# ATELIER C

TITRE : AIRE DE FORMATION.

AUTEURS : CATHERINE HOUDEMENT ; MARIE-LISE PELTIER.
IREM et IUFM de Haute Normandie

Date : Novembre 2001.

Résumé : L'atelier présente une stratégie de formation pour les PE2, conçue pour être homologue à une stratégie préconisée pour les élèves (mise en activité des élèves, puis mise en commun et synthèse suivie d'une institutionnalisation). Cette présentation a été elle-même faite selon une stratégie d'homologie, cette fois ci en direction des formateurs participant à l'atelier. La synthèse pour les formateurs permet d'éclairer des concepts didactiques tels que : phase didactique et a-didactique, dialectique outil-objet.

Le déroulement de l'atelier est découpé en trois parties.

**Première phase (I et II)**
Les participants jouent le jeu de PE2 : individus en activité sur une consigne du formateur se livrant ensuite à une analyse guidée par le formateur sur les savoirs mathématiques, didactiques et pédagogiques en jeu.
**Deuxième phase (III et IV)**
Les participants se livrent à une analyse critique de cette séance de formation, en pointant avantages et inconvénients , difficultés éventuelles de mise en œuvre.
**Troisième phase**
Deux films relatant deux séances effectives de formation en PE2 selon le scénario décrit ont été mis à disposition des participants.

Le compte rendu ci dessous donne des éléments des deux premières phases. Il est complété par des annexes.

## I MISE EN ACTIVITE DES FORMATEURS

### A Les consignes

Les consignes sont données selon le scénario prévu pour les PE2.

Matériel prévu : feuilles de bottin A4 en grand nombre, ciseaux, matériel de géométrie usuel ; un transparent par groupe pour les conditions sur la ligne de partage.

Organisation de l'ensemble : groupe de 4 à 5 personnes, chacun affecté d'un numéro

Consigne 1 écrite au tableau : « Partagez une feuille en deux parties exactement superposables sans perte et sans recollage ; trouvez le maximum de partages différents »

Après un temps de recherche de 5 minutes environ, vient la consigne 2 : « chaque groupe doit formuler par écrit une ou plusieurs conditions sur la ligne de partage pour que le partage convienne ».

B Quelques éléments de déroulement pendant l'atelier

Le temps de recherche des formateurs concernant la forme de la ligne de partage, forme dessinée, est plus court que celui moyen d'un groupe de PE2. L'intérêt se porte plus sur la formulation des conditions.

Une première mise en commun permet de voir différentes formulations. Le choix est alors donné aux groupes de modifier ou non leur formulation de départ. C'est ainsi que progressivement les formulations se précisent par allers retours successifs entre réflexion intra-groupe et mise en commun collective. Les conditions nécessaires s'enrichissent jusqu'à devenir suffisantes.

Les premières formulations citent toutes au moins l'invariance de la ligne par symétrie centrale de centre O, centre du rectangle. Puis après exhibition du contre exemple constitué par un cercle de centre O, s'ajoute la condition « la ligne doit passer par le centre du rectangle ». Enfin se pose la question de la définition de la « ligne » notamment par rapport à la nécessité d'exclure les points doubles.

La conclusion unanime est alors « la ligne de partage doit être invariante par symétrie centrale de centre le centre du rectangle, passer par ce centre, ne contenir aucun point double, et partir d'un bord du rectangle ».

C Présentation aux participants de la suite donnée à cette activé en PE2

Cette activité permet de fabriquer un lot de surfaces non superposables et pourtant de même aire. Ce qui permet de définir (redéfinir) la notion d'aire pour les futurs professeurs des écoles . Cette activité peut ainsi constituer la première phase d'une approche de l'aire en formation initiale (voir scénario complet en annexe 1). Elle offre en effet

- un lot de surfaces (peu prototypiques) non superposables et pourtant de même aire ;
- un procédé de fabrication de surfaces dont les aires sont dans un rapport 2 (il suffit de faire appliquer la consigne de partage à partir d'une demi feuille rectangulaire -format A5-, puis d'un quart de feuille, etc.) ;
- des surfaces de périmètres souvent comparables sans recours à la mesure : les périmètres sont souvent différents alors que les aires sont égales ;

- des surfaces qu'il est possible de rendre superposables par découpage et recomposition (grâce aux propriétés de la ligne de partage).

Cette activité est donc propice à la mise en œuvre de procédures spécifiques non numériques sur les aires.

La suite donnée en formation[3] concerne le rangement des aires , le passage à la mesure avec éventuellement une première rencontre avec des nombres non entiers du type $1/2^n$ (selon le choix de la surface étalon), leur somme, leur produit par un entier, vues comme écritures symboliques décrivant la mesure de l'aire de surfaces construites ou à construire.

## II ANALYSE DE L'ACTIVITE.

Nous ne revenons pas sur les concepts mathématiques en jeu dans cette suite d'activités. Notons seulement la mise en réseau possible des connaissances : les fractions comme mesures de grandeurs que les entiers ne suffisent plus à coder, la symétrie centrale comme outil de résolution d'un problème de partage...

A Quels concepts didactiques peuvent être illustrés par cette suite d'activités ?

- La **notion de problème** (non numérique, construire une ligne de partage qui « marche ») et ces divers caractères : l'entrée facile dans la tâche, la représentation possible de la tâche finie, la consistance du problème, la possibilité de contrôle des productions, la différenciation naturelle par le choix de la complexité de la ligne de partage.....
- La symétrie centrale est ici un outil de résolution qui n'a pas besoin d'être explicité pour fonctionner mais qui est nécessaire à la résolution du problème : la situation est donc une **situation a-didactique** de la symétrie centrale.
- La situation est **didactique par rapport à l'aire** : c'est l'intervention du professeur qui nomme et définit a posteriori le critère de classement effectif comme « avoir même aire »

B Autres mises au point possibles avec les PE

- Le rôle de l'erreur : l'erreur ici se caractérise par une production erronée : elle est visible et il est intéressant de l'analyser pour en tirer des conséquences sur la prochaine ligne avant de brutalement la détruire.
- Le rôle du matériel : certes il existe cette manipulation si chère aux enseignants débutants (et si souvent vide de sens), mais ce n'est pas elle qui donne la solution, elle n'est qu'agent de la production ; les productions s'affinent grâce à l'analyse des productions erronées.
- Le démarrage d'une progression passe par la construction d'une expérience forte commune, certes mangeuse de temps, mais réellement constructive, surtout si

[3] Voir pour des détails le scénario décrit dans l'annexe 1.

elle est déclinée sur plusieurs séances, avec conservation de la mémoire des séances antérieures et rappel de ce qu'elle a permis de dégager.

C Autres remarques sur le déroulement de l'activité dans l'atelier

L'exigence de formulation des conditions sur la ligne de partage a montré un fonctionnement du savoir mathématique en acte : une première formulation a laissé possible des « monstres » au sens de Lakatos ; les formulations successives les ont progressivement exclus. Cette phase correspond à une **phase de formulation,** au sens de Brousseau. Alors que la recherche effective de lignes de partage correspondait à une **phase d'action**. Ces deux notions ne sont pas, à notre avis , très accessibles aux PE en formation initiale.

## III QUELS TYPES DE SITUATIONS POUR LA FORMATION DES PE (FORMATION INITALE)

Nous souhaitons d'abord présenter une alternative à l'entraînement systématique aux épreuves de concours en formation PE1 : si les PE1 souffrent d'un déficit de connaissances mathématiques dans certains domaines, il est certes important de les combler ces déficits, mais visons plutôt une réorganisation des connaissances et une mise en réseau de fragments disparates qui subsistent après leur scolarité, en leur proposant de véritables problèmes qui les amènent à retrouver le caractère outil de savoirs qu'ils n'ont souvent appris que sous leur aspect objet. Loin de nous la présomption de déclarer que ce mode d'approche peut s'appliquer à tous les savoirs mathématiques, mais il est assez souvent possible pour les savoirs nécessaires à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire.

D'autre part la compréhension des concepts didactiques ne peut se suffire d'un exposé ex cathedra : profitons de la demande en notions mathématiques de la part des étudiants pour leur faire apprécier, via des situations particulièrement bien construites, les progrès réalisés en didactique des mathématiques.

Enfin en formation plus professionnelle, à l'heure actuelle la deuxième année d'IUFM ou la formation continue, nous souhaitons illustrer nos propos liés au constructivisme et aux théories qui l'enrichissent par des situations effectives transférables dans les classes moyennant les adaptations nécessaires. Il n'est bien sûr pas garanti que le transfert se fera (voir thèse de D.Vergnes) mais il aura été néanmoins préparé.

Cela nous renvoie sur une typologie des stratégies de formation qui a été initiée par A.Kuzniak (1994) , et poursuivie par C.Houdement (annexe 2)

La discussion avec les participants a fait émerger certaines inquiétudes auxquelles nous avons répondu de la manière suivante.

- Il existe plusieurs stratégies possibles de formation, à nous de trouver un dynamique positive.
- Un bachotage systématique en PE1 n'est à notre avis pas souhaitable (encore moins avec l'extension des prélèvements sur les listes complémentaires vers le terrain), un des objectifs essentiel de la formation est aussi de transformer le rapport au savoir mathématique de plusieurs étudiants.
- Ce type d'activités alterne avec des entraînements sur des épreuves de concours (mais hors classe) ; de nombreux étudiants prennent ainsi conscience, en classe, de leurs capacités à résoudre des problèmes, même si le formalisme usuel des textes de concours les bloque encore.
- L'approche par homologie suivie de transposition n'est pas possible pour toutes les notions mathématiques, il est nécessaire de disposer ou de construire des situations adaptées en fonction des notions étudiées. La situation présentée ici bénéficie de plus d'une transposition en classe de CM, ce qui accroît sa crédibilité (brochure IREM de Rouen : « la machine à partager »).
- L'utilisation en formation continue est plus délicate, elle permet cependant d'une part de réactiver le regard sur les aires et de le détacher du versus mesure, d'autre part d'engager les maîtres eux mêmes, quel que soit le niveau de leur classe (et leurs connaissances mathématiques), dans une discussion liée à une résolution de problème. Elle permet donc d'illustrer des aspects fondamentaux de l'enseignement des mathématiques tout en permettant aux maître de livrer leurs points de vue, de les confronter et éventuellement de les modifier.

## REFERENCES


BROUSSEAU (1970-1990) *Théorie des situations didactiques.* Grenoble : la Pensée Sauvage

BUTLEN D. et PELTIER M. L. (1994) *Enseigner la didactique des mathématiques en formation des professeurs d'école.* Document de travail n°9 pour la formation des enseignants, IREM de PARIS 7.Université de PARIS VII

HOUDEMENT C (1998) *Stratégies de formation des maîtres du premier degré en mathématiques* dans *Actes du colloque des professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres,* COPIRELEM Tarbes.

HOUDEMENT C., PELTIER M.L. (1992) *Aires de surfaces planes* dans Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques, C.O.P.I.R.E.L.E.M tome 2 Pau , I.R.E.M. de Bordeaux.

HOUDEMENT C., PELTIER M.L. (1992) *La boîte du pâtissier. Former des professeurs d'école en mathématiques.* Brochure de l'I.R.E.M. de Rouen.

HOUDEMENT C., PELTIER M.L. (1994) *La machine à partager. Fractions et décimaux au cours moyen.* Brochure de l'I.R.E.M. de Rouen.

HOUDEMENT C. et KUZNIAK A. (1996) Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques dans *Recherches en Didactique des Mathématiques*, volume 16/3, pages 289-322. Grenoble : La Pensée Sauvage

LAKATOS I. (1984 v.f) Preuves et réfutations. Paris : Hermann.

VERGNES (1998) Essai d'analyse des effets d'un stage de formation continue sur les pratiques d'enseignant du premier degré. *Actes du XXV colloque COPIRELEM de Loctudy.*

# ANNEXE 1 : EXEMPLE D'UNE PROGRESSION SUR GRANDEURS ET MESURES EN FOCALISANT SUR L'AIRE.

Ce travail est extrait de la thèse de C.HOUDEMENT[4] (1995) Il est nécessairement lié à l'état des recherches, le profil et le mode de recrutement des étudiants futurs professeurs des écoles et le point de vue de l'auteur de l'époque.

Il nous semble cependant pouvoir fournir une base de travail pour de nouveaux formateurs.

La description de la progression dans la thèse avait pour objectif :

- d'illustrer des stratégies de formation : stratégies culturelles, stratégies d'homologie, stratégies de transposition, définies par A.KUZNIAK[5] dans son travail de thèse de 1994 ;
- de donner un exemple de traitement d'un thème mathématique en formation initiale de futurs professeurs des écoles.

## PLAN GENERAL DE LA PROGRESSION

| Etape | Thème | Stratégie | Prévision |
|---|---|---|---|
| Etape 1 | Construction de la grandeur aire, par fabrication de surfaces de même aire, matérialisées par des morceaux de papier. Rangement des surfaces selon l'aire.□ | Homologie directe, avec éléments de transposition. | 2 heures<br>Séance 1 |
| Etape 2 | Passage à la mesure sur les classes d'équivalence définies précédemment et représentées par des surfaces. Notion d'étalon et d'unité. Introduction du codage fractionnaire.□ | Culturelle pédagogique (la suite des activités est racontée) | |
| Etape 3 | Comparaison d'aires de surfaces ou de classes de surfaces :<br>- transformation conservant l'aire permettent de comparer des surfaces de formes plus comparables ;<br>- utilisation d'un pavage commun aux deux surfaces à comparer : réinvestissement de l'étalon.<br>Différenciation aire périmètre.□ | Homologie indirecte, avec éléments de transposition. | 2 heures<br>Séance 2 |
| Etape 4 | Les unités conventionnelles d'aire. Le système international des poids et mesures. | Culturelle pédagogique et sociale | |
| Etape 5 | Construction d'un formulaire sur les aires des triangles et quadrilatères usuels. Le cas du disque.□ | Homologie indirecte (ou directe concentrée) | 2 heures<br>Séance 3 |

[4] *Projets de formation des maîtres du premier degré en mathématiques : programmation et stratégies.* Disponible à l'IREM de Paris 7 ; de même que .

[5] *Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| Etape 6 | Réinvestissement mathématique :exercices sur les aires, le théorème de Pythagore, les égalités remarquables, un exemple de changement de cadre, l'importance historique du cadre de la mesure des aires, de la mesure en général. | Culturelle mathématique Transposition | 2 heures Séance 4 |
| Etape 7 | Analyse didactique globale de la progression, éléments sur grandeurs mesurables et repérables, compléments sur volumes. | Transposition | |
| Etape 8 | Réinvestissement didactique : étude comparée de premières leçons sur les aires. | Transposition | 2 heures Séance 5 |

# PREMIERE SEANCE

## A. OBJECTIFS

### OBJECTIFS MATHEMATIQUES

- construire le concept d'aire
- comparer des aires de surfaces sans recourir à la mesure
- construire la mesure ; différencier grandeur et mesure

### OBJECTIFS DIDACTIQUES

- différencier les statuts outil et objet des savoirs mathématiques et leur rôle dans l'apprentissage (cas de la symétrie centrale) ;
- comprendre l'apprentissage d'une notion comme résolution d'un problème dont les contraintes rendent nécessaires (les nombres non entiers) ou opportunes (la grandeur aire) la notion ;
- proposer au vécu et à l'analyse des exemples de situations d'enseignement relativement à l'enseignement de l'aire et des fractions.

## B. CHOIX DE LA SITUATION

Elle a été mise au point pour la formation[6], et peut aussi fonctionner dans des classes de CM[7] (en partie) et en formation professionnelle. Elle se place après un certain temps de formation, peut-être même en conclusion d'un certain temps de formation.

La tâche liée à la situation est la production de surfaces de même aire,

- d'abord par la recherche d'une ligne de partage qui partage un rectangle fixé en deux surfaces isométriques d'aire égale à la moitié de celle du rectangle : ce qui permet de proposer deux définitions de "avoir même aire" : deux surfaces ont même aire si elles sont exactement superposables ; deux surfaces ont même aire si elles représentent la même quantité de papier (sans avoir la même forme) ;
- puis par des découpages et des recollements...licites.

Nous allons préciser ses avantages à nos yeux.

**1 - Sur sa pertinence professionnelle**

Nous avons eu l'occasion de la mettre en place dans des classes de CM, où donc nous avons relevé des éléments qui confortaient a fortiori notre analyse a priori. Les expérimentations successives nous ont aussi permis de constater des analogies entre les stratégies et les productions des classes élémentaires et celles d'adultes en formation, globalement non scientifiques.

---

[6] C.Houdement, M.L Peltier,(1992), *La Boîte du Pâtissier*, pp 45-52, IREM de Rouen
ou C.Houdement, M.LPeltier, "Aires de surfaces planes", pp59-64, in *Documents pour la formation en mathématiques*, COPIRELEM (1992),IREM de Bordeaux

[7] C.Houdement, M.LPeltier (1994), *La machine à partager. Fractions et décimaux au CM*, pages 25 à 45, IREM de Rouen.

Les productions des élèves ont été certaines années montrées aux stagiaires pour les convaincre de la faisabilité de la situation (utilisation en quelque sorte d'un effet de monstration).

Remarque sur l'importance du public

La même situation menée en formation continue de professeurs de mathématiques de collège, pourtant prêts à se mettre à la tâche, comme point de départ à une réflexion sur l'activité mathématique, n'a pas été aussi efficace pour une réflexion sur les mathématiques et leur enseignement, en partie parce que certains ont préféré "sécher" plutôt que d'avoir recours à des manipulations comme les élèves : ils n'ont pu faire une analyse a priori convaincante.

**2 - Sur la conception des mathématiques et de la recherche**

Elle offre, nous semble-t-il, les caractéristiques d'une situation de recherche : l'élève peut s'engager dans le problème, ses connaissances sont insuffisantes pour qu'il trouve immédiatement toutes les solutions, il peut lui-même valider ou invalider ses propositions. La résolution du problème lui permet :

- d'utiliser en acte, comme outil de résolution, la notion de symétrie centrale[5] (plus précisément celle d'invariance par symétrie centrale pour une courbe) ;
- de classer des surfaces selon un critère à détacher du sensible : le maître institutionnalise le critère de classement sous le nom d'aire.

La recherche elle-même nous semble consistante sur le plan du raisonnement, mais c'est le processus constitutif du produit de la recherche qui constitue l'objectif d'apprentissage du maître (ou du formateur). Il y a place à l'imagination, les élèves cherchant à produire des surfaces de formes très différentes ou très sophistiquées.

**3 - Sur le statut des connaissances mathématiques**

- La notion de symétrie centrale[8] apparaît comme outil dans cette recherche, outil dont il n'est pas nécessaire de connaître le nom, ni les caractéristiques, pour le rendre localement et dynamiquement opérationnel.

- La grandeur aire est caractérisée comme **critère commun** à des objets différents pour nos sens (pas nécessairement de même forme, quelquefois même de formes très "éloignées") ; elle **se définit** (autre exemple d'une définition que celle habituellement connue) par la relation "avoir même aire" ; la différenciation entre classe et élément d'une classe se visualise, la notion de représentant d'une classe (pour le critère aire) prend du sens.

Le formateur peut pointer les différences entre les **objets physiques** (les feuilles de bottin avec leur épaisseur), les **objets mathématiques** qui les modélisent dans la situation (les surfaces, parties bornées du plan), la **grandeur** (ici

[8] En effet les deux surfaces à construire étant isométriques et leur juxtaposition constituant le rectangle, l'isométrie les transformant l'une en l'autre conserve le rectangle : elle est donc soit symétrie axiale par rapport à une médiane du rectangle (droite joignant les milieux des côtés opposés), soit symétrie centrale par rapport au centre du rectangle (point de rencontre des diagonales). La ligne de partage doit être aussi globalement invariante par l'isométrie qui transforme la première surface en la deuxième, elle doit donc être une médiane du rectangle ou une courbe passant par le centre du rectangle et admettant ce centre comme centre de symétrie. Une courbe passant par le centre et admettant le centre du rectangle comme centre de symétrie convient donc (si elle part d'un bord et n'a pas de point mutiple)

l'aire définie par les classes de surfaces de même aire) et la **mesure** (l'application entre une classe de surfaces de même aire et l'ensemble des nombres réels), qui n'est pas utile dans un premier temps.

C'est l'occasion d'illustrer les notions piagétiennes de classement-sériation, dont nos étudiants n'ont pas manqué d'entendre parler dans d'autres cours.

- Les fractions sont introduites dans la nécessité (provoquée par les contraintes de la situation) d'utiliser de nouvelles écritures (dont le maître est garant culturellement). Ce codage reste proche des actions sur les objets, ce qui contribue à leur donner du sens.

**4 - Sur la pertinence des outils didactiques**

Les notions de phases d'une recherche (action, formulation, validation, réinvestissement) peuvent être éclairées par l'explicitation a posteriori du déroulement choisi par le formateur. Le rôle de chacune peut ainsi être précisé.

- Le statut outil de la connaissance symétrie centrale peut être particulièrement illustré par cette situation ; les fractions apparaissent elles aussi comme outils de codage des nouvelles classes. C'est l'occasion de préciser le concept de dialectique outil-objet et son rôle dans le fonctionnement des connaissances.

- La non linéarité possible des stratégies d'enseignement peut aussi être pointée ici : le fait que cette situation permette simultanément de pointer d'autres savoirs que la grandeur visée (en l'occurrence symétrie centrale et nombres rationnels) n'est pas perturbatrice dans le déroulement prévu par le formateur. La non linéarité peut être organisée par la mise en situation. C'est un exemple de sensibilisation parallèle sur des thèmes qui s'éloignent de l'objectif principal.

- La notion de conception a priori, le retour des conceptions d'origine en cas de déstabilisation : les étudiants, comme les élèves, constatent la contradiction entre leur appréhension sensible de l'aire et l'étude raisonnée : des surfaces de formes différentes n'ont pas la même aire, des surfaces de même aire ont le même périmètre. A tout moment, du moins au début, ils se sentent soumis à l'attirance du sensible. Ce qui permet de rappeler l'importance de la prise en compte des conceptions des apprenants pour les intégrer au maximum dans le projet d'apprentissage.

## C. ORGANISATION DE LA SEANCE

*Matériel*

Feuilles entières (format A4) d'annuaire téléphonique en grand nombre.

Ciseaux, matériel usuel de géométrie.

*Organisation de la classe*

Groupes de quatre pour une meilleure disponibilité du matériel et un échange sur les premières réalisations. Le travail est cependant individuel.

DEROULEMENT DE L'ETAPE 1

ASPECTS MATHEMATIQUES

*Principe*

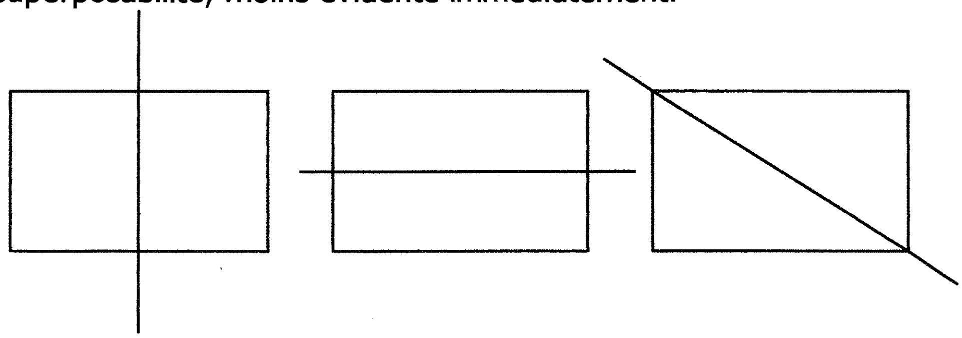
Le déroulement des séances est prévu en fonction des objectifs mathématiques. Les objectifs didactiques seront plus spécifiquement travaillés lors de l'analyse de l'activité.

*Consigne 1*

"Vous devez partager chaque feuille en deux parties exactement superposables sans perte et sans recollage (c'est à dire qu'avec les deux parties il sera possible de reconstituer la feuille initiale) ; vous devez chercher un maximum de partages différents répondant à cette consigne de partage que nous désignerons par (P)".

*Analyse de la tâche*

Deux solutions évidentes se présentent naturellement aux étudiants, les partages suivant une des médianes (droites joignant les milieux des côtés opposés) du rectangle de départ. Le partage par la diagonale nécessite un retournement de l'une des parties pour vérifier la superposabilité, ce qui leur fournit une autre forme de superposabilité, moins évidente immédiatement.



La disposition en groupes permet de prendre des indices sans qu'ils soient formulés (ce qui serait trop précoce) sur des partages possibles remarqués chez les voisins.

Un temps suffisant de recherche est indispensable à la production de solutions moins classiques (lignes de partage brisées ou mêlant arcs de courbe et segments de droite).

Les étudiants peuvent à tout moment contrôler leurs productions et éliminer celles qui ne conviennent pas.

*Procédures observées*

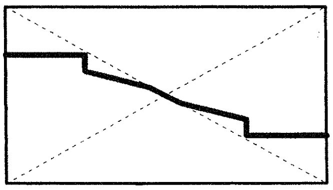
- Les étudiants commencent par plier en deux suivant les médianes, puis les diagonales du rectangle. En général à ce moment, certains pensent qu'ils ont trouvé tous les partages possibles, il est alors nécessaire de redonner la consigne en précisant qu'ils doivent essayer d'en trouver d'autres.

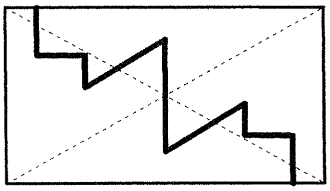
- La procédure suivante consiste à plier la feuille de telle sorte que deux sommets diamétralement opposés se superposent. Ce partage permet généralement à l'idée qu'il existe un nombre infini de solutions de se répandre, la ligne de partage étant une droite passant par le centre du rectangle. La consigne évolue alors vers la caractérisation de "bonnes lignes de partage".

Les autres procédures que l'on rencontre sont les suivantes:

- des pliages en 8 ou 16, suivis de dépliages et découpages en suivant certaines lignes de pliage plus ou moins bien choisies (d'où des réussites ou des échecs!) ;

- des recherches en construisant des segments de même longueur en partant de deux sommets diagonalement opposés ;
- des procédures de construction d'une ligne de partage symétrique par rapport à une médiane, qui évoluent (à cause de l'échec de ces procédures) vers la construction d'une ligne de partage symétrique par rapport au centre de la feuille.





*Remarque*

On peut constater de très nombreux essais qui n'aboutissent pas ; mais ces essais permettent à leurs auteurs de faire de nouvelles hypothèses sur les propriétés de la ligne de partage. De nombreux étudiants trouvent assez vite comment construire une ligne de partage polygonale qui permet de résoudre le problème, et en faisant des tracés symétriques de part et d'autre du centre de la feuille ; puis certains cherchent des lignes de partage curvilignes à main levée ou en traçant des arcs de cercles.

*Synthèse*

Le formateur circule et ramasse certaines des moitiés de feuilles qui conviennent selon les affirmations des étudiants. Il les dispose sur une grande affiche placée sur le mur de la classe. L'ensemble de la classe examine les productions, tout étudiant sceptique sur la validité d'une production peut demander la vérification, auquel cas l'étudiant qui dispose de la moitié superposable vient la comparer à celle du tableau et reformer la feuille entière.

Une courte synthèse, sans intervention du formateur, est faite sur les méthodes de partage qui marchent : certaines propriétés de l'invariance d'une courbe par symétrie centrale sont explicitées par les étudiants pour définir la ligne de partage.

*Institutionnalisation*

- Les deux parties issues d'un partage (P) sont **superposables**, elles ont donc même forme et même périmètre.
- Deux parties issues de deux partages (P) différents ne sont pas directement superposables, pourtant elles vérifient toutes les deux la propriété : *"avec deux parties analogues à chacune d'elles, on peut reconstituer la feuille entière"* ; elles sont donc aussi "étendues" l'une que l'autre, elles contiennent la même quantité de papier, elles correspondent toujours à "une demi-feuille", on dit qu'elles ont **même aire**.
- Deux surfaces de **même aire** n'ont pas nécessairement la **même forme**.
- Deux surfaces de **même aire** n'ont pas nécessairement le **même périmètre**.
- Deux surfaces **superposables** ont **même aire**, **même forme**, même périmètre.

*Explicitation didactique*

Aucun titre n'avait été donné préalablement à cette séance, nous pouvons maintenant annoncer aux étudiants qu'il s'agit d'une première situation visant à l'enseignement des aires, permettant de renforcer leurs connaissances sur ce thème et de leur donner des illustrations d'activités possibles dans des CM.

Ainsi cette première situation peut être menée de cette façon dans un CM, avec le même découpage des étapes.

Puis nous explicitons le principe de formation sur ce thème des aires et de leur mesure : mettre en situation les étudiants, en donnant donc des exemples de gestion de classe, sur certains problèmes liés aux aires, ces problèmes étant ordonnés selon la progression liée à l'apprentissage d'une grandeur, et en leur précisant dans quelle mesure ces problèmes sont transférables dans un CM.

*Consigne 2*

"Appliquez la consigne de partage (P) mais cette fois-ci en partant d'une demi-feuille de bottin de forme rectangulaire."

*Analyse de la tâche*

Cette consigne permet un réinvestissement des propriétés de la ligne de partage et une utilisation en acte plus fine des propriétés liées à la symétrie centrale. Elle laisse libre cours à l'imagination et donne des productions très esthétiques. Elle permet de s'approprier pleinement le problème.

*Synthèse et institutionnalisation*

La séance se poursuit comme précédemment, la synthèse permettant de créer une nouvelle famille de surfaces, qui n'ont pas la même aire que les précédentes, de préciser et de nommer ce qui caractérise la bonne ligne de partage. L'institutionnalisation mathématique se fait alors avec les étudiants sur la symétrie centrale, et les courbes admettant un centre de symétrie.

ANALYSE DE L'ETAPE 1 AVEC LES ETUDIANTS

*Principe*

Dans une deuxième partie, nous demandons aux étudiants de faire un pas de côté par rapport à la situation qu'ils ont vécue : ils doivent se considérer comme enseignants maîtres titulaires auxquels le formateur explique ses choix, montre comment il a évalué leurs réactions a priori, en a tenu compte dans le déroulement, etc. Nous leur demandons un effet de décentration et de distanciation.

Il s'agit donc d'analyser l'activité des étudiants et la conception de la séance, sachant qu'elle est également une proposition de séance pour un CM. Les raisons qui nous ont fait choisir cette situation (cf. au début) sont explicitées aux étudiants sous forme d'un court exposé, animé par quelques questions. Résumons-les.

*Analyse mathématique*

Cette première étape permet de définir la grandeur aire, par la définition en acte d'une relation d'équivalence sur un ensemble de surfaces (non matérialisées au départ), la relation "avoir même aire" et la construction des classes d'équivalence de surfaces de même aire. La notion d'aire existe indépendamment du nombre.

*Analyse didactique*

La situation proposée est un exemple de situation de recherche. Elle débute par une phase d'action, qui joue un rôle important dans l'émission d'hypothèses sur la ligne de partage et permet l'invalidation de l'hypothèse. La situation permet un contrôle interne des productions. Une phase de formulation intervient au moment de la synthèse pour caractériser la ligne de partage (sur la notion d'existence de centre de symétrie) et au moment du codage numérique des classes de surfaces (sur le codage fractionnaire).

Le choix de la situation contribue à sensibiliser à l'existence d'un critère commun (l'aire) à des objets sensiblement différents, et permet de définir cette notion, par la production d'objets ayant la même aire et d'objets n'ayant pas la même aire (principe classificatoire).

On rencontre différents statuts de savoir : outil pour la symétrie centrale, savoir objet pour l'aire dans l'institutionnalisation, codage outil pour les fractions.

*Conséquence pour la classe*

Cette troisième partie de l'analyse permet de distinguer l'analyse de l'activité qu'ont vécue les étudiants de celle, a priori, de l'activité ressemblante qui serait envisageable pour un CM. L'analyse ici consiste à informer les étudiants que la situation étudiée peut être mise en place dans un CM, avec comme objectif une introduction de l'aire et globalement la même gestion de classe. C'est l'exemple d'une situation riche de démarrage sur la notion d'aire, comme le montre la suite.

Bien entendu des activités de réinvestissement sont souhaitables, dont voici les consignes possibles, mais elles feraient dans une classe de CM l'objet de séances disjointes. Nous prévenons les étudiants que ces aspects plus pédagogiques seront repris plus tard.

## DEROULEMENT DE L'ETAPE 2

### ASPECTS MATHEMATIQUES

La finalité de cette étape est de fonder de nouvelles familles de surfaces de même aire et d'inventer des procédés de comparaison d'aires de surfaces.

*Consigne 3*

"Réitérez le partage (P) mais à partir d'un quart de feuille de forme rectangulaire."

*Consigne 4* (menée avec les étudiants dans la suite pour qu'ils puissent utiliser leurs morceaux restants)

"Fabriquez des surfaces de même aire que la feuille entière"

*Procédures observées*

- Utiliser des morceaux déjà tout prêts en vérifiant la concordance avec la feuille entière : deux demi-feuilles ou une demi-feuille et deux quarts de feuille ou....
- Découper une feuille entière de bottin et assembler différemment tous les morceaux.

*Synthèse et institutionnalisation*

L'activité a permis de mettre en œuvre de nouveaux moyens de fabriquer des surfaces de même aire que celle donnée :

- assembler des morceaux de cette surface, d'aires connues par rapport à cette surface ;
- découper et rassembler sans perte la surface de départ.

L'aire est donc une grandeur qui intègre une addition (principe d'additivité de la grandeur aire) ; si on découpe une surface et assemble différemment les morceaux, la nouvelle surface obtenue a même aire que l'ancienne (principe de conservation des aires).

*Consigne 5*

"Fabriquez par groupe deux ou trois surfaces de même aire qui ne peuvent pas s'intégrer aux familles du tableau"

Le formateur récolte les surfaces, les installe sur des affiches et demande aux étudiants de ranger toutes les surfaces selon leur aire.

*Analyse de la tâche*

Les étudiants disposent de leurs morceaux antérieurs pour créer des assemblages ayant des aires non encore répertoriées. Ils peuvent recourir à un codage des surfaces (des familles) et utiliser ce codage pour les comparaisons. Mais ils peuvent aussi se référer à des surfaces de référence de chaque famille (un représentant de la famille) plus aisément comparables entre elles. Une référence pratique, induite par le processus de partage de départ, est un rectangle, la tâche est grandement facilitée si les deux rectangles à comparer ont une dimension commune.

*Procédures observées*

Un recours aux nombres pour les uns (en particulier aux fractions) ; une comparaison deux à deux pour les autres avec une référence à la feuille entière quand c'est possible, ou la construction de rectangles, approximativement de même aire, pour départager.

*Synthèse*

Elle se fait sur la possibilité et les moyens de changer la forme d'une surface tout en conservant l'aire, pour pouvoir la comparer avec une autre surface relativement à l'aire. Elle pointe la nécessité latente d'un codage des différentes familles pour en parler.

D'où l'exploitation signalée à l'école de cette situation.

PROLONGEMENT PEDAGOGIQUE AU CM

L'étape 2 fournit l'exemple de situations pour le CM. Cependant le temps imparti aux élèves est plus long, et l'étape 2 fait l'objet d'une deuxième séance. La fabrication d'autres familles de surfaces donneront lieu à d'autres séances.

Simultanément au travail sur l'aire et en cours d'activité, la nécessité d'un codage des familles se fait sentir. Le maître induit alors l'idée d'un codage numérique, qu'il applique à la famille de la feuille entière : 1 ou 1 unité. Il en déduit avec les élèves les codages numériques associés aux autres familles.

La famille demi-feuille reçoit naturellement le codage "un demi" que les enfants écrivent rarement sous la forme $\frac{1}{2}$, mais que le maître institutionnalise de cette façon.

$\frac{1}{2}$ a immédiatement un sens lié à la situation : $\frac{1}{2}$ c'est 1 partagé en 2, $\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$.., $2 \times \frac{1}{2} = 1$

Le maître associe des égalités d'écritures fractionnaires aux types d'assemblages.

Cette situation permet donc aussi de donner du sens aux fractions et d'introduire (ou de réinvestir) des nombres non entiers.

Le maître déduit avec les élèves les propriétés des nombres codant les autres aires et introduit le codage fractionnaire approprié et les écritures qui éclairent son sens.

Les aires supérieures à l'unité reçoivent des codages sous forme d'écritures additives, du type $1 + \frac{1}{2}$ ou $1 + \frac{1}{4}$ que les assemblages constitués peuvent aider à écrire sous forme d'une seule fraction (avec les exemples $\frac{3}{2}$ et $\frac{5}{4}$).

ANALYSE DE L'ETAPE (et de ses prolongements)

Comme pour la première étape, nous annonçons aux étudiants un pas de côté, en les considérant nous plus comme élèves, mais comme enseignants, que nous essayons de convaincre de l'intérêt de cette séance. Ils ont bien sûr tout loisir d'intervenir pour contester ou préciser leur état de réflexion pendant l'activité.

*Analyse mathématique*

La construction d'un codage numérique dans les conditions précédentes correspond à une mesure, la construction d'une application de l'ensemble quotient des classes de surfaces dans l'ensemble des nombres réels telle que :

- la grandeur correspondante est mesurable (l'additivité fonctionne pour cette grandeur) ;
- l'application est positive, additive et monotone (à plus grande aire, plus grand nombre),
- elle est parfaitement déterminée par le choix d'une unité (ici l'aire de la classe de la feuille A4, qui s'appelle alors étalon),
- elle vérifie les propriétés suivantes : l'inégalité triangulaire, le vide a une aire nulle, il existe des ensembles de points non vides d'aire nulle (les segments), elle est invariante par isométrie.

La notion de grandeur existe indépendamment de celle de mesure.

*Quelques compléments mathématiques sur la mesure* (qui trouvent souvent leur place en deuxième séance seulement)

Si l'étalon change, les nombres associés aux aires changent mais les aires restent les mêmes, c'est-à-dire les classes de surfaces sont invariantes.

| Familles Etalon | demi-feuille | quart de feuille | demi-quart de feuille | feuille entière | feuille plus quart de feuille |
|---|---|---|---|---|---|
| feuille entière | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | 1 | $\frac{5}{4}$ |
| demi-feuille | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | 2 | $\frac{5}{2}$ |
| huitième de feuille | 4 | 2 | 1 | 8 | 10 |
| une feuille un quart | $\frac{4}{10}$ | $\frac{2}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{8}{10}$ | 1 |

La liste de nombres correspondant à un étalon est proportionnelle à celle correspondant à un autre étalon ; ainsi la deuxième ligne s'obtient en divisant par deux la première, la troisième en multipliant par deux la première, par quatre la seconde, etc.

En résumé, le changement d'unités fait passer d'une liste de nombres mesurant les aires à une liste de nombres proportionnels. Le changement d'unités de mesure (c'est vrai pour toutes les mesures) est donc en réseau avec la proportionnalité.

*Analyse didactique*

La situation de départ, si elle est dans la progression pour les étudiants utilisée pour des compléments mathématiques sur l'aire, permet aussi d'éclairer la notion de fraction et de montrer la nécessité de codages numériques représentant des quantités inférieures à l'unité.

En classe elle est située à un carrefour des progressions sur les aires et sur les nombres autres qu'entiers. Elle donne l'exemple de la complexité de la connaissance mathématique et des imbrications des savoirs à l'intérieur d'une situation. Sa multiplicité ne doit pas effrayer, au contraire, puisqu'elle permet d'introduire relativement naturellement des notions difficiles.

L'étude de deux notions mathématiques nouvelles n'est aucunement en contradiction avec les hypothèses sur la construction des connaissances, bien au contraire.

La situation proposée fournit un exemple d'introduction de nouvelles notions mathématiques par la gestion des contraintes sur lesquelles peut agir le maître.

*Variable didactique*

Le choix de la famille étalon est une variable didactique, dans la mesure où ce choix peut nécessiter ou non, à ce moment, des nombres plus petits que 1 ; si le maître porte son choix sur par exemple la classe huitième de feuille entière, dans la mesure où des représentants de cette classe existent, toutes les autres aires de la séance se codent par des entiers.

## D. ANALYSE DE LA SEANCE

### SUR L'EVOLUTION DES COMPETENCES MATHEMATIQUES DES ETUDIANTS

Déboussolés au départ par la simplicité de la consigne et craignant d'avoir été sous-estimés, les étudiants s'investissent ensuite dans la réalisation de surfaces de formes diverses. Ils manifestent les mêmes réactions que les élèves, aussi bien dans l'évolution de leurs recherches que dans leur désir de se faire reconnaître, proposant leurs productions au formateur.

Leurs souvenirs de la symétrie se manifestent d'abord par référence à la symétrie axiale, qu'ils ne différencient pas dans un premier temps de la transformation qui rend invariante la ligne de partage. Cette situation permet donc à notre sens de bien différencier ces deux transformations (et simultanément de justifier en quelque sorte l'analogie de leurs noms, malgré la différence de leurs propriétés).

Ils sont bien sûr surpris de découvrir que les conclusions sur les périmètres ne peuvent se transférer si simplement aux aires ; ils résistent à cette nouvelle connaissance, comme nous le verrons dans l'étape correspondant à la construction du formulaire sur les surfaces. Ce qui nous permet de pointer, en acte, la résistance des vieilles conceptions face aux nouvelles connaissances et la nécessité de sans cesse mettre à l'épreuve ces connaissances construites contre un obstacle.

Globalement nous trouvons ces situations utiles aux étudiants, dans la mesure où nous "sentons" s'opérer progressivement, et avec les reculs locaux incontournables, une restructuration des connaissances sur les aires : le pourcentage d'étudiants affirmant que deux surfaces n'ont pas la même aire parce qu'elles n'ont "pas du tout" la même forme diminue au fur et à mesure des vérifications ; les différences de périmètre pour des formes de même aire sont reconnues, sans être mises au compte d'erreurs de mesure ou d'approximations trop larges.

L'homologie semble là porter des fruits du côté du savoir mathématique, il est plus difficile d'évaluer, de plus à long terme, l'impact de la méthodologie de formation retenue sur ce thème. Il semblerait cependant que le plaisir de retrouver du sens au savoir, notamment de pouvoir s'expliquer des "mystères" sur les aires (notamment les formules) place cette progression en bonne place dans leur mémoire de futur enseignant.

### SUR L'EVOLUTION DE LEUR CONCEPTION DE L'ENSEIGNEMENT

Signalons que la vigilance du formateur doit être constamment en alerte : les étudiants trouvent cette situation intéressante pour leurs connaissances et acquiescent à la possibilité de la voir se réaliser dans une classe. Cependant dans leur brève analyse de ses avantages, ils sont parfois enclins à porter l'intérêt principalement au côté manipulatoire de l'activité : autrement dit ils semblent convaincus que les élèves devront découper et comparer pour aborder les aires, mais restent encore peu sensibles aux principes d'organisation générale des situations. La phase d'explicitation des choix du formateur et des hypothèses didactiques sous-jacentes (dans une stratégie de transposition), qui prouve aussi l'existence d'éléments théoriques qui délimitent ce travail, a donc, à notre avis, une importance capitale dans la communication des connaissances.

# DEUXIEME SEANCE

Suite aux contraintes de temps réel de la classe, des éléments de la première séance, notamment d'analyse, peuvent être gardés pour la deuxième séance qui a lieu une semaine plus tard. Les productions des étudiants collées sur des affiches permettent de conserver la mémoire de la classe et de pouvoir soit raconter l'histoire de la séance précédente, soit appuyer l'analyse sur cette évocation visuelle.

## A. OBJECTIFS

### OBJECTIFS MATHEMATIQUES

- Différencier aire et périmètre
- Inventer et utiliser des moyens de comparaison d'aires de surfaces
- Connaître le système international des unités d'aire
- Objectifs didactiques
- Pointer la notion d'obstacle épistémologique
- Montrer comment prendre en compte cette notion d'obstacle
- Montrer l'exemple d'une variable didactique pour les aires de surfaces planes : le papier support

### OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

Poursuivre la proposition de progression sur l'aire et sa mesure
Proposer l'utilisation d'affiches comme mémoire de la classe.

## B. CHOIX DE LA SITUATION

L'objectif mathématique essentiel étant la différentiation aire-périmètre, plusieurs situations de classe élémentaire sont connues, notamment la recherche de rectangles d'aire maximum à périmètre fixé ou de périmètre maximum à aire fixée[9], mais ces situations sont trop riches pour que le temps d'exploitation soit suffisant avec les étudiants. En effet pour minimiser les effets de dénaturation liés à une situation traitée avec les étudiants par une homologie directe, il nous semble

[9] R.Douady, M.J.Perrin-Glorian (1986), *Nombres décimaux*, IREM de Paris 7

souhaitable de l'envisager sous tous ces angles, pour pouvoir mettre en relation le temps-étudiants et le temps élèves. Nous avons donc préféré ne pas utiliser les situations citées comme support de formation, ne pouvant y consacrer le temps minimum que nous souhaitions (ou ne nous les étant pas suffisamment appropriées pour les "faire tenir" dans le temps dont nous disposions).

Elles fournissent par contre d'indispensables références pour l'étude de problèmes de différenciation aire -périmètre, auxquelles nous pouvons renvoyer les étudiants.

Nous choisissons donc une situation sur laquelle nous ne pouvons mettre en place qu'une homologie indirecte, ce qui devrait nous permettre d'atteindre les objectifs mathématiques visés, tout en restant dans la méthodologie de l'enseignement que nous préconisons, ce qui nous paraît indispensable pour des savoirs que les étudiants maîtrisent mal.

Simultanément cette situation leur permet de rencontrer un objet mathématique contemporain et "à la mode" et de traiter de l'extension des méthodes de comparaison d'aires par les contraintes de l'objet proposé.

## C. ORGANISATION DE LA SEANCE

*Matériel*

Une fiche photocopiée par élèves, comme ci-dessous.

Matériel de géométrie, calque à disposition.

*Organisation de la classe*

Travail individuel.

Une fiche comportant quatre figures nommées $S_0$, $S_1$, $S_2$, $S_3$ sans aucune indication :

* un carré (surface $S_0$)

* une figure $S_1$ transformée du carré selon le procédé décrit ci-après (passage de $S_n$ à $S_{n+1}$ par transformation d'un côté du polygone en ligne brisée de huit segments)

* la figure $S_2$ transformée de $S_1$

* la figure $S_3$ transformée de $S_2$

DEROULEMENT

ASPECTS MATHEMATIQUES

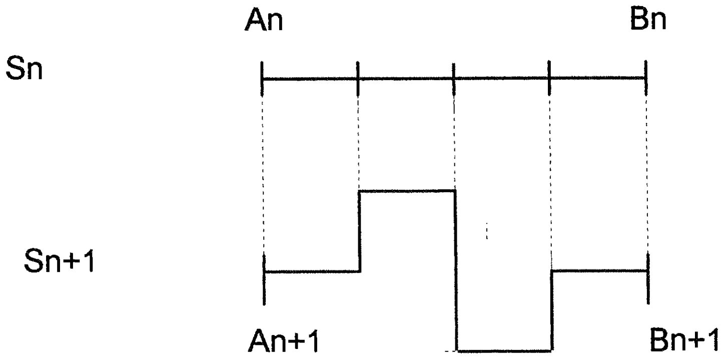
*Consigne*

"Vous avez sur votre feuille quatre surfaces $S_0$, $S_1$, $S_2$, $S_3$, aux détails de plus en plus complexes. Vous devez comparer les périmètres et les aires de ces surfaces."

*Analyse de la tâche*

Les différentes surfaces sont obtenues par un procédé récurrent :

pour passer de $S_n$ à $S_{n+1}$, il suffit de partager tout segment de droite limitant $S_n$ en quatre segments de même longueur et de remplacer une fois sur deux ce quart de segment par les trois quarts d'un carré de côté ce quart de segment.




Variation du périmètre de $S_n$ à $S_{n+1}$ : la longueur $l(A_nB_n)$ de la courbe $A_nB_n$ devient

$l(A_{n+1}B_{n+1}) = 2\, l(A_nB_n)$,

le périmètre de $S_{n+1}$ est donc le double de celui de $S_n$, donc $P(S_n) = 2^n\, P(S_0)$, par une récurrence immédiate.

Variation de l'aire de $S_n$ à $S_{n+1}$ : l'aire ne varie pas dans la transformation de $S_0$ à $S_1$, donc pas non plus dans celle de $S_1$ à $S_2$, donc $A(S_n) = A(S_0)$

Nous avons donc l'exemple de surfaces de périmètres différents et cependant de même aire. L'objet mathématique obtenu quand n tend vers l'infini se nomme une fractale : l'aire de cette fractale est celle du carré de départ, alors que son périmètre est infini. Par ce procédé de fabrication, il est donc possible de fabriquer une surface d'aire fixe, celle d'un carré de départ et de périmètre aussi grand que souhaité (du moins supérieur à n'importe quel nombre).

Pour comparer l'aire de $S_0$ et $S_1$, les étudiants peuvent retrouver dans $S_1$ le carré $S_0$ par exemple en utilisant un calque de $S_0$ posé sur $S_1$ et retrouver l'aire de $S_0$ par compensation : un carré placé à l'extérieur compensant un trou intérieur. Ils peuvent aussi paver les deux surfaces par des carrés d'aire 1/16 de celle du carré $S_0$.

Ces deux procédés peuvent s'étendre au carré $S_2$ obtenu par comparaison au carré $S_1$ ; mais la tâche est déjà plus difficile ; le passage de S2 à S3 nécessite l'étude plus en détail du processus de fabrication des surfaces.

*Procédures observées*

Les deux procédés précédents se rencontrent à peu près équitablement. Certains étudiants découpent $S_1$ pour faire un puzzle de $S_0$. Les conclusions de tous concordent : $S_0$ et $S_1$ ont la même aire, mais $S_1$ a un périmètre plus grand.

Seuls quelques étudiants très méticuleux mènent à bien le pavage de $S_2$ par des carrés d'aire 1/256 de $S_0$ ; les autres cherchent le mode de construction qu'ils voient globalement identique au passage de $S_0$ à $S_1$.

Dans un groupe, une huitaine d'étudiants sur 25 a cherché et trouvé le mode de construction.

*Synthèse*

Nous faisons expliciter les conclusions qu'elles soient incomplètes ou complètes, en gardant si possible sûr les plus complètes pour la fin, par exemple un étudiant communique le mode de construction de $S_n$ à $S_{n+1}$, nous parlons alors brièvement de fractales, dont généralement quelques étudiants ont entendu parler, et de son incidence sur la recherche actuelle en mathématiques et dans les disciplines.

*Institutionnalisation*

Nous soulignons les deux aspects mathématiques importants, liés à l'activité, que les étudiants doivent retenir au sujet des aires.

1 - Pour comparer l'aire de deux surfaces, deux méthodes rencontrées :

- ramener par une transformation conservant les aires l'une des surfaces à l'autre (méthode déjà rencontrée) ;
- trouver une surface constituant un pavé (permettant le pavage) pour les deux surfaces et comparer le nombre de pavés contenus dans chaque surface.

Le quadrillage joue ce rôle pour les surfaces dessinées sur papier quadrillé et transforme l'activité de comparaison d'aires en comptage de carreaux.

Ces deux méthodes de comparaison de mesure sont aussi valables pour les longueurs, comme nous avons pu le constater ici.

2 - Les grandeurs périmètre et aire sont indépendantes l'une de l'autre : il est possible d'augmenter infiniment le périmètre d'une surface sans changer son aire.

ANALYSE AVEC LES ETUDIANTS

La partie visant à préciser des savoirs mathématiques sur les aires étant terminée, nous les engageons à un recul par rapport à l'activité vécue, d'abord de type mathématique, puis didactique.

L'analyse mathématique porte sur l'explicitation des objets mathématiques et les conclusions mathématiques à tirer de cette recherche. Elle suit les grandes lignes suivantes.

"Voici un exemple de situation fabriquée à votre intention, pour simultanément vous mettre en contact avec un objet contemporain des mathématiques et vous convaincre de la différenciation aire-périmètre. Pour résoudre le problème posé, vous avez utilisé une nouvelle méthode pour comparer les aires de deux surfaces, le pavage par des pavés communs aux deux surfaces, ce qui enrichit le stock des méthodes de comparaison d'aires. Cette méthode de pavages joue un rôle particulier dans l'enseignement de la mesure des aires puisqu'elle permet notamment de transformer une question sur la grandeur aire en un comptage de pavés intérieurs à la surface. Cette méthode est également précieuse pour obtenir des encadrements de mesures d'aires : le nombre de carreaux intérieurs à une surface et le nombre de carreaux minimum couvrant la surface nous donnent les deux bornes d'un encadrement de la mesure de l'aire, aussi fin qu'on le souhaite (il suffit de choisir la taille des pavés du quadrillage).

Analyse didactique

Nous pointons les aspects didactiques pertinents de cette situation.

La situation choisie est l'exemple d'une situation qui permet aux étudiants de réinvestir des procédés déjà éprouvés (la comparaison par découpage et ré-assemblage pour retrouver une des deux surfaces de départ) ou de créer un nouveau moyen : le problème est donc réalisable par tous, la synthèse permet à tous de constater l'efficacité et simultanément les limites des deux méthodes (notamment quand le quadrillage ou le découpage devient trop fin). Seule la *contrainte* portée par le choix de l'objet amène à inventer de nouvelles méthodes de comparaison (notion de variable didactique liée au choix de l'objet).

Le support pour le dessin des surfaces proposées joue un rôle non négligeable : un support quadrillé, contrairement au papier uni, risque d'induire l'utilisation d'une seule méthode de comparaison d'aires, le support est ici une *variable didactique*, puisqu'il a une incidence sur les procédures utilisées. Pour les mesures d'aires en général, le support papier uni ou réseau de carrés, de triangles, etc. est une variable didactique.

La situation permet de produire des surfaces qui, bien que de même aire, ont des périmètres très différents : les étudiants agissent sur ces surfaces pour se les approprier, cette action devrait leur permettre une meilleure prise en compte de la différence périmètre-aire. La confusion entre ces deux grandeurs est courante et inévitable naturellement, elle constitue un *obstacle didactique,* les longueurs étant, dans le système scolaire, les premières grandeurs attachées aux objets géométriques. Cet obstacle doit donc spécifiquement être pris en compte dans l'enseignement, des actions qui mettent en défaut ces conceptions peuvent permettre de le reconnaître puis de le surmonter.

PROLONGEMENT PEDAGOGIQUE

Cette partie a pour but de préciser à l'étudiant pourquoi et en quoi le cours qu'il a suivi jusqu'à maintenant peut fournir un enrichissement de sa pratique de classe. Elle essaie de replacer les informations reçues dans le contexte de la préparation de classe du maître.

Une progression sur les aires se doit d'inclure des situations permettant aux élèves d'enrichir leurs méthodes de comparaison des aires et d'y intégrer le pavage ou l'utilisation d'un quadrillage qui permettra au moins d'obtenir une approximation du nombre de carreaux pavant la surface, approximation qui permet souvent de conclure dans des comparaisons d'aires.

Cet objectif (mesure d'aires par pavage) peut constituer l'étape 3 d'une progression sur les aires, dans la continuité des deux étapes de la séance précédente.

L'importance du support (par exemple uni ou quadrillé) permet de convertir un exercice de mesure des aires en comptage de carreaux ; une différentiation des supports proposés aux élèves différencie les tâches. Un travail d'entraînement important consiste à proposer à la comparaison d'aires des surfaces construites sur un papier en réseau

De même un travail spécifique est conseillé sur la différence périmètre et aire et leur relative indépendance. De telles situations sont développées dans la brochure de Douady et Perrin-Glorian, dont les références sont données : il s'agit de trouver différents rectangles de même périmètre et de comparer leurs aires, puis de comparer des périmètres de rectangles de même aire. Ces situations peuvent efficacement servir de réinvestissement sur les aires, tout en apportant un contenu nouveau, la différence aire-périmètre.

Une quatrième étape de la progression sur les aires est une présentation des unités de mesure d'aire, du système international. Cette étape est racontée aux étudiants, en insistant sur les aspects suivants :

- l'étape 3 a montré l'utilité d'un étalon commun, les unités d'aire conventionnelles se situent dans cette continuité, celle d'une convention internationale sur les unités de mesure, soit pour l'aire, le mètre carré, et ses multiples et sous-multiples ;
- le $dm^2$, choisi parce qu'il est plus facile de dessiner une surface de cette aire n'est pas un carré de 10 cm de côté, mais l'aire d'un tel carré ; cette aire peut donc être indifféremment représentée (ce qu'oublie un certain nombre de manuels scolaires) par un rectangle, un triangle, un parallélogramme ou n'importe quelle autre surface obtenue à partir du carré selon une transformation conservant les aires. Il n'y a pas lieu d'attacher une forme privilégiée à une unité d'aire ;
- transformer un $dm^2$ en $cm^2$ résulte de la comparaison des aires de deux surfaces (l'une d'un $dm^2$, l'autre d'un $cm^2$), bien choisies pour les comparaisons : c'est donc une recherche tout à fait possible au CM, dans la continuité des activités précédentes (un procédé rapide est le pavage d'un grand carré par 100 petits carrés) ; les autres conversions relèvent des mêmes procédés ;
- un rappel : la conversion de mesures exprimées avec une unité usuelle en mesures exprimées avec une autre unité usuelle équivaut à l'application d'une fonction linéaire de coefficient une puissance (positive ou négative) de 10 ; cette simplicité justifie a posteriori le choix du système métrique fin du 18 siècle.

# D. NOTRE ANALYSE DU POINT DE VUE DU FORMATEUR

La situation de départ fournit un exemple d'étude d'objet géométrique, contemporain et curieux, intéressant pour l'aire et le périmètre ; les contraintes de l'objet à étudier amènent à envisager de nouvelles méthodes pour mesurer les aires.

Elle présente aussi certains défauts : les étudiants pris dans leur recherche sont moins à même de prendre le recul du futur enseignant face à la situation, ils restent préoccupés par la distance entre leurs conceptions initiales et les propriétés mathématiques réelles. C'est pourquoi une analyse commune, après coup, de la façon dont a été vécue l'activité nous paraît indispensable, pour qu'ils prennent conscience de l'insuffisance de certaines présentations sur l'aire qu'ils ont pu observer soit sur le terrain en observation, soit dans les manuels.

Cependant, comme il ne s'agit pas d'homologie directe, nous pensons que le principe de la situation sera moins facilement transféré par les étudiants dans leurs classes, même si nous leur donnons les références utiles.

Alors pourquoi ce choix alors que nous aurions pu mettre en scène une recherche sur l'optimisation de l'aire du rectangle à périmètre constant avec autant d'avantages (sauf la curiosité fractale !) plus la possibilité d'une homologie directe[10]. Nous avons signalé les contraintes de temps au début de cette partie. Notre situation, plus économique quant au temps de recherche, permet simultanément de pointer une nouvelle méthode de mesure d'aire. Mais surtout, elle nous permet d'exhiber un objet géométrique complexe, que l'informatique a permis de visualiser, et montre un exemple des liens entre ces deux disciplines, ce qui représente un autre aspect des mathématiques à l'école élémentaire et en formation[11].

La contrainte forte avec laquelle nous jouons ces années d'intégration de préparation au concours dans la première année de formation est sans conteste le temps lié à la nécessité de traiter les thèmes du plan de formation (le programme du concours). Ainsi l'équivalent des deux premières étapes, un peu plus développées, occupait deux séances de trois heures dans les formations où le concours avait eu lieu avant la formation professionnelle, ce qu'actuellement nous "bouclons" en une séance de deux heures !

Les économies se font du côté du temps qu'on donnait aux étudiants pour réaliser, puis s'exprimer ou contester les réalisations, dans le nombre de surfaces et de familles différentes que les étudiants réalisaient effectivement (aujourd'hui on raconte la suite de la séquence, demandant aux étudiants de transférer la méthode), dans la finesse de l'analyse didactique et de ses prolongements pédagogiques. En effet il nous semble par moment déplacé de préciser tel ou tel détail de classe, alors que la seule préoccupation de nos étudiants est de noter, à la lettre, tout ce qui peut servir...au concours.

Ces économies de temps nous semblent en partie nuire à l'équilibre entre enrichissement sur le savoir mathématique et apport de connaissances didactiques et

[10] Rappelons qu'une homologie directe est une stratégie utilisant une situation didactique construite pour l'école élémentaire comme une situation de formation.

[11] Cf. des exemples de séances conciliant mathématiques et informatique dans *Math et info au CM* tome 1 (1989) et tome 2 (1991, *Voyages aux frontières de l'ensemble de Mandelbrot)*, M.Canu et al., IREM de Rouen : ces séances sont d'ailleurs adaptées en formation avec des stratégies d'homologie.

pédagogiques. Si les compétences des étudiants augmentent régulièrement sur les mathématiques (mais restent souvent très superficielles), par contre nous ne sommes pas sûrs d'un impact de même type sur leurs connaissances professionnelles (peut-être à tort d'ailleurs !).

L'information sur le système métrique et les unités usuelles se fait sous une forme culturelle, mêlant informations mathématiques et faits de société (la révolution et son effet sur l'utilisation du système métrique) et remarques didactiques, devant permettre de prendre du recul par rapport aux passages des manuels renvoyant à cette étape.

# TROISIEME SEANCE

## A. OBJECTIFS

### OBJECTIFS MATHEMATIQUES

- Construire les formules d'aires des figures usuelles
- Distinguer les transformations de surfaces conservant l'aire et celles ne la conservant pas
- Comprendre et relativiser le formulaire sur les aires

### OBJECTIFS DIDACTIQUES

- Lier compréhension de formules et construction préalable
- Rôle des changements de cadres (numérique, géométrique, grandeur)
- Changement de point de vue : statique, dynamique.
- Objectifs pédagogiques

Poursuivre la proposition de progression sur l'aire et sa mesure

## B. CHOIX DE LA SITUATION

Les étudiants ont, à l'issue de la séance précédente reçu un formulaire sur les aires (et les volumes) et ont été invités à le lire en détail. Ils ont donc été confrontés :

- à un vocabulaire pas toujours très bien maîtrisé (hauteur, base,...)
- à des ambiguïtés de notation : par exemple, la base d'un cylindre est notée B, de même que la grande base du trapèze, la première désignant une aire, la deuxième une longueur, etc.

Ils aspirent en général à deux choses :

- retenir les formules (pour le concours)
- comprendre comment elles fonctionnent, pour lire le formulaire (pour les enseigner).

C'est pourquoi nous choisissons délibérément de les replacer dans une situation d'homologie directe, sachant qu'elle permettra, plus que de longs discours, une efficace remise à niveau sur les formules. De plus une analyse a priori confortée par plusieurs expérimentations nous fait attendre une erreur classique sur laquelle nous souhaitons insister : déformer un parallélogramme en rectangle en conservant son périmètre et penser ainsi conserver l'aire.

## C. ORGANISATION DE LA SEANCE

*Consigne 1*

"Vous dessinez un rectangle de 5 cm sur 3 cm. Trouvez son aire, plus exactement quels procédés sont disponibles chez l'élève de CM, à ce stade de la progression (étape 5), pour exprimer l'aire du rectangle en $cm^2$ ?"

Le lien se fait avec un représentant d'un $cm^2$, les écritures multiplicatives.

Le même problème est posé avec un rectangle de 4,7 cm sur 3 cm ; la difficulté, y compris pour les étudiants étant d'exprimer avec des unités usuelles les fractions de $cm^2$ qui dépassent les 12 $cm^2$, ce qui permet de reprendre le sens du $mm^2$. De même avec un rectangle de 3,4 cm sur 2,6 cm.

On souligne l'importance du support de dessin, le papier millimétré facilitant les conclusions, jouant le rôle de variable didactique, par rapport au papier quadrillé (perturbateur quand les carreaux ont un demi cm de côté) ou blanc.

Le passage à une formule sur le rectangle se fait par extension sans justification.

*Consigne 2*

"Dessinez sur papier blanc un parallélogramme et déterminer, en $cm^2$, la mesure de l'aire de votre parallélogramme. Le but de cet exercice est que nous arrivions de la même façon que pour le rectangle à une formule sur l'aire du parallélogramme."

*Procédures observées*

Certains construisent un parallélogramme de mesures un nombre entier de cm, le pavent avec des losanges de côté un cm, et déduisent comme aire en $cm^2$ le nombre de carreaux (résultat faux).

D'autres transforment un parallélogramme de mesures des nombres entiers de centimètres en un rectangle tout en conservant l'aire, ce qui les amène à tracer une hauteur du parallélogramme, puis ils mesurent cette hauteur et le côté correspondant et en déduisent l'aire comme produit de ces deux nombres. Puis ils étendent sans difficulté à des mesures quelconques (entières ou non entières) : ce procédé est correct.

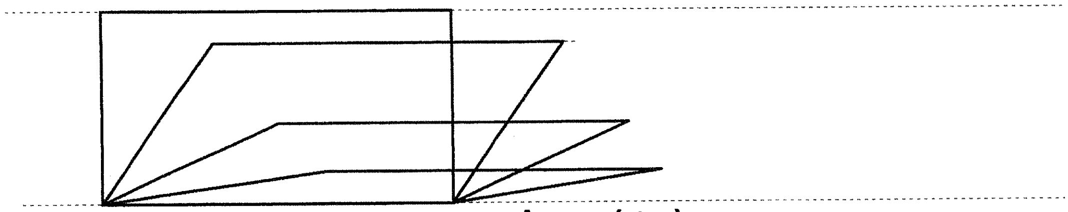
D'autres encore découpent fictivement le parallélogramme en un rectangle et deux triangles rectangles, reconstituant un rectangle : ce procédé est aussi correct.

*Synthèse*

Les deuxième et troisième méthodes sont validées sans problème. La confrontation des trois méthodes permet de s'interroger sur la première et de constater qu'elle donne des résultats en opposition avec la deuxième. Certains étudiants ne voient pas immédiatement qu'elle s'appuie sur la croyance à une aire de 1 $cm^2$ pour un losange non carré de 1 cm de côté.

On cherche à montrer que l'aire du losange en question n'est pas 1 $cm^2$.

Il y a débat dans la mesure où certains prennent comme argument la déformation continue (au sens de "sans rupture") d'un contour dont la longueur reste fixe. Le débat se clôt par la bande dessinée de la déformation d'un rectangle en parallélogramme, par rotation de deux de ses côtés parallèles autour de deux de ses sommets, les deux autres côtés restant fixes. Les parallélogrammes successivement obtenus conservent les longueurs de leurs côtés, mais les hauteurs changent, donc leurs aires varient, elles diminuent jusqu'à atteindre une valeur très petite, quand un des angles tend vers 0.



Dessin fait avec des rectangles de même périmètre,
mais d'aires décroissant avec la distance entre les deux côtés parallèles.

En général, cette illustration convainc les étudiants non encore convaincus que l'aire du losange est inférieure à 1 $cm^2$ (et qu'il faut s'assurer de l'aire de l'étalon avant de tirer une conclusion numérique).

On conclut donc sur la pertinence de la formule (base x hauteur), donnant l'aire d'un parallélogramme, l'existence de deux hauteurs et de deux bases différentes, la pertinence didactique d'introduire, à ce moment de la progression, le mot de hauteur avec sa définition naturelle (le segment -et la longueur du segment- qui permet de transformer un parallélogramme en un rectangle de même aire et ayant deux côtés de même longueur que deux du parallélogramme).

*Consignes suivantes*

"Quelles mesures de longueurs pouvez-vous prendre pour calculer les mesures d'aires en $cm^2$ d'un triangle rectangle, quelconque, d'un losange, d'un trapèze ? Faites le lien avec les formules proposées par le formulaire."

*Procédures observées*

Les étudiants, par analogie, trouvent comment calculer les aires des surfaces fixées :

- sans difficulté pour le triangle rectangle,
- par découpage en deux triangles rectangles ou doublement en parallélogramme pour le triangle quelconque,
- par découpage en quatre triangles rectangles pour le losange (étonnamment aucun ne réinvestit la formule liée au parallélogramme, sans doute d'une part parce que la notion de hauteur est moins naturelle que celle de diagonale, d'autre part parce que la connaissance un losange est aussi un parallélogramme n'est pas immédiatement disponible),

- pour le trapèze, par découpage en deux triangles rectangles et un rectangle ou en un parallélogramme et un triangle quelconque ; la tâche la plus difficile (parce que dans un cadre algébrique) est de retrouver, à partir des formules déduites de ces procédés, celle proposée traditionnellement dans les formulaires : $\frac{B+b}{2} \times h$.

Le cercle joue un rôle spécifique dans cette série de figures usuelles.

L'aire du disque n'est pas déductible simplement des autres aires (évocation du problème de la quadrature du cercle).

Le formateur peut indiquer (ou faire travailler les étudiants sur ce thème si le temps le lui permet) des idées d'approximation de l'aire d'un disque, soit grossièrement par les aires des carrés respectivement tangents intérieurement et extérieurement au disque, soit plus finement par l'aire d'un polygone régulier convexe à $n$ côtés inscrit dans le disque. Le formulaire donne d'ailleurs des indications en ce sens. C'est aussi l'occasion de préciser à nouveau la "vraie nature" de $\pi$.

Une bonne exploitation de la formule de l'aire du disque, mais alors pour un travail dans un cadre algébrique, est la justification des formules de la couronne et du croissant de disque, donnés par le formulaire.

L'analyse mathématique se fait dans l'action, dans la mesure où les étudiants ont révisé les mathématiques à enseigner aux élèves.

ANALYSE DIDACTIQUE

Comme dans les autres séances, nous annonçons l'analyse didactique aux étudiants et soulignons à cette occasion plusieurs points.

Nous insistons sur la nécessité de donner du sens aux formules afin de pouvoir les utiliser avec pertinence ; cette séance a été construite dans cette optique. Ces formules doivent être perçues (par les étudiants et c'est aussi l'objectif qu'on a pour les élèves) comme des procédés pour calculer l'aire indépendamment de toutes mesures.

Nous pointons à l'occasion l'importance des changements de cadres dans la constitution des connaissances : en effet nous avons essayé dans notre séance de faire basculer les étudiants du cadre algébrique où ils pensaient résoudre le problème (trouver une formule) au cadre géométrique, plus exactement à celui des grandeurs aires, puisque ce changement de cadres transforme la recherche en construction de surfaces de même aire, mais dont on sait calculer l'aire.

A l'occasion de la déformation du carré en losange dont un des angles devient très petit, nous soulignons que nous avons utilisé un changement de point de vue pour convaincre son auditoire : d'un point de vue statique, nous sommes passés à un point de vue dynamique, fabriquant ainsi des surfaces de même périmètre, mais d'aires de plus en plus petites (on pourrait aussi pointer le théorème des valeurs intermédiaires en acte). Nous signalons que cette erreur est courante chez les élèves et qu'il est licite de la provoquer pour la contrer plus efficacement.

Si les formules trouvées sont perçues dans un premier temps comme des méthodes de calcul d'aires, il est nécessaire de faire constater qu'elles sont aussi l'expression des relations mathématiques qui lient les différentes grandeurs : ainsi l'aire d'un rectangle, produit de ses deux longueurs, traduit une double proportionnalité de l'aire sur les longueurs : si on considère les rectangles dont une dimension est fixe (par exemple 10 cm), l'aire du rectangle est proportionnelle à l'autre dimension. Cette connaissance fait basculer les aires vers la proportionnalité.

Nous avons ainsi l'occasion de pointer les liaisons entre les différentes notions mathématiques : l'aire du rectangle est liée à la multiplication, les diverses relations qui lient longueurs et mesures sont plus compréhensibles si l'élève maîtrise des aspects de la proportionnalité, les changements d'unités donnent naissance à des listes de nombres proportionnelles.

La mesure des aires fournit un cadre propice à l'illustration de certaines propriétés : à titre culturel, nous pouvons présenter la version "mesure des aires" du théorème de Pythagore et proposer à la recherche ou à la méditation des découpages qui éclairent le théorème direct à défaut de le démontrer : l'aire du carré construit sur l'hypoténuse du triangle rectangle est égale à la somme des aires des carrés construits sur les deux autres côtés.

Il est aussi possible de profiter de ce cadre lié à la mesure des aires pour illustrer deux "égalités remarquables",$(a + b)^2$ et $(a -b)^2$ présentées sous forme de l'aire d'un carré de mesure de côté a + b (resp. a - b).

Là encore on peut montrer l'intérêt, pour l'apprentissage, de maîtriser des changements de cadres pour contrôler certains résultats, donc la nécessité pour le maître de préparer l'élève à utiliser ces changements de cadres, par le choix de situations appropriées.

## D. ANALYSE DU FORMATEUR

Cette séance d'homologie directe complète les connaissances des étudiants et leur permet de comprendre l'origine des formules ; beaucoup se rassurent seulement à ce moment tant ils étaient inquiets de ce passage obligé à un cadre algébrique pour de la géométrie. L'importance des changements de cadres nécessaires se trouve bien illustrée ici.

D'autre part et parce qu'elles s'expriment dans le cadre algébrique (survalorisé dans leur scolarité), les formules liées à l'aire leur semblent souvent le plus important à retenir sur les aires (c'est souvent la seule trace des aires dans les ouvrages communs), donc simultanément le plus important à enseigner. Il est, nous semble-t-il, utile que le formateur insiste continûment sur la nécessité de faire travailler dans un premier temps sur les grandeurs indépendamment des mesures et des formules, de telle sorte que celles-ci ne soient qu'un aboutissement de l'étude.

Le bilan fait avec les étudiants en fin de cours sur les aires montre qu'ils ont été rassurés de constater que les formules pouvaient s'expliquer. Ainsi cette séance, nous semble-t-il, joue un rôle important dans la conception de l'aire des étudiants.

En effet, s'ils ont de diverses manières apprécié les découpages et comparaisons d'aires sans utiliser la mesure, ils ont quelquefois perçu ces situations comme uniquement pour la classe élémentaire, sans réel effet pour leurs propres connaissances, puisqu'ils ont réussi à traverser leur scolarité avec une conception erronée de l'aire. Par contre quand ils constatent que la progression utilisée leur permet de construire le formulaire, objet social reconnu entre tous pour symboliser les aires (ou au volume), de l'utiliser mais surtout de l'oublier, alors ils reconnaissent l'efficacité de la démarche. Iront-ils dans leur classe jusqu'à construire une situation qui permette aux enfants de construire le formulaire, nous ne pouvons l'assurer.

Une autre stratégie que l'homologie ne nous paraît pas envisageable pour cette construction des formules, justement parce qu'elle doit permettre un temps d'errements et de maturation, propice au jeu de cadre proposé par le formateur. Bien entendu une phase de transposition est nécessaire pour en extraire toute la moelle didactique.

# QUATRIEME SEANCE

## A. OBJECTIFS

### OBJECTIFS MATHEMATIQUES

- Evaluer les connaissances des étudiants ; leur permettre de faire un point mathématique sur les aires
- Etendre les connaissances sur les aires aux volumes et autres grandeurs mesurables
- Comprendre et relativiser le formulaire sur les volumes

### OBJECTIFS DIDACTIQUES

- Montrer en quoi la progression sur les aires et leur mesure est exemplaire d'une progression sur une grandeur mesurable
- Informer sur grandeurs mesurables et repérables à l'école
- Objectifs pédagogiques

Replacer l'ensemble de l'étude dans le contexte des grandeurs enseignées à l'école.

## B. DEROULEMENT

Cette séance est simultanément une séance de réinvestissement où des exercices sur les aires donnés à chercher à la maison sont repris et éventuellement corrigés, après une confrontation deux à deux pour échanges et régulations, et une séance d'informations.

Viennent d'abord des informations de nature mathématique sur la notion de grandeur, de grandeur mesurable et de grandeur repérable, la notion de mesure d'une grandeur, sur toutes les grandeurs enseignées à l'école : longueur, aire, volume, masse, capacité, durée, temps, température, angle.

Du côté didactique, nous reprenons brièvement a posteriori les grandes étapes de la progression sur les aires et la présentons comme un exemple possible pour une progression sur une grandeur mesurable, respectant la chronologie : construction d'une grandeur, travail sur cette grandeur de classement et de rangement, indépendamment de toute mesure, puis construction d'une mesure (définissant ces propriétés) liée au choix d'un étalon et utilisation de cette mesure ; puis justification de la nécessité d'unités universelles, introduction de ces unités et utilisation ; enfin construction de méthodes pour évaluer la mesure de grandeurs d'objets familiers, ce qui nous fait basculer du côté du mesurage, avec éventuellement la construction d'objets servant à mesurer. Nous énonçons pour chacune des grandeurs quels peuvent être les objets physiques que nous cherchons à comparer, et par quels moyens. Un renvoi aux livres ERMEL est conseillé.

Cette séance respecte une stratégie culturelle pour les mathématiques et une stratégie de transposition pour les connaissances liées à l'acte d'enseigner. Elle répond souvent à des questions d'étudiants de nature plus mathématique que didactique, notamment des demandes de précisions sur les unités de volume, les formules sur les volumes trouvées dans le formulaire, le passage des unités de capacité usuelles à celles de volume usuelles.

## C. ANALYSE DES EXERCICES ET PROCEDURES RENCONTREES

**Exercice 1**

Tracer à la règle et au compas un parallélogramme MATH, puis un rectangle, un triangle, un losange de même aire que le parallélogramme

**Exercice 2**

Comment se transforment (k réel positif)

- l'aire D d'un disque si on multiplie le rayon de ce disque par 2, 10, k ?
- l'aire C d'un carré si on multiplie la longueur du côté par 2, 10, k ?
- l'aire R d'un rectangle si on multiplie la longueur d'un côté par 2, 10, k ?

**Exercice 3**

Comment se transforment (k réel positif)

- le volume VC d'un cube si on multiplie la longueur de son arête le rayon par 2, 10, k ?
- le volume VR d'un parallélépipède rectangle si on multiplie une de ses dimensions par 2, 10, k ? Deux de ses dimensions par 2, 10, k ?
- le volume VD d'une sphère si on multiplie son rayon par 2, 10, k ?

L'objectif de l'exercice 1 est de contrôler la disponibilité des compétences de construction des étudiants pour produire des surfaces de même aire et de formes imposées. Il se résout dans un cadre géométrique.

L'exercice 2 leur permet de constater les relations entre agrandissement de longueurs et agrandissement d'aires. Il se résout dans un cadre algébrique.

L'exercice 3, du même type que le précédent, les amène à lire les formules sur les volumes et à transférer avec des modifications les remarques constatées sur les aires et les agrandissements.

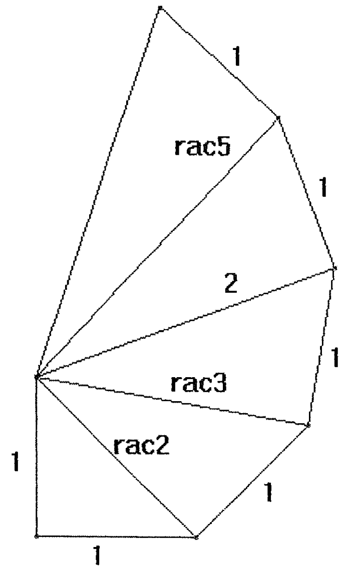
Les étudiants n'ont pas rencontré de difficulté particulière pour ces trois exercices ; c'est l'occasion pour nous de préciser les relations entre les formules et l'éventuelle proportionnalité entre l'aire et l'une des longueurs. L'expression "figure deux fois plus grande", de la langue courante et utilisée par les élèves (et les étudiants) prouve son ambiguïté, puisque le mot grand ne précise pas la grandeur de référence : un rectangle deux fois plus grand qu'un rectangle donné peut être ce rectangle à l'échelle 2, auquel cas son aire est quadruple, ou un rectangle non semblable à celui de départ, de longueur (ou bien de largeur) double de celle de départ, et donc d'aire double.

**Exercice 4**

Construire à la règle et au compas un carré d'aire 4 $cm^2$, puis un carré d'aire double. Recommencer avec un carré de départ quelconque.

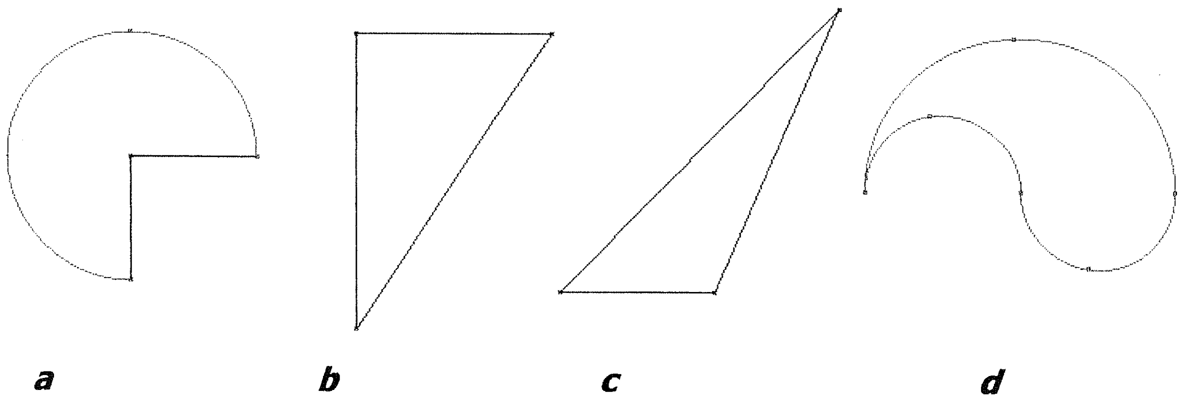
L'exercice 4 sert à pointer la fonctionnalité du changement de cadres, liée à la recherche de l'expression de la longueur de la diagonale d'un carré : les étudiants ont presque tous trouvé un procédé de construction, certains par un calcul préalable (recherche de la longueur du côté correspondant à un carré d'aire 8 $cm^2$), d'autres partageant par les diagonales le carré de départ et assemblant huit triangles rectangles superposables à ceux obtenus en un carré. La conclusion, que la diagonale du carré de départ fournit le côté, d'un carré d'aire double est acceptée par tous, mais n'est pas mise immédiatement en relation avec le théorème de Pythagore.

Les prolongements possibles, non évoqués, seraient la construction de la "spirale des irrationnels" (cf. ci- dessous), leur permettant d'obtenir la suite des nombres racines carrées d'entiers




**Exercice 5**

Partager par une ligne continue les surfaces suivantes en deux surfaces d'un seul morceau et de même aire.

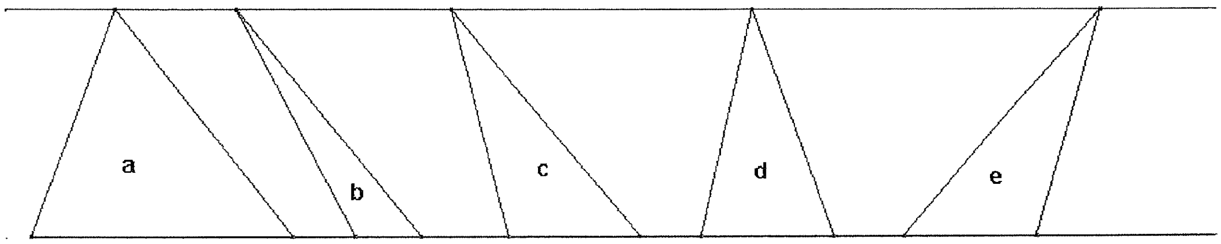



L'exercice 5 teste leurs aptitudes à réinvestir le partage de surfaces non rectangulaires en deux surfaces de même aire. La surface $a$ est partagée par tous par son axe de symétrie. Les étudiants partagent correctement les surfaces $b$ et $c$, mais un quart environ ne sait justifier le partage, soit par l'utilisation de la formule liée à l'aire d'un triangle, soit par la construction des médianes du rectangle obtenu par complétion par symétrie centrale du triangle de départ (les médianes et les diagonales du rectangle permettent par symétrie axiale et centrale de repérer les surfaces de même aire). A cette occasion, nous pointons à nouveau l'aspect outil des transformations, pour comparer des aires.

La surface $d$ reste la grande perdante, si un quart des étudiants a une idée du partage, aucun ne peut le justifier : la correction fait apparaître un demi-disque de rayon $a$ (à gauche), un quart de disque de rayon $2a$ (au dessus) d'aire double, et une surface d'aire égale à celle du demi-disque de rayon $a$. Ce qui donne comme exemples de lignes de partage (entres autres), la demi-droite bissectrice intérieure du quart de disque cité ci-dessus, ou un demi cercle de rayon $a$, intérieur à la surface, passant par le centre du disque de rayon $2a$.

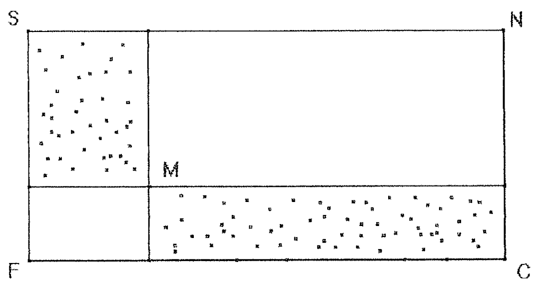
**Exercice 6**

Compare les aires de ces triangles




L'exercice 6 ne pose pas de difficulté, il montre l'intérêt de la formule de l'aire d'un triangle, plus exactement le rôle du couple (hauteur, base).

**Exercice 7**




SNCF est un rectangle, [FN] une de ses diagonales, M un point placé sur cette diagonale (n'importe où sur [FN]) Comparer les aires des deux rectangles colorés.

L'exercice 7 pose quelques difficultés, il montre l'avantage de l'additivité des aires, qui permet de prouver une égalité d'aires en jouant sur somme et différence d'aires.

Rappelons qu'il s'agit de la version rectangle de la proposition I, 43 des *Elemens* d'Euclide[12].

[12] Dans tout parallélogramme, les compléments des parallélogrammes autour de la diagonale sont égaux.

**Exercice 8**

ABCD est un carré, I le milieu de [AB], J le milieu de [BC], K le milieu de [CD]. Les triangles AIJ et AKD sont hachurés. Quelle fraction d'aire du carré représente la partie non hachurée ?

demande une réponse numérique, lié à une unité imposée. Il permet soit d'utiliser des découpages du carré en sous-surfaces, soit de le paver par neuf carreaux élémentaires et d'exprimer la surface demandée avec ces carreaux.

## D. NOTRE BILAN EN TANT QUE FORMATEUR

Ce bilan est étayé par les échanges avec les étudiants et leurs questions.

La plus grande difficulté rencontrée par les étudiants dans la résolution de ces exercices est la nécessité d'un changement de cadre, notamment dans les exercices 4 et 5.

Dans l'exercice 4, bien que l'exercice se pose dans un cadre géométrique, la tendance naturelle est de se précipiter sur des calculs numériques pour apprécier le degré de faisabilité de l'exercice. Quand la valeur numérique n'est pas suffisamment familière (c'est-à-dire non décimale avec moins de trois chiffres après la virgule), les étudiants se persuadent souvent que la méthode employée n'est pas la meilleure et essaient seulement alors de changer de cadre ; mais la valeur numérique joue alors quelquefois un rôle perturbateur, dans la mesure où ils cherchent à la retrouver. Ceux qui directement s'étaient placés dans un cadre géométrique, en doublant l'aire du carré de départ, y compris en passant par un rectangle, ont souvent mené à bien l'exercice par un puzzle du carré d'aire double.

L'exercice 5 posait spécifiquement ce problème de changement de cadre : en effet un cadre strictement géométrique suffisait pour conclure directement pour la surface $a$,

aussi moins directement pour la surface $b$ (par tracé d'une médiane) : cet exercice permettait de citer la propriété qu'une médiane partage un triangle en deux triangles de même aire.

La surface $c$, bien que proche de $b$, nécessitait des connaissances plus évoluées sur l'aire (une médiane partage un triangle en deux triangles de même aire), fondées soit sur le constat antérieur de cette propriété, soit sur un réinvestissement de la formule de l'aire d'un triangle (donc un cadre plus algébrique).

Pour la surface $d$, le cadre algébrique (connaissance de la formule de l'aire d'un disque) est bien commode, mais il n'est pas indispensable : en effet, par des considérations de symétrie, il est possible de se convaincre que le quart du disque de rayon 2 $a$ a même aire que le complément de ce quart de disque par rapport à la surface entière, donc la moitié de l'aire de la surface totale, et comme le demi-disque de rayon $a$ a une aire qui est le quart de l'aire totale (c'est la réduction à l'échelle 1/2 du grand demi-disque), il est facile de tracer une ligne de partage convenable.

Ces exercices jouent le rôle dans la progression avec les étudiants d'une évaluation formative, et permettent simultanément de compléter les connaissances mathématiques et didactiques. Ils ont donc servi à préciser à nouveau, au niveau mathématique, les propriétés de l'aire fonctionnelles pour la comparaison d'aires (additivité et invariance par isométries et certaines autres transformations), le lien entre les rapports de mesure et les rapports d'aire, et au niveau didactique, l'importance des changements de cadres pour l'appropriation des connaissances.

# ETUDE COMPAREE DE MANUELS DE CM1 SUR L'AIRE : *VOIR MANUELS RECENTS ET SUJETS DE CONCOURS.*

# ANNEXE 2 : STRATEGIES DE FORMATION DES MAITRES DU PREMIER DEGRE EN MATHEMATIQUES

## DEFINITIONS SUCCINCTES DES STRATEGIES DE FORMATION

*Stratégies culturelles* : le formateur diffuse une information ; il veut accroître le savoir mathématique (ou éventuellement didactique) de l'étudiant, sans se préoccuper de la mise en œuvre ultérieure par l'étudiant dans les classes.

*Stratégies de monstration* : le formateur transmet une pratique d'enseignement, en montrant sa mise en œuvre effective dans les classes.

*Stratégies d'homologie* : le formateur transmet sa propre conception de l'enseignement des mathématiques, en la mettant en œuvre dans son enseignement. Il attend que ses étudiants utilisent à l'école élémentaire les séances qu'ils ont vécues comme élèves.

*Stratégies de transposition* : le formateur transmet un savoir de référence sur l'enseignement et tente de maîtriser le phénomène d'adaptation opéré par les étudiants.

# ANNEXE 3 : ARGUMENTS POUR UNE ENTREE DE TYPE SITUATIONNISTE, ET CONDITIONS ASSOCIEES

Extrait de "Enseigner la didactique des mathématiques aux futurs professeurs d'école" D. Butlen et M-L. Peltier, Document de travail n° 9 pour la formation des enseignants, 1994, Université Paris 7.

## 1- DIFFERENTS NIVEAUX D'INTERVENTION DE LA DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES EN FORMATION DES PROFESSEURS D'ECOLES

La didactique des mathématiques peut intervenir pour nous, enseignants formateurs de maîtres du premier degré, à la fois en tant qu'outil pour construire des situations de formation et en tant qu'objet d'enseignement pour les futurs professeurs d'école.

Il s'agit, en effet de compléter et de réorganiser les connaissances des étudiants sur les thèmes mathématiques en liaison avec ceux enseignés à l'école élémentaire, tout en "réconciliant" avec les mathématiques ceux, parmi eux, qui, de par leur passé scolaire, entretiennent des relations conflictuelles avec notre discipline.

Nos étudiants sont également de futurs enseignants du premier degré, et à ce titre ils doivent être "polyvalents", les mathématiques ne représentant qu'une fraction de ce qu'ils devront enseigner dans leur classe. Il est donc indispensable de leur donner une formation de type professionnel, c'est à dire, en particulier, de leur donner les moyens de construire et d'organiser un enseignement des mathématiques à l'école, efficace et de qualité, dans un temps très limité et bien qu'ils ne soient pas, la plupart du temps, des spécialistes de notre discipline.

Les situations de formation que nous construisons sont donc spécifiques en ce sens qu'il ne s'agit pas seulement de faire faire des maths aux étudiants, il s'agit également d'initialiser avec eux une réflexion didactique en les conviant à prendre du recul ou plutôt faire "un pas de côté" pour prendre conscience des ressorts de l'apprentissage et analyser, en partant de la situation vécue, un certain nombre de conditions que doit vérifier, a priori, une situation pour provoquer effectivement un apprentissage.

La didactique des mathématiques intervient également en tant qu'objet d'enseignement pour les P.E. afin qu'ils puissent eux-mêmes s'en servir d'outil à la fois dans le cadre de la préparation, en PE1, de l'épreuve de mathématiques du concours, puis surtout, ultérieurement, dans leur pratique professionnelle pour analyser des documents pédagogiques, des situations de classe, pour construire et mettre en oeuvre des situations d'enseignement.

Il s'agit donc de donner aux étudiants des éléments leur permettant de mener des analyses les plus objectives possibles de phénomènes d'enseignement et d'effectuer un certain nombre de tâches qui recouvrent les différents aspects du travail de l'enseignant, et qui, en outre, peuvent faire l'objet de questions au concours.

L'étude peut porter par exemple sur la recherche, dans des documents pédagogiques, des objectifs, des connaissances en jeu, des compétences pouvant être mises en oeuvre, sur l'analyse des tâches proposées, et des modes de validation possibles ..., ceci de manière à permettre aux étudiants de faire des choix argumentés parmi ces documents. Les étudiants sont ici confrontés au travail de préparation de progressions ou de séquences d'enseignement.

Le travail peut également consister en l'analyse de travaux d'enfants pour tenter d'identifier les procédures mises en oeuvre, repérer les erreurs, voire les interpréter. Il s'agit là de la prise en compte du travail des enfants dans la conduite des séquences.

Un certain nombre d'outils mis au point en didactique permettent également de tirer profit de l'observation de séquences dans des classes, ou du moins de mieux "lire" des comptes rendus de séquences, cela afin d'y repérer par exemple la manière dont le maître a effectué la dévolution du problème à ses élèves, ou les savoirs qu'il a choisi d'institutionnaliser, ou bien encore d'étudier le rôle des différentes phases de la situation ..., ceci dans le but de donner aux étudiants les moyens de construire des séquences dont le protocole leur est fourni et de prendre des décisions lors de leur mises en oeuvre.

Enfin dans le cadre de la formation à leur futur métier, et moins directement dans celui de la préparation du concours, il s'agit d'apprendre aux étudiants à utiliser des outils didactiques pour concevoir des séquences (cerner les objectifs à atteindre, travailler les consignes, faire une analyse a priori, prévoir la gestion du temps de l'espace, de l'hétérogénéité, prévoir les modes de validation, prévoir la synthèse, envisager entraînements, prolongements, évaluation...)....

L'enjeu est donc pour nous, dans le cadre d'une telle entrée de type situationniste, de construire des situations de formation qui permettent de développer simultanément ces deux aspects, approfondissement en mathématiques et formation de type professionnel, ceci dans un temps très court, ce qui nous conduit à préciser un ensemble de conditions tant du point de vue mathématique que didactique que nous semblent devoir vérifier a priori les situations pour atteindre au mieux les objectifs que nous leur fixons.

Rappelons que dans la conjoncture actuelle, la formation en première année est sanctionnée par une épreuve de concours comportant deux volets, l'un disciplinaire, l'autre pédagogique et se déroule dans un temps extrêmement court (entre 60 et 100 heures suivant les académies).

La seconde année les modalités de formation (horaires, contenus, évaluations) différent beaucoup suivant les académies, le temps d'enseignement varie entre une trentaine et une centaine d'heures).

## 2- QUELQUES CONDITIONS MATHEMATIQUES SUR LES SITUATIONS

Pour répondre aux contraintes de formation dans la discipline, la situation nous semble devoir, dans un premier temps, permettre aux étudiants d'engager des connaissances mathématiques acquises dans leur passé scolaire, qu'elles soient du domaine des savoirs ou de celui des savoir-faire, tout en les amenant à reconstruire des connaissances oubliées ou mal construites ou éventuellement, à construire de nouvelles connaissances.

Elle doit, dans un deuxième temps, du moins c'est notre objectif, permettre une réorganisation de ces connaissances, c'est-à-dire qu'il nous paraît souhaitable que la situation conduise l'étudiant à replacer certaines connaissances dans un réseau d'autres connaissances, afin qu'il prenne conscience des liaisons existantes entre différents savoirs d'une même branche ou entre les savoirs de branches différentes.

Les thèmes mathématiques choisis doivent ainsi permettre aux étudiants non seulement de maîtriser les savoirs mathématiques sous-jacents aux contenus enseignés à l'école élémentaire, mais encore de comprendre les articulations entre ces différents contenus, et d'envisager les prolongements qui seront enseignés au collège ou au lycée.

La situation choisie doit donc permettre au professeur de faire une synthèse sur les savoirs mathématiques visés, en apportant si nécessaire des compléments.

Si les contenus mathématiques de la situation s'y prêtent, le professeur peut également donner à ce moment-là un apport d'information de nature épistémologique ou historique.

## 3- QUELQUES CONDITIONS DIDACTIQUES SUR LES SITUATIONS

Comme nous l'avons dit, la situation doit permettre en principe aux étudiants de faire un "pas de côté" par rapport à leurs pratiques mathématiques habituelles. Ceci participe à l'amorce d'une réflexion, développée par ailleurs, qui amènera les étudiants à s'intéresser aux processus de construction et d'acquisition des connaissances à propos d'un thème particulier.

Pour initialiser cette réflexion, les étudiants sont amenés à essayer de décrire leur cheminement heuristique et à analyser le rôle des différentes phases de la situation proposée pour identifier ce qui leur a permis de progresser dans leur recherche. Ils doivent également chercher à préciser le rôle des débats qu'ils ont pu mener avec les autres. Ces échanges peuvent aussi bien relever d'un apport de connaissances qu'avoir une incidence sur leur démarche du point de vue méthodologique et sur leur adhésion à une procédure ou à une solution. En particulier, il est tout à fait intéressant que les étudiants essaient de pointer les arguments qui ont provoqué leur conviction pour réfléchir à la notion de preuve.

La situation doit d'autre part permettre au professeur de pointer les éléments qui sont du ressort du "maître" dans la construction et la mise en oeuvre d'une situation d'apprentissage. Ainsi, une fois le problème choisi en fonction d'objectifs mathématiques précis, le "maître" doit-il, lors de sa préparation, préparer la dévolution, mener une analyse a priori, repérer les variables didactiques, choisir les valeurs à leur donner à la fois pour provoquer la mise en oeuvre de certaines procédures ou en bloquer d'autres, et pour gérer l'hétérogénéité de sa classe; il doit également préparer la synthèse et choisir les savoirs à institutionnaliser.

Au cours de la mise en oeuvre, il doit gérer le temps, prendre un certain nombre de décisions "à chaud", provoquer les débats, animer les mises en commun des procédures et des solutions, assurer la phase d'institutionnalisation. Puis après le déroulement il doit s'interroger sur les effets de la transposition qu'il a opérée sur les savoirs en construisant sa situation pour s'assurer qu'il a effectivement provoqué l'apprentissage qu'il souhaitait et non pas autre chose.

Dans cette phase de la réflexion qui suit la recherche proprement dite, le professeur invite donc les étudiants à analyser la situation non seulement d'un point de vue d'élève, mais aussi du point de vue du maître, en prévision de leur future situation d'enseignants.

## 4- QUELQUES CARACTERISTIQUES DE LA SITUATION

Dans la situation, les étudiants doivent donc se trouver confrontés à un **problème** mathématique.

En reprenant en partie les caractéristiques que Régine Douady [13]assigne à un problème pour les élèves, nous appelons problème, une question dont la réponse n'est pas évidente pour les étudiants, mais dans laquelle ils peuvent s'engager, et pour laquelle il existe plusieurs procédures de résolution permettant un débat entre pairs.

Il est souhaitable que les étudiants puissent aussi avoir le moyen de valider par eux-mêmes leurs propositions ou du moins certaines d'entre elles.

Le problème posé doit, bien sûr, être consistant du point de vue mathématique pour répondre à la première fonction de la situation, à savoir compléter les connaissances mathématiques des étudiants mais aussi pour éviter une confusion fréquente chez les étudiants entre situation d'apprentissage et situation motivante où l'élève manipule sans finalité précise!

Le problème doit enfin offrir la possibilité d'une part de proposer, par la suite, des exercices d'entraînement et de familiarisation sur le contenu mathématique, d'autre part d'étudier des documents pédagogiques sur le thème.

*Ces situations peuvent être parfois assez proches de situations qui pourraient être proposées à des élèves de l'école élémentaire, afin de provoquer une meilleure adhésion de la part des étudiants, mais ce degré de proximité ne doit cependant pas être trop élevé car il serait tout à fait regrettable que les étudiants considèrent ces*

[13]Régine DOUADY. Thèse de Doctorat d'Etat. 1984. page 19.

*situations comme des "situations modèles", transférables telles quelles à l'école élémentaire. Une trop grande proximité pourrait facilement engendrer cette dérive. En effet, comme nous l'avons dit, ces situations ont été construites non seulement à des fins d'apprentissage mathématique, mais aussi dans un but de formation professionnelle, pour un public d'étudiants. Même si certains ressorts de l'apprentissage en mathématiques peuvent être de même nature pour des étudiants et pour des élèves de l'école élémentaire, même si les connaissances mobilisables par les uns sont voisines de celles que peuvent mettre en oeuvre les autres, un "transfert" à l'école élémentaire du problème mathématique posé ne peut être que très partiel et nécessite une re-construction de la situation pour l'adapter aux objectifs de l'école.*

## 5- LA CONTRAINTE DU TEMPS

Comme nous l'avons précédemment souligné, le nombre d'heures de formation en mathématiques est relativement peu important, cette contrainte temps pèse très lourdement sur la mise en oeuvre des situations et ceci pour au moins deux raisons.

En effet, si nous différons l'analyse didactique de la situation proposée, les étudiants ne peuvent pas, plusieurs jours après avoir vécu la situation, se souvenir des différents ressorts qui leur avaient permis d'avancer dans la résolution, du rôle des discussions avec leur pairs, des arguments qui avaient emporté leur adhésion, en résumé de tout un ensemble de "petits faits" qui, tout en ayant joué un rôle de catalyseur, ne sont pas de première importance à leur yeux.

Par ailleurs, si nous différons la synthèse mathématique, nous risquons de conforter les étudiants dans l'idée que les connaissances investies au cours de la résolution d'un problème, n'ont pas besoin de faire l'objet d'une institutionnalisation, que le seul fait de les avoir fait fonctionner suffit à les retenir, et à les considérer comme acquises.

Pour optimiser l'efficacité d'une telle approche "situationniste", il nous faut donc être très stricts dans la mise en oeuvre et la conduite de la situation.

Nous sommes amenés à distinguer deux cas liés au contenu mathématique que nous nous proposons d'étudier.

Lorsque la situation cible un savoir "pointu" et doit, d'après nous, faire l'objet d'une seule séance, alors toutes les phases, présentation de la situation, temps de recherche, mise en commun, synthèse mathématique sur le savoir ciblé, analyse didactique de la situation, doivent "tenir" dans le temps prévu, et le professeur doit faire preuve de ses qualités de gestion du temps et prendre au cours de la séance un certain nombre de décisions pour éviter les dérapages.

Lorsque la situation proposée nécessite une progression sur plusieurs séances, alors cette progression doit être découpée en phases pouvant tenir chacune dans une séance. A la fin de chaque séance une synthèse mathématique et une analyse didactique sur quelques points précis conduiront à des institutionnalisations locales, et ce sera seulement à la fin de la progression que sera menée la synthèse mathématique complète avec éventuels apports d'informations, en resituant les savoirs étudiés dans " l'édifice des savoirs mathématiques" concernant le thème, ainsi que l'analyse didactique de la progression, en s'appuyant sur les institutionnalisations locales, et en choisissant de dégager les concepts de didactique qui nous paraissent les plus pertinents à pointer dans cette situation.

## 6- LES QUESTIONS DE REPRODUCTIBILITE

Nous avons construit sur ce modèle un certain nombre de situations, plusieurs d'entre elles sont rédigées dans les actes des stages de Cahors et de Pau, ou dans des brochures IREM.

Se pose maintenant le problème de la reproductibilité de ces situations.

Cette question, qui a d'ailleurs fait l'objet de la réflexion d'un groupe de travail lors du stage national de Colmar en mars 1993, est une question difficile sur laquelle il convient de continuer à travailler.

Il est encore difficile de répertorier précisément les conditions de reproductibilité. Nous pouvons cependant identifier assez facilement des régularités dans les procédures mises en oeuvre par les étudiants ainsi que dans les erreurs qu'ils produisent, ce qui permet de reproduire assez facilement une partie des synthèses d'ordre didactique. En revanche, les phases de synthèses mathématiques s'appuyant largement sur les connaissances investies par les étudiants au cours de la résolution, sont beaucoup plus difficilement reproductibles. En effet, un apport d'informations ne peut prendre son sens que dans le cas où le degré de compétence en mathématique des étudiants le permet. Si les étudiants sont trop éloignés de ce degré, le professeur est obligé de "négocier à la baisse" l'institutionnalisation mathématique et en ce sens la situation a perdu une grande partie de sa pertinence.

Nous pouvons également faire l'hypothèse que le rôle du professeur dans la conduite de telles situations est tout à fait primordial. Or les comptes rendus rédigés ne soulignent pas toujours assez clairement ce rôle et lorsque celui-ci est peu explicité, l'interprétation par le collègue du protocole écrit entraîne parfois des effets mal maîtrisables lors de la mise en oeuvre.

En conclusion, il nous semble que la mise en oeuvre de situations de ce type optimise le double rôle que nous assignons à la formation. Parallèlement, il nous paraît nécessaire de consacrer un certain nombre de séances à des activités soit d'entraînement sur les contenus mathématiques abordés au cours des situations, soit d'analyse de documents et de productions d'élèves sur ces thèmes, et de concevoir des synthèses plus globales sur certains concepts de didactique ainsi que des apports d'informations sur d'autres qui d'après nous ne peuvent être abordés par ce type de travail.