétrie centrale en tant qu'outil implicite de résolution du problème posé. Cette situation permet en outre d'introduire les fractions comme des codages nécessités par l'insuffisance des entiers pour des classes de surfaces de même aire.

2. Activité

a) Première phase

Objectif

Construire des surfaces de même aire, mais de formes différentes et définir la notion d'aire (hors contexte numérique).

Matériel

- Feuilles d'annuaires téléphoniques (format A4) en grand nombre.
- Ciseaux, instruments usuels de géométrie.

Organisation

Travail individuel

Consigne 1

« Vous devez partager chaque feuille en deux parties exactement superposables sans perte et sans recollage (c'est-à-dire qu'avec les deux parties il sera possible de reconstituer la feuille initiale) : vous devez chercher un maximum de partages différents répondant à cette consigne de partage que nous désignerons par (P) ».

Procédures observées

- Les étudiants commencent par plier en deux suivant les médianes, puis les diagonales du rectangle. En général à ce moment, certains pensent qu'ils ont trouvé tous les partages possibles, il est alors nécessaire de redonner la consigne en précisant qu'ils doivent essayer d'en trouver d'autres.
- La procédure suivante consiste à plier la feuille de telle sorte que deux sommets opposés se superposent. Ce partage permet généralement à l'idée qu'il existe un nombre infini de solutions de se répandre.

Les autres procédures que l'on rencontre sont les suivantes :

- Des pliages en 8 ou 16 suivis de dépliages et découpages en suivant certaines lignes de pliages plus ou moins bien choisies (d'où des réussites ou des échecs !).
- Des recherches en construisant des segments de même longueur en partant de deux sommets diamétralement opposés.
- Des procédures consistant à construire une ligne de partage symétrique par rapport à une médiane, puis en raison de l'échec, évolution de cette procédure vers la construction d'une ligne de partage symétrique par rapport au centre de la feuille.

Remarque

On peut constater de très nombreux essais qui n'aboutissent pas, mais ces essais permettent à leurs auteurs de faire de nouvelles hypothèses sur les propriétés de la ligne de partage. De nombreux étudiants trouvent assez vite comment construire une ligne de partage polygonale qui permet de résoudre le problème en faisant des tracés symétriques de part et d'autre du centre de la feuille, puis certains cherchent des lignes de partage curvilignes à main levée ou en traçant des cercles.

Synthèse

Les étudiants viennent afficher un certain nombre de partages réalisés. Ils vérifient à chaque fois la superposition exacte des deux parties et la reconstitution possible de la feuille initiale avec les deux parties, ils expliquent à leurs camarades le procédé utilisé pour obtenir la ligne de partage.

b) Apport du professeur et première institutionnalisation

Sur l'aire

- Les deux parties issues d'un même partage (P) sont superposables, elles ont donc même forme et même périmètre.
- Deux parties issues de deux partages (P) différents ne sont pas directement superposables, pourtant elles vérifient toutes les deux la propriété : *« avec deux parties analogues à chacune d'elles on peut reconstituer la feuille entière ».* Elles sont donc aussi « étendues » l'une que l'autre, elles contiennent toujours la même quantité de papier, elles correspondent toujours à une « demi feuille », on dit qu'elles ont **même aire**.

Constats

- Deux surfaces de **même aire** n'ont pas nécessairement la **même forme**.
- Deux surfaces de **même aire** n'ont pas nécessairement le **même périmètre**.
- Deux surfaces **superposables** ont **même aire, même forme**, même périmètre.
- A partir d'une partie quelconque issue d'un partage (P), on peut, par **découpage et recollement**, sans chevauchement et sans perte de papier, construire n'importe quelle autre partie issue d'un autre partage (P).

On conviendra d'appeler momentanément famille G, la famille des parties obtenues.

Sur la symétrie

La propriété vérifiée par la ligne de partage pour répondre à la consigne est la suivante : cette ligne est **symétrique par rapport au centre du rectangle**.

c) Deuxième phase

Objectifs mathématiques

- Réinvestir la notion d'aire et celle de symétrie centrale.
- Constituer un stock de formes d'aires différentes mais facilement comparables.
- Introduire un codage fractionnaire et le faire fonctionner.

Enjeu

Permettre à tous de créer des surfaces de formes originales et tarabiscotées.

Organisation

Travail individuel ou par groupes de deux.

Matériel

Le même que précédemment.

Consigne 2

« Vous devez recommencer l'activité de la consigne précédente mais avec des rectangles ayant même aire que les formes précédentes, c'est-à-dire avec des demi-feuilles rectangulaires ».

Remarques

Les étudiants peuvent ainsi réinvestir ce qu'ils ont fait, ou ce qu'ils ont vu faire par d'autres, lors de la phase1. On note, à ce stade, qu'ils prennent plaisir à laisser libre cours à leur imagination et qu'ils prennent conscience que ***l'on peut augmenter à loisir le périmètre de la surface sans en augmenter l'aire.***

On constitue ainsi une seconde classe de surfaces de même aire que l'on désigne par H. On matérialise les deux classes déjà obtenues par des grandes feuilles de papier (type *paper board*) sur lesquelles on colle plusieurs surfaces de la classe.

Lorsqu'il s'agit d'introduire un codage des classes ainsi construites, rendant compte des surfaces qu'elles contiennent, l'ensemble du groupe s'accorde généralement pour désigner la classe G par ½, car elle contient des demi-feuilles et la classe H par ¼, car elle contient des quarts de feuilles. Ce codage est retenu et noté sur les grandes feuilles qui matérialisent les classes.

Consigne 3

« Vous allez construire, par groupe de deux (ou de quatre), des surfaces ayant même aire que la feuille d'annuaire, mais de formes différentes ».

Procédures observées

Les étudiants placent côte à côte de diverses façons :

- Deux surfaces de la famille ½, issues d'un partage (P), c'est-à-dire exactement superposables.
- Ou deux surfaces de la famille ½, issues de deux partages (P) différents, donc de même aire mais de formes différentes.
- Ou une surface de la famille ½ et deux surfaces de la famille ¼.
- Ou quatre surfaces de la famille ¼.

Synthèse

Les différentes propositions sont présentées et discutées. En cas de désaccord, on reconstitue par découpage et recollement la feuille d'annuaire à partir de la feuille proposée.

Les surfaces retenues constituent une nouvelle classe de surfaces de même aire que l'on décide de coder par 1 puisqu'il s'agit de surfaces ayant même aire qu'une feuille d'annuaire.

La description des différentes procédures donne lieu à leur traduction en terme de codage fractionnaire :

- Les deux premières procédures citées se traduisent par
  ½ + ½ = 1 ou par 2 x ½ = 1 (lu comme « *deux fois un demi* »)
- La troisième par
  ½ + ¼ + ¼ = 1 ou par ½ + 2 x ¼ = 1.
- La dernière par
  ¼ + ¼ + ¼ + ¼ = 1 ou par 4 x ¼ = 1.

Consigne 4

« Vous allez travailler par groupes de quatre, construire de nouvelles classes de surfaces de même aire ».

Procédures observées

- Partage en deux parties superposables de rectangles correspondant au quart de la feuille d'annuaire.
- Assemblage de surfaces de différentes classes obtenues.

Mise en commun

Les différentes classes proposées sont comparées, des surfaces de chaque classe sont collées sur de grandes feuilles, chaque classe est codée en fonction des surfaces qu'elle contient et l'on donne des écritures variées rendant compte des différentes procédures utilisées pour construire les surfaces de la classe.

Lors de cette mise en commun, on obtient généralement de très nombreuses classes et donc de très nombreuses écritures, par exemple :

1/8 + 1/4 = 1/8 + 1/8 + 1/8 = 3 x 1/8 = 3/8
1/2 + 1/4 = 3/4 ; 1 + 1/4 = 5/4 ; 1 + 1/2 = 3/2 = 6/4 ;
1 + 1/2 + 1/4 = 7/4 ; etc.

Consigne 5

« Vous allez mettre en ordre les différentes classes obtenues : pour cela, vous pouvez construire pour chaque classe, un rectangle de la famille dont une des dimensions est fixée, par exemple, la largeur de la feuille d'annuaire ».

Mise en commun

Le rangement des classes en fonction de la relation « … est moins étendue que… » est matérialisé par la mise en ordre des grandes feuilles représentant les classes, elle est justifiée par la superposition des rectangles des différentes classes qui ont une dimension commune, elle donne lieu à une série d'écritures du type :

$$1/8 < 1/4 < 3/8 < 1/2 < 3/4 < 1 < 3/2 < 7/4 < 2$$

Un réinvestissement individuel de ces différentes phases peut être proposé à partir de surfaces planes distribuées (cf. annexe). Lors de la mise en commun de ce travail individuel, on constate qu'il est possible de choisir n'importe quelle classe comme unité et que les codages qui s'en déduisent sont proportionnels aux codages de départ.

3. Analyse de l'activité

Analyse mathématique

Cette série d'activités est un exemple d'une progression sur une grandeur et la mesure liée à cette grandeur.
Le professeur reprend avec les étudiants l'explicitation du rôle des différentes étapes :
1. Pour définir la grandeur aire :

- Définition d'une relation d'équivalence sur un ensemble de surfaces, ici la relation « avoir même aire ».
- Construction de l'ensemble quotient, ici les classes des surfaces ayant même aire.
- Caractérisation des classes, ici par un codage fractionnaire et par le choix d'un représentant « rectangle » de chaque classe.
- Construction d'une relation d'ordre sur l'ensemble quotient.

2. Pour construire un codage numérique qui est une mesure : construction d'une application de l'ensemble quotient dans l'ensemble des nombres réels :

- Positive
- Additive
- Monotone
- Parfaitement déterminée par le choix d'une unité, ici la feuille A 4.
- Vérifiant les propriétés suivantes : l'inégalité triangulaire, les surfaces vides ont une aire nulle, il existe des surfaces non vides d'aire nulle.

Remarque

Cette situation permet de distinguer naturellement objet mathématique, grandeur mesurable, mesure.
D'autre part, elle apparaît comme une introduction pertinente de la nécessité des nombres non entiers, et plus précisément des fractions. En effet, elle permet de donner du sens à des écritures fractionnaires :

- Définition de $1/n$ par $1/n + 1/n + \dots + 1/n = 1$

  et par $n \times 1/n = 1/n \times n = 1$;
- Production d'égalités variées sur ces nombres ;
- Comparaison et rangement de fractions et d'écritures fractionnaires.

Enfin elle permet de faire des rappels sur la symétrie centrale qui est apparue comme un outil de résolution du problème de partage.

Analyse didactique

Cette situation permet de pointer :

- L'aspect auto-validant de la première consigne de la première phase : c'est l'étudiant lui-même, sans intervention de quiconque, qui décide si le partage qu'il vient de réaliser convient ou s'il est à rejeter ;
- Le rôle de l'hypothèse erronée dans cette phase : en effet c'est très souvent à partir d'une ligne de partage qui ne convient pas que l'étudiant réussit à trouver les propriétés que doit vérifier cette ligne pour répondre à la consigne ;
- L'aspect outil de la notion de symétrie centrale qui est utilisée par tous les étudiants après un certain temps de recherche, bien qu'elle n'ait pas fait l'objet d'un apprentissage antérieur : la notion de symétrie centrale n'est donc pas abordée par sa définition, elle est perçue par son aspect fonctionnel ; il est possible ici de faire le choix d'institutionnaliser (ou non) cette notion pour dégager son aspect objet de savoir et d'étudier les propriétés utilisées pour construire la ligne de partage ;
- L'aspect objet du concept d'aire, qui est ici mis en évidence non pas par une définition, mais par une relation d'équivalence ;
- L'aspect outil de la notion de fraction, qui apparaît ici comme un codage rendant compte de manipulations finalisées avant de devenir objet de savoir institutionnalisé et d'être réinvesti dans d'autres contextes.

4. Prolongements

a) Sur l'aire

Au niveau mathématique

Transfert des notions étudiées sur d'autres matériaux.
Activités de réinvestissement.

Au niveau didactique

Etude de manuels à partir d'un questionnement du type :

- Comment est introduite dans les manuels scolaires la notion d'aire ?
    - Aspect dénombrement ;
    - Aspect encadrement ;
    - Rôle des quadrillages ;
    - Introduction de l'unité ;
    - Formules.
- Quels sont la part et le type des manipulations proposées aux élèves ?
- Comment le manuel prend-il en compte les distinctions :
    - Aire / dénombrement ;
    - Aire / nombre ;
    - Aire / surface ;
    - Aire / périmètre ?

b) Sur les rationnels

Cette situation est l’une des situations phares pour travailler l’extension de la notion de nombre entier. Elle fait partie à ce titre de la progression sur l’introduction des rationnels.

ANNEXE