

ATELIER A

TITRE : APPROCHE DE LA GEOMETRIE EN FORMATION INITIALE :
TEMOIGNAGES DE PRATIQUE.

AUTEURS : NICOLE BONNET (IUFM et IREM de Bourgogne), YVES GIRMENS(IUFM et IREM de Montpellier), CLAUDE MAURIN(IUFM et IREM D'Aix- Marseille), LOUIS ROYE(IREM de Lille).

Date : Novembre 2001

Résumé : Il s'agit de la présentation d'exemples de démarches pour aborder la géométrie en formation initiale des professeurs des écoles, en première et deuxième année, selon des points de vue différents.

INTRODUCTION

Le but de cet atelier était de provoquer une réflexion entre formateurs nouveaux et confirmés sur la manière d'aborder la géométrie en formation initiale des professeurs des écoles.

L'atelier s'est déroulé en deux temps :

1. Présentation de deux exemples d'entrée dans la géométrie dans le cadre de la préparation au concours des PE :
 - Un dispositif de formation autour de la géométrie plane (Nicole BONNET).
 - Une proposition de travail pour aborder les droites particulières d'un triangle (Claude MAURIN).
2. Présentation de deux démarches en formation didactique des PE2 :
 - Une entrée dans la géométrie par les problèmes en cycle trois (Louis ROYE).
 - Une entrée par un questionnement sur les connaissances géométriques à l'entrée au collège (Yves GIRMENS).

I- DEUX EXEMPLES D'ENTREE DANS LA GEOMETRIE EN PREMIERE ANNEE PE

1. Un Dispositif de formation en géométrie plane (Nicole Bonnet)

Résumé : Présentation du dispositif de formation autour de la géométrie plane axée autour de deux pôles :

Le cours magistral permet de stabiliser les connaissances mathématiques et de donner des éléments didactiques utiles par la suite ;

Les T.P. constituent une mise en pratique des exercices de partie théorique et des analyses didactiques.

1. Le contexte de Dijon

Nous ne sommes que deux professeurs de mathématiques au centre I.U.F.M. de Dijon : Mr RENAUT Olivier et moi même. Il n'y a pas pour le moment de formateurs associés.

En formation initiale nous devons gérer 4 classes de PE2, soit 120 stagiaires au total et 4 classes de PE1, soit environ 130 étudiants. Le décompte horaire à l'année est le suivant : 39 heures pour les PE2 et 84 heures réparties en 38 h de cours magistraux et 46 h de T.D pour les PE1. Notre plan de formation prévoit des heures de cours magistraux en PE1.

Depuis deux ans, nous avons tenté d'unifier la formation des PE en mettant nos savoirs en commun. Nous avons ainsi enrichi notre banque d'exercices caractéristiques et le cours magistral commun s'est amélioré.

Dans la suite, je vais décrire comment, pour une unité de formation en géométrie plane, nous distribuons nos actions.

2. La géométrie en PE1

- La répartition sur l'année des CM en géométrie se fait selon l'horaire suivant :
 1. Structuration, repérage : 2h
 2. GÉOMÉTRIE DES OBJETS PLANS : 4 h (mon intervention concerne ce chapitre)
 3. Géométrie des objets en 3 D : 3h
 4. Transformations géométriques : 3 h
- Les cours sont suivis de 5 à 6 heures de T.D. pendant lesquels nous traitons les exercices de la partie théorique et les exercices de didactique (travaux d'élèves inclus). Les exercices de la partie théorique sont presque toujours donnés la semaine précédente aux étudiants. La didactique est traitée en classe avec un support corrigé qui permet de consolider certaines parties qui nous ont paru moins fondamentales.
- De plus, nous donnons des devoirs à la maison (5) et des devoirs blancs (3).

3. Géométrie des objets plans

- Le cours magistral est distribué en entrée d'amphi. Il s'agit ici d'un cours "à trous" afin que les étudiants ne suivent pas d'une manière trop passive et fassent aussi des tracés élémentaires (durant les autres cours, ils sont amenés à surligner ce que nous disons être important et à compléter le polycopié selon les anecdotes ou compléments que l'on peut faire sur le moment).

Le professeur commente le cours soit à l'aide du rétroprojecteur, soit à l'aide de l'ordinateur assisté par "Power Point". Ce cours de 39 pages traite de manière exhaustive à la fois des aspects théoriques et des aspects didactiques.

Vous pouvez en avoir un aperçu grâce au plan (annexe 7) et à quelques images "Power Point" (6 pages en annexe 8).

- Les T.D. se font en deux parties que nous alternons dans le temps.
- ◆ Partie théorique : deux fiches d'exercices. Quelques exemples sont donnés en annexe 6.
 - ◆ Partie didactique : Partie à 8 points à l'aide d'un exemple de concours Lyon 1999 (annexe 5) et travaux d'élèves, partie à 4 points : Nice 1998 (annexe 4).

4. Réflexions sur nos choix

4.1. Les cours magistraux

Ils permettent de gagner du temps face à un grand nombre d'étudiants. C'est une façon rapide de transmettre le plus possible d'informations. Connaissant les limites d'une pédagogie transmissive, nous usons de divers supports : rétroprojecteur, photocopiés, mise en action des auditeurs. Ce modèle est satisfaisant pour les étudiants car :

- ◆ Ils sont attentifs et motivés, demandeurs de connaissances pour réussir un concours difficile. Ils ne manquent aucun cours car les explications complémentaires orales sont absolument nécessaires à la compréhension des photocopiés.
- ◆ Leur expérience scolaire est encore relativement proche. Ils se souviennent de ce langage.
- ◆ Cet enseignement est particulièrement efficace pour structurer des connaissances disparates ou lacunaires.

4.2. Les T.D.

- ◆ Exercices théoriques.

Ils les cherchent durant la semaine. Trois motifs à cela :

- leur redonner l'habitude de chercher et refaire surgir des habitudes de résolution de problèmes ;
- les rendre plus rapides face à un problème ;
- gagner du temps car nous ne corrigeons que ceux qui nous semblent les plus complexes ou à leur demande.

- ◆ Exercices de didactique.

Il nous semble bon d'utiliser les annales comme outil de formation. En effet les étudiants achètent celles de l'année et les travaillent seuls. Nous choisissons des sujets "porteurs" afin de faire émerger des réflexions didactiques.

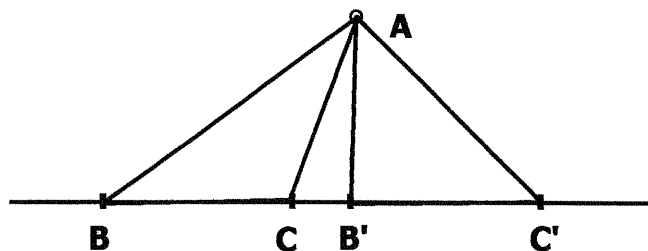
Parfois, nous demandons aux PE de rédiger une correction pour la semaine suivante. Un corrigé type est alors distribué afin qu'ils comparent et complètent leur réflexion. Sinon, le corrigé est distribué en fin de séance.

5. Quelques commentaires supplémentaires

5.1. Fiche géométrie du triangle et du quadrilatère (cf. annexe 6)

Ex1 : il permet de rappeler le "théorème des aires de triangles" : "*soient deux triangles ayant un sommet A commun, ABC et AB'C'. On suppose de plus que les*

côtés opposés à ce sommet commun, à savoir $[BC]$ et $[B'C']$ ont même longueur et sont portés par la même droite. Alors ces deux triangles ont la même aire".



Ex2 : Utilisation directe de ce théorème.

Ex3 : Rappel des propriétés de médianes et du centre de gravité.

Ex4 : Réutilisation du théorème des milieux.

5.2. Fiche exercices de constructions (cf. annexe 6).

Ex2, Ex3 : Réutiliser le fait que les hauteurs se coupent en un point appelé orthocentre du triangle.

Ex1 : Réutiliser une définition de médiatrice de triangle. Savoir qu'un problème peut avoir différentes solutions. En profiter pour refaire un panorama des définitions et propriétés.

5.3. Fiche n°1 : Sujet de Nice 1998 (annexe 4).

Des questions complémentaires au sujet sont posées lors de la séance. Soit elles sont issues de la réflexion des étudiants, soit nous les y engageons :

- Qu'est-ce qu'une figure identique ?
- Qu'est-ce qu'un "bon" écrit ? Quels types d'écrits ? Quels mots accepter ?
- Qu'est-ce qu'une variable didactique en géométrie ?
- Comment voir une figure ? Le carré en premier ou le cercle en premier ?

5.4. Fiche n°2 : sujet de Lyon 1999 (annexe 5).

Des questions complémentaires au sujet se posent également :

- Les situations de communication en géométrie, pourquoi faire ?
- Quelles propriétés énoncer à l'école élémentaire ? Quel vocabulaire ? Que dire du mot "quelconque" ?
- Aurait-on pu faire la même chose avec des triangles ? Avec des polygones ? Avec des solides de l'espace ?
- Les schémas doivent-ils être faits sur une feuille orientée ? Représentés avec du carton ? Autre ?
- À propos de la question 3, le maître aura-t-il à valider une seule production ? Les PE1 sont souvent perturbés par le fait **qu'il n'y a pas une seule bonne réponse.**
- À quoi servent les illustrations ? (sur l'annexe 3 du sujet)
- Les problèmes de photocopie qui déforment. Doit-on tricher ?
- Comment utiliser des gabarits (qu'est-ce que c'est ? Du calque ?)

- Comment et pourquoi s'éloigner de l'approche perceptive si commode et que les PE1 ont encore trop souvent ?
- Le contrat didactique du PE1 face au concours : quelles sont les réponses attendues pour une question donnée ? On ne comprend pas toujours les questions ... Exemple du corrigé des annales pour la question 3. Il n'explicite pas les critères qui ont guidé le choix. Que faire ?

6. Réactions des participants et commentaires

- ♦ - Souvent la correction apportée dans les annales est trop brève pour que les formateurs débutants y trouvent un réel outil pour eux-mêmes.
 - Oui, c'est pour cela que nous réécrivons toujours les corrections à notre façon. Elles sont explicitées et donc rallongées. Avantage : elles permettent d'exemplifier les notions de didactique que nous croyons reconnaître. Inconvénient : les étudiants ne savent pas toujours ce qu'il fallait répondre pour avoir une bonne note à la question.
- ♦ - La question du décalage entre ce que nous leur faisons vivre (cours magistral et exercices de type collège) et leur futur métier d'enseignants du primaire.
 - La formation en PE1 a un premier objectif : celui de leur faire réussir un concours difficile. Nous nous en donnons les moyens par ce biais. En PE2, tout est différent et nous pouvons alors nous permettre d'évacuer toute partie théorique pour ne nous consacrer qu'à des activités.

2. Utilisation d'un triangle gabarit pour tracer des droites remarquables dans un triangle (Claude Maurin)

Introduction

Il s'agit d'une activité proposée en PE1 pour travailler sur les transformations géométriques du plan en les associant à des manipulations effectives sur des objets, à savoir en utilisant comme outil de construction un gabarit en carton de forme triangulaire. Elle permet notamment de montrer l'intérêt de définir la médiatrice d'un segment ou la bissectrice d'un secteur angulaire comme axe de symétrie du segment ou du secteur angulaire. L'idée de cette activité est née de la lecture de l'ouvrage de Bernard BETTINELLI accompagnant la mallette de matériel « La moisson des formes » qu'il édite¹.

Cette activité nécessite que chaque participant possède une règle (considérée comme non graduée) et un gabarit en carton de forme triangulaire.

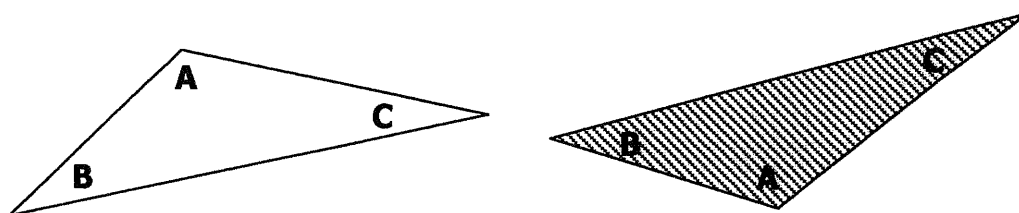
On peut choisir de laisser chacun fabriquer le triangle de son choix pour amener une réflexion sur l'inadaptation des triangles proches d'un triangle isocèle dans ce type d'activité, le triangle retourné étant pratiquement superposable au triangle non retourné. Ceci conduit à revenir sur la propriété pour une figure de posséder un axe de symétrie et à redéfinir cette propriété.

¹ Bernard Bettinelli 1, rue de la Perrouse 25115 Pouilley-les-Vignes ; prix : 50 euros

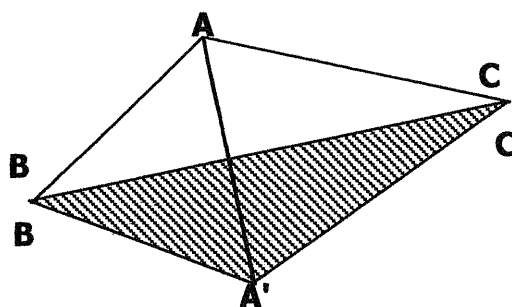
Nous avons fait le choix de demander à chaque participant de construire sur une plaque de carton, puis de découper, un triangle en carton le plus "quelconque" possible. Par exemple avec les mesures suivantes : 6 ; 3 ; 4 qui peuvent être imposées par le formateur afin que des comparaisons puissent être faites plus facilement entre les participants. Il est conseillé au formateur de fabriquer un triangle cartonné de même forme mais agrandi pour permettre les manipulations au tableau.

On colorie ou on hachure une face, là encore il est souhaitable de préciser laquelle en fixant une orientation du triangle qui soit la même pour tous.

On utilise ce triangle comme gabarit pour tracer un triangle ABC. Plutôt que tracer tout le contour du triangle on pourra se contenter de marquer la position des points sommets, puis les relier entre eux avec la règle pour terminer le triangle proprement.



Problème 1 : En n'utilisant que le gabarit de carton et la règle, construire une hauteur du triangle ABC, par exemple celle issue de A.



Action : On retourne le triangle autour de la droite (BC). On marque le point A' qui est la nouvelle position du sommet A.

Question : Pourquoi (AA') est-elle perpendiculaire à (BC) ?

Démonstration :

$BA = BA'$ donc B appartient à la médiatrice de $[AA']$
 $CA = CA'$ donc C appartient à la médiatrice de $[AA']$ } (BC) est la médiatrice de $[AA']$

ce qui signifie en particulier que (AA') et (BC) sont perpendiculaires.

Institutionnalisation :

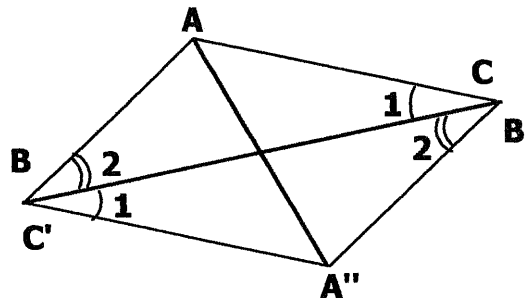
Par cette manipulation, on vient de construire le point A' qui est le symétrique du point A par rapport à la droite (BC) . Il s'agit ici de la symétrie orthogonale d'axe (BC) ou encore de la symétrie axiale d'axe (BC) . On peut en rappeler la définition et dresser le tableau de correspondance suivant :

$$A \mapsto A'$$

$$B \mapsto B \quad \text{en faisant remarquer par exemple que } [AB] \text{ devient } [A'B]$$

$$C \mapsto C \quad \text{avec } AB = A'B$$

Problème 2 : En n'utilisant que le gabarit de carton et la règle, construire les médianes du triangle. Commencer par celle issue de A .



Action : On fait tourner le triangle autour du milieu du segment $[BC]$, de telle sorte que B vienne sur C et C sur B . On marque le point A'' qui est la nouvelle position occupée par le sommet A .

Question : Pourquoi (AA'') coupe-t-elle $[BC]$ en son milieu ?

Démonstration :

- *Démonstration 1 :* On a un quadrilatère convexe qui a ses côtés opposés de même longueur car portés par le même côté du gabarit : $AB = A''B'$ et $AC = A''C'$. C'est donc un parallélogramme. Or on sait que les diagonales du parallélogramme se coupent en leur milieu. Donc $[AA'']$ coupe $[BC]$ en son milieu.
- *Démonstration 2 :* Elle se fait à l'aide des égalités angulaires : $\widehat{C}1 = \widehat{C}'1$ car portés par le même angle du gabarit. De plus ces angles sont en position d'angles alterne-interne par rapport aux deux droites (AC) et $(A''C')$ et à la sécante (BC) donc les droites (AC) et $(A''C')$ sont parallèles. De même $\widehat{B}2 = \widehat{B}'2$ ce qui signifie que les droites (AB) et $(A''B')$ sont parallèles. Un quadrilatère qui a ses côtés opposés parallèles est un parallélogramme, donc $(ABA''C)$ est un parallélogramme et ses diagonales se coupent en leur milieu.

Institutionnalisation :

Par cette manipulation on vient de construire le point A'' qui est le symétrique du point A par rapport au milieu du segment $[BC]$. Il s'agit ici d'une symétrie centrale ou d'une rotation d'angle 180° , encore appelée demi-tour. Cette transformation n'a pas

nécessité le retournement du gabarit, il ne faut pas la confondre avec la symétrie axiale rencontrée précédemment. (On peut éventuellement rappeler les définitions).

Il s'agira donc de préciser clairement de quel "symétrique" on parle, en faisant bien la distinction entre symétrie centrale et symétrie axiale.

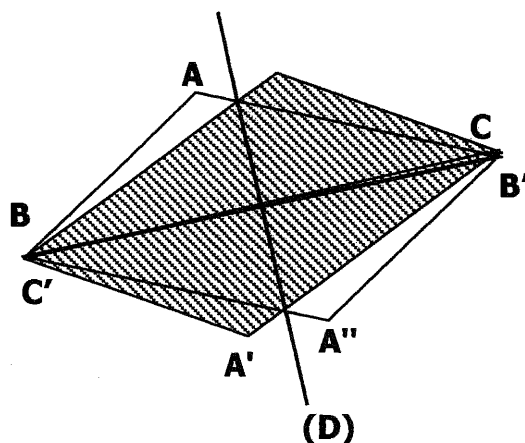
On peut aussi dresser le tableau de correspondance suivant :

$$A \mapsto A''$$

$$B \mapsto B' \quad \text{en faisant remarquer par exemple que } [AB] \text{ devient } [A''B']$$

$$C \mapsto C' \quad \text{avec } AB = A''B'$$

Problème 3 : En n'utilisant que le gabarit de carton et la règle, construire les médiatrices du triangle ABC. Commencer par celle issue de A.



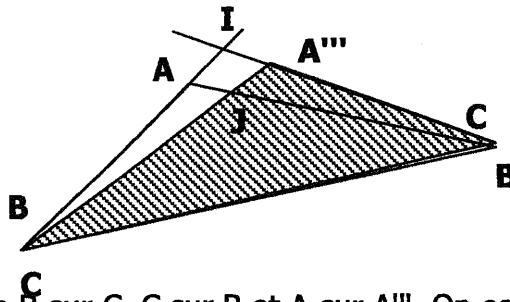
Action : On a envie d'utiliser les constructions précédentes : on trace une hauteur, puis on la fait glisser sur la droite (BC), mais on n'est pas très sûr de conserver l'orthogonalité.

Généralement on voit alors apparaître la double construction ci-dessus avec la conviction que le point d'intersection de $[A'B]$ et $[A'C]$ d'une part et son symétrique d'autre part, sont deux points de la médiatrice, mais les arguments géométriques font souvent défaut pour le justifier, bien qu'il soit possible d'y parvenir en prouvant l'existence de triangles isocèles grâce aux angles de base égaux.

Question : Pourquoi (D) est-elle la médiatrice de $[BC]$?

Démonstration : On peut comparer deux types de démonstrations et de constructions : la construction précédente associée à une démonstration qui s'appuie sur l'existence de triangles isocèles, comme évoqué ci-dessus ; et la construction ci-dessous, associée à une démonstration qui s'appuie sur la propriété de se couper sur l'axe de symétrie qu'ont une droite non parallèle à l'axe et son image dans une symétrie axiale ; ce qui oblige à rappeler et à expliciter la propriété, et à en montrer l'intérêt comme outil permettant de résoudre efficacement un problème.

On va s'aider de la figure suivante en précisant la manipulation qui a été effectuée :



Un retournement amène B sur C, C sur B et A sur A''. On est donc en présence d'une symétrie axiale ou orthogonale dont l'axe est un axe de symétrie du segment [BC] car il est globalement invariant, un tel axe est la médiatrice de [BC] et A''BC est donc le symétrique de ABC par rapport à cette médiatrice (D) (que l'on ne connaît pas encore).

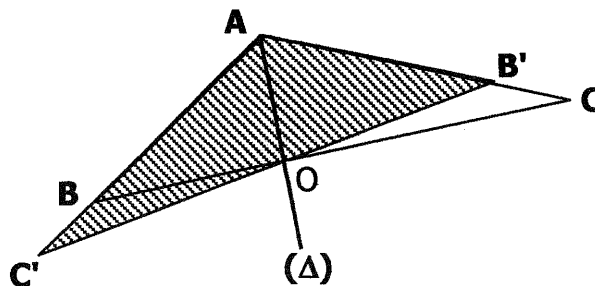
$$\begin{aligned}
 &S_D \\
 &A \mapsto A'' \\
 &B \mapsto C \\
 &C \mapsto B
 \end{aligned}$$

La symétrie orthogonale transforme la droite (AB), non parallèle à l'axe (car le triangle ABC a été choisi non rectangle en B) en une autre droite (A''C), elles sont donc sécantes sur l'axe de symétrie. Donc I est un point (invariant) de cet axe. De même l'image de la droite (AC), non parallèle à l'axe (car le triangle ABC a été choisi non rectangle en C) est (A''B) dans cette symétrie, elles se coupent donc en un point de l'axe de symétrie. Donc J est aussi un point de l'axe. La droite (IJ) est donc la médiatrice cherchée.

Institutionnalisation :

Il peut être intéressant de définir une médiatrice comme axe de symétrie d'un segment. Cela peut permettre d'utiliser certaines propriétés de la symétrie orthogonale pour résoudre le problème posé.

Problème 4 : En n'utilisant que le gabarit de carton et la règle, construire la bissectrice de l'angle $\hat{A}$



Action : On doit retourner le triangle de départ dans le secteur angulaire de sommet A de telle sorte que $[AB)$ vienne sur $[AC)$ et que $[AC)$ vienne sur $[AB)$. On obtient alors les points B' et C' qui sont les symétriques respectifs de B et C par rapport à l'axe de symétrie du secteur angulaire, c'est à dire par rapport à la bissectrice de l'angle $\hat{A}$.

Question : Pourquoi (Δ) est-elle une bissectrice de l'angle $\hat{A}$?

Démonstration : Ici encore il est important de caractériser la bissectrice par sa propriété d'être l'axe de symétrie du secteur angulaire, car la manipulation qui a été effectuée permet d'affirmer qu'on a fait agir une symétrie axiale ou orthogonale par rapport à l'axe de symétrie (Δ) du secteur angulaire, donc par rapport à la bissectrice de l'angle $\hat{A}$ (si la confusion entre secteur angulaire et angle est admise). Dans la symétrie dont (Δ) est l'axe on a :

$$\begin{array}{l} S_{\Delta} \\ A \mapsto A \\ B \mapsto B' \\ C \mapsto C' \end{array}$$

La droite (BC) qui n'est pas parallèle à l'axe de symétrie, se transforme en $(B'C')$. Elles se coupent en O point de l'axe de symétrie. De plus A est invariant par cette symétrie. La droite (AO) est donc l'axe cherché.

Institutionnalisation :

Il peut être intéressant de caractériser une bissectrice par sa propriété d'être l'axe de symétrie du secteur angulaire, cela ouvre les portes de raisonnements basés sur les propriétés de la symétrie orthogonale qui sont des outils efficaces dans la résolution de problèmes tels que celui que nous venons de rencontrer.

On peut aussi prolonger l'étude et montrer que tout point de l'axe de symétrie est équidistant des deux côtés du secteur, avant d'étudier la réciproque.

Bilan final :

Par le biais de ces constructions non conventionnelles, nous avons tenté de distinguer symétrie axiale et symétrie centrale, nous avons vu l'intérêt d'utiliser les définitions de la médiatrice d'un segment et de la bissectrice d'un secteur angulaire comme axe de symétrie et nous avons fait fonctionner comme outil de résolution d'un problème géométrique la propriété qu'a une droite non parallèle à l'axe de symétrie, de se transformer en une droite qui coupe la première sur l'axe de symétrie.

II- DEUX DEMARCHES EN FORMATION DES PE 2

1. Une entrée par les problèmes de géométrie en cycle trois (Louis ROYE)

a) Comment aborder l'enseignement de la géométrie en formation didactique des PE2

Au départ, une question :

"Quelles connaissances géométriques les élèves doivent-ils absolument avoir acquises en sortant de l'école primaire ?"

Répondre à cette question en termes de notions (triangle, carré, rectangle, losange, cercle, cube, parallélépipède rectangle) est évidemment réducteur, tant la façon dont les élèves auront appréhendé ces notions, les relations qu'ils verront entre elles et les images mentales qu'elles évoqueront en eux influencent l'utilisation qu'ils pourront en faire dans les résolutions de problèmes.

C'est ainsi que les programmes décrivent les compétences à acquérir en les liant aux différentes notions géométriques qui doivent être travaillées à l'école. La définition de ces compétences vise à clarifier les attentes, préciser les priorités, fournir des repères en vue d'aider dans le travail de programmation et dans la mise au point des évaluations qui permettent d'en baliser la réalisation.

Pour autant ces listes de compétences ne déterminent pas les moyens pédagogiques à mettre en œuvre pour atteindre les objectifs. Toutefois, conséquence des travaux actuels en didactique des mathématiques et en psychologie cognitive, l'accent est mis sur la place centrale qu'occupe la résolution de problèmes tant dans la construction et l'appropriation par les élèves des notions mathématiques que dans le développement des compétences liées à ces différentes notions.

Les questions cruciales qui se posent alors dans la formation des enseignants concernent le choix et l'articulation des situations à proposer aux élèves de l'école afin, qu'à travers elles, ceux-ci puissent non seulement acquérir des connaissances mais aussi apprendre à résoudre des problèmes dans le domaine de la géométrie. Au niveau de l'organisation du travail et de la gestion de classe, il s'agit, en définitive, dans la formation, d'éclairer ce que peuvent être des activités de résolution de problèmes de géométrie à l'école.

Dans les activités proposées, il semble nécessaire de permettre aux stagiaires de :

- mieux connaître les enjeux des résolutions de problèmes à l'école quant à l'acquisition de connaissances géométriques et des compétences qui leur sont liées
- dégager (les opérations mentales), les instruments de la pensée géométrique qui sont le plus souvent efficaces lorsqu'on résout un problème de géométrie à l'école et au début du collège, ce que Nicolas Ruche appelle les objets mentaux

- mieux cerner les significations des verbes comparer, décrire, construire, représenter des objets géométriques (figures planes, solides) ou des assemblages d'objets.

- faire ressortir l'intérêt de l'analyse de la tâche dans l'adéquation des situations choisies aux compétences à acquérir, dans la prévision des aides spécifiques à apporter aux élèves dans la résolution de problèmes géométriques (fonction de médiation dans la relation sujet - tâche) et par suite dans l'organisation des situations d'apprentissage en géométrie

- mieux identifier la place du langage géométrique dans la construction des concepts géométriques et dans leur articulation les uns aux autres

b) Démarche choisie pour entrer dans cette problématique

1) Résolution de deux problèmes et analyse de stratégies de résolution

Proposer aux stagiaires de résoudre deux problèmes puis, au cours d'une mise en commun, de mettre en évidence certains "instruments de la pensée géométrique" par l'analyse des stratégies mises en œuvre. Les deux problèmes sont choisis et mis en situation de façon à ce que les stagiaires puissent mobiliser leurs connaissances sans être mis en difficulté.

(Ces deux problèmes et leur analyse sont extraits de la conférence prononcée par Thérèse Gilbert au cours de la journée académique de l'école primaire organisée par l'IREM de Lille, cf. référence dans la bibliographie)

1er problème

On donne un segment désigné par $[AB]$ (figure 1). On demande de trouver tous les points C tels que le triangle ABC soit isocèle.

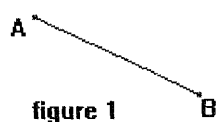


figure 1

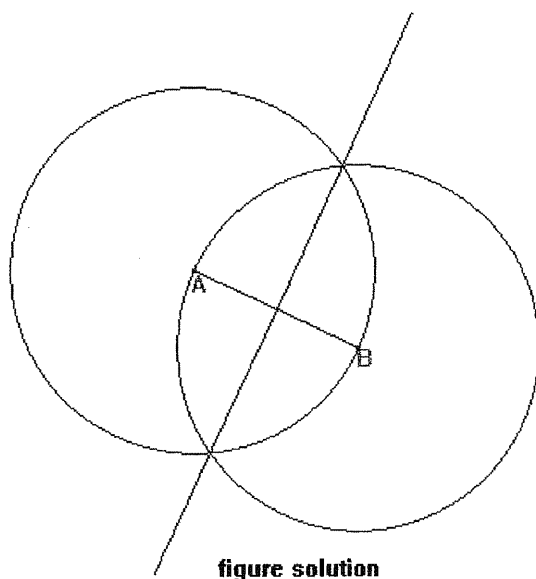


figure solution

Ce problème permet de mettre en évidence les opérations mentales suivantes :

- déplacer mentalement une figure (ici le segment donné initialement) dans une position où, dans une "géométrie naturelle" (cf. Houdement, Kuzniak), les intuitions émergent plus facilement,
- évoquer les connaissances adéquates (construction de l'un des triangles isocèles)
- imaginer des mouvements (médiatrice d'un segment conçue comme l'ensemble des sommets C des triangles isocèles dont la "base" est $[AB]$)
- considérer une figure sous un autre point de vue, c'est-à-dire se représenter une situation différemment (ici considérer $[AB]$ comme l'un des deux côtés de même longueur du triangle isocèle cherché)
- imaginer un mouvement (ici le mouvement qui engendre le cercle de centre A et de rayon AB dans l'hypothèse $AB = AC$)
- évoquer la symétrie axiale (le cercle symétrique du cercle (A, AB) par rapport à la médiatrice de $[AB]$)

2ème problème

On donne un segment de droite désigné par $[AB]$ (figure 2). On demande de trouver tous les points C tels que le triangle ABC soit rectangle.

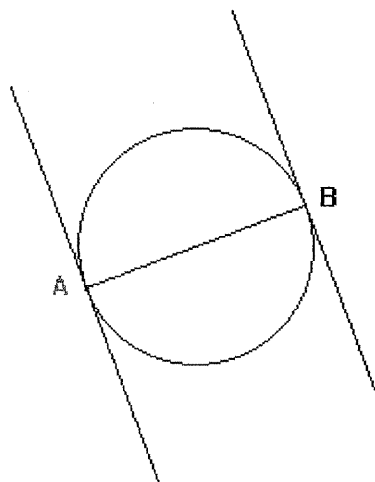
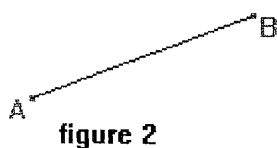


figure solution

Ce problème permet de mettre en évidence les opérations mentales suivantes :

- évoquer une connaissance (construction de l'un des triangles rectangles en A, (AB) étant considéré comme l'un des côtés de l'angle droit de l'un des triangles rectangles)
- imaginer un mouvement d'un point C sur la perpendiculaire en A à (AB)
- évoquer la symétrie par rapport à la médiatrice de $[AB]$ pour traiter le cas où les triangles sont rectangles en B
- évoquer des connaissances pour construire un triangle rectangle d'hypoténuse $[AB]$

- enrichir une figure par le repérage d'une surfigure (ici considérer [AB] comme la diagonale d'un rectangle)
- changer l'énoncé d'un problème (on cherche l'ensemble des troisième et quatrième sommets des rectangles dont [AB] est une diagonale)
- évoquer une connaissance (les diagonales d'un rectangle se coupent en leur milieu)
- imaginer un mouvement (le cercle engendré en faisant pivoter [AB] autour de son milieu est l'ensemble des sommets C des triangles rectangles d'hypoténuse [AB])

Cette entrée en matière par la résolution de deux problèmes qui relèvent en fait de l'enseignement au collège permet d'enrichir la réflexion sur la géométrie au Primaire ; L'analyse des démarches mène à la mise en évidence d'instruments de la pensée géométrique mis en œuvre dans les raisonnements. Certains de ces instruments seront développés et complétés ci-après dans l'étude de situations proposées dans des classes du cycle 3 et apparaîtront comme critères dans la détermination de l'intérêt que présente telle ou telle situation du point de vue des apprentissages géométriques à l'école.

2) Analyse de deux situations mises en œuvre dans des classes de CM1 et CM2

Ces deux situations ont été choisies et gérées de façon que les tâches proposées aux élèves soient bien perçues par eux comme des problèmes à résoudre, c'est-à-dire des situations dans lesquelles ils doivent chercher, faire des hypothèses, des essais, accepter de ne pas trouver tout de suite, risquer de se tromper, devoir revenir en arrière. Elles sont centrées sur l'apprentissage à la résolution de problèmes du domaine géométrique.

Première situation proposée à des élèves de CM1

a) Présentation

Souvent on demande aux élèves de l'école d'effectuer des classifications de polygones sans que la situation leur apparaisse comme fonctionnelle. Ici, dans cette situation où la communication entre élèves est requise, les classifications vont s'affiner successivement pour aboutir à donner la réponse au problème posé. En ce sens la classification est fonctionnelle.

Il s'agit de poser des questions pour pouvoir identifier parmi une douzaine de polygones tracés, la pièce manquante d'un puzzle.

Le puzzle (figure 1) est communiqué à un groupe de 4 élèves. Le figure grisée indique la pièce manquante

Les autres élèves, par groupes de deux ou quatre, reçoivent le document 2 sur lequel on a tracé 14 figures parmi lesquelles se trouve la pièce manquante du puzzle.

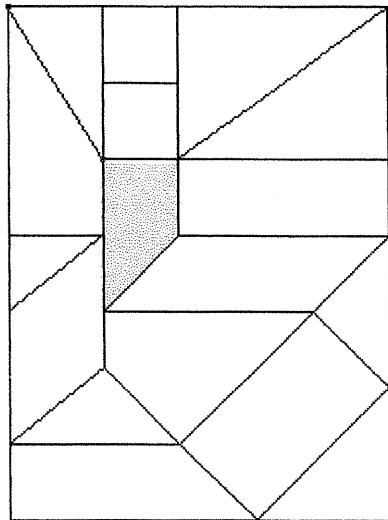
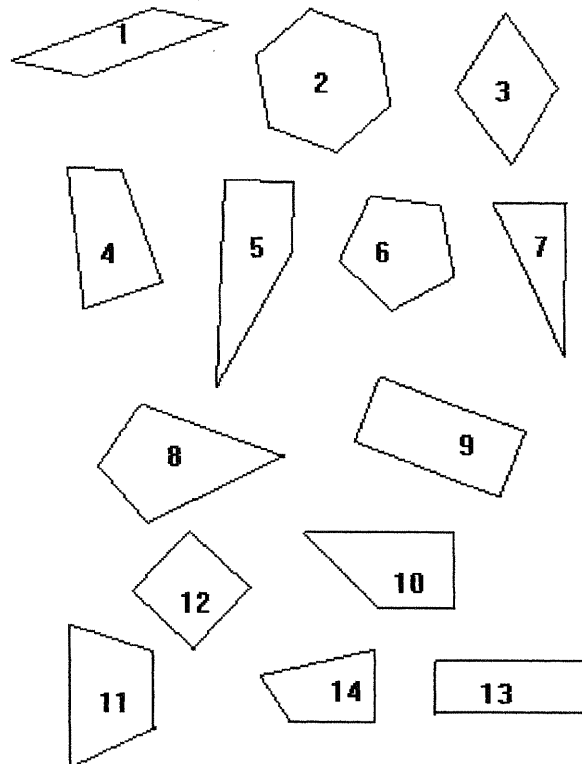


figure 1



document 2

b) Travail proposé aux stagiaires à partir de cette première situation

Travail par groupes

Les objectifs visés par la maîtresse de la classe en fonction de sa progression et de l'évolution des élèves sont donnés :

Objectifs

En vue de retrouver la pièce manquante d'un puzzle, mettre les élèves en situation

- d'utiliser un vocabulaire géométrique précis.
- d'identifier les éléments constitutifs d'un polygone : nombre de côtés, relations entre ces côtés, nombre d'angles droits, éléments de symétrie.
- de mettre en évidence les propriétés communes à certaines figures.
- de mettre en évidence les propriétés qui différencient entre elles certaines figures.
- d' "affiner" le questionnement en fonction des réponses reçues.

Pour les stagiaires, il s'agit par l'analyse de la tâche, à partir de l'anticipation des stratégies que pourraient développer les élèves, de déterminer l'intérêt de ce problème par rapport aux objectifs visés, d'en expliciter les raisons et, à la lumière de cette analyse de prévoir les aides à apporter aux élèves à la fois dans la phase de résolution et dans la phase d'exploitation.

Ce qui peut plus particulièrement être retiré de ce travail concerne

- l'aspect ludique de la situation,

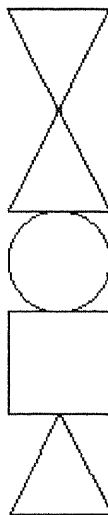
- l'aspect fonctionnel des connaissances relatives aux propriétés des polygones en ce sens qu'elles permettent de résoudre le problème posé,
- la mise en évidence du rôle du langage dans ses fonction de communication, de représentation et d'aide à la pensée,
- l'argumentation qui se développe lors de l'analyse a posteriori du questionnement optimal.

S'exprimer et argumenter sont considérés ici comme outils de pensée pour objectiver sa pensée, dépasser ses intuitions.

Deuxième situation proposée aux élèves de CM2

a) Présentation de la situation proposée aux élèves de CM2

La figure ci-après est à l'échelle 1/3 par rapport au modèle donné aux élèves



Reproduis exactement la figure en utilisant les instruments de ton choix

b) Travail proposé aux stagiaires

1° Reproduire le modèle à l'aide des instruments usuels du dessin. Travail par groupe de 4. Dans chaque groupe l'un des quatre stagiaires note l'évolution de la recherche d'une stratégie pour la réalisation de la reproduction demandée. Chacun des trois autres devra effectivement réaliser la reproduction.

2° Mise en commun. Chaque rapporteur expose rapidement la procédure que son groupe a retenue. Les différentes démarches sont comparées.

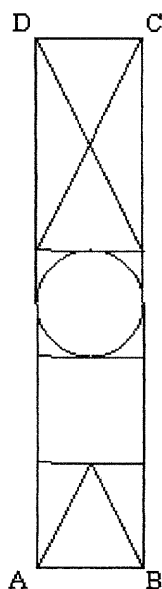
3° Les groupes se reforment dans le but de faire une analyse de la tâche à la fois sur le plan mathématique et sur le plan didactique.

L'objectif de ce travail de réflexion est d'élaborer une démarche pédagogique calquée sur la propre démarche des stagiaires et articulée sur le choix des situations et sur un déroulement de séquence en phases d'activités ménageant :

- l'appropriation du problème à résoudre sous la forme d'une première recherche individuelle
- un temps de réflexion permettant à chacun de préparer ce qu'il va dire au cours de la phase suivante de mise en commun
- la mise en commun consistant en fait à une analyse de la figure à reproduire (éventuellement à construire), cette phase est celle de l'attribution de significations géométriques aux éléments issus de l'analyse perceptive
- la réalisation individuelle de la tâche
- un retour sur les propriétés et la procédure, cette phase peut être par exemple celle de la rédaction collective d'un programme de construction.

Ce qui est à retirer de cette activité, c'est l'importance de l'analyse du modèle à reproduire qui mène :

- soit à repérer dans une figure complexe des figures élémentaires qui la composent et que l'on saura tracer avec les instruments du dessin pour reconstituer le tout
- soit, comme ci-dessous, à considérer la figure-modèle comme une partie d'une figure géométrique connue et qu'on pourra tracer pour isoler ensuite la partie concernée.



La construction du rectangle ABCD permet ensuite de repérer les sommets des différents polygones intérieurs à construire en reportant les longueurs prises sur le modèle

On retrouve dans cette activité les instruments de pensée déjà énoncés au début :

- évoquer les connaissances adéquates
- enrichir une figure ou une situation (ici considérer la surfigure que constitue le rectangle)
- Changer de point de vue, considérer une situation autrement.

Il est alors demandé aux stagiaires de faire une synthèse mettant en évidence différents critères qui pourront les guider dans le choix et l'organisation des situations.

Bibliographie

- Gilbert Thérèse, Quelques instruments de pensée en géométrie, conférence prononcée à Lille au cours de la journée académique de l'école primaire le 26 avril 2000. Actes disponibles à l'IREM de Lille

- Gonseth F. La géométrie et les problèmes de l'espace. Lausanne, Éditions du Griffon 1945-55

Groupe du Primaire de l'IREM de Lille, Travaux géométriques, apprendre à résoudre des problèmes au cycle 3, éd. CRDP du Nord - Pas-de-Calais, 2^{ème} trimestre 2000, 170 pages, disponible au CRDP du Nord - Pas-de-Calais

- Houdement Catherine, Kuzniak Alain, Réflexions sur l'enseignement de la géométrie, in Grand N n° 64, année 1998-99, IREM de Grenoble

- Rouche Nicolas, Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, pages 151 à 168, et al., éd. CREM a.b.s.l, Université de Louvain-la-Neuve, Belgique, 1995

2. Une entrée par un questionnaire sur les connaissances en début de collège (Yves GIRMENS)

a) Comment aborder l'enseignement de la géométrie en formation didactique des PE2 ?

Quand on veut aborder la question des pratiques géométriques à l'école primaire (en cycle trois surtout), on se heurte rapidement à trois difficultés :

- les stagiaires sont tiraillés entre deux points de vue, une vision de la géométrie comme une pratique de dessin technique à l'aide des instruments et un point de vue plus mathématique, glissant vers une pratique de géométrie déductive.
- Une opacité dans la logique de programmation des travaux géométriques proposée par les ouvrages.
- Des exemples de pratiques, rencontrés lors des stages, qui souvent ne valorisent pas la géométrie et qui n'en montrent pas les enjeux.

Il semble nécessaire, dans les activités proposées, de permettre aux professeurs stagiaires de :

- Mieux cerner ce qu'est une géométrie instrumentée : d'une part mieux saisir les liens entre l'utilisation d'instruments et la conceptualisation ; d'autre part mieux saisir les articulations entre géométrie du sensible, géométrie instrumentée et géométrie de propriétés.

- Mieux identifier la place du langage géométrique dans la construction des concepts géométriques, en particulier distinguer ce qui, dans les productions d'élèves, relève d'une erreur de vocabulaire ou ce qui révèle un manque conceptuel.
- Mieux connaître les enjeux des diverses tâches géométriques proposées à l'école primaire.

b) la démarche choisie :

Le choix a été fait d'utiliser un exercice de l'évaluation à l'entrée en classe de sixième de l'année 2000, afin de confronter les stagiaires aux connaissances des élèves en fin d'école primaire, ce qui permettra aussi d'aborder les questions relatives au passage de la géométrie de l'école primaire à celle du collège.

L'exercice choisi est une situation de communication (voir annexe 1), dans laquelle une figure est donnée à l'élève et où on lui demande de rédiger un message qui permettrait à quelqu'un qui ne la voit pas, de reproduire cette figure à l'identique.

Première phase : les connaissances d'un enfant de cycle trois sur les objets de la géométrie :

Dans un premier temps, il est demandé à chacun des stagiaires de rédiger un texte, en se plaçant dans la position d'un élève de cycle trois : cela vise à leur permettre, d'une part de faire le point sur les connaissances géométriques d'un enfant en fin d'apprentissage à l'école et d'autre part, de mesurer la difficulté de la tâche pour un enfant de ce niveau.

Dans un deuxième temps, les stagiaires sont mis en présence de cinq productions d'élèves, d'une classe de sixième jugée bonne : ils ont comme tâche, en groupes, de décrire et d'explicitier (voir annexe 2) les connaissances géométriques mises en œuvre par ces enfants puis de préciser si ces connaissances sont celles qui sont attendues en fin de cycle trois.

Deuxième phase : Les différents types de problèmes rencontrés en géométrie en cycle trois :

Les professeurs stagiaires sont invités, en groupes, à étudier un manuel de cycle 3 pour faire l'inventaire de tous les types de problèmes proposés par cet ouvrage en essayant, pour chaque catégorie, de définir les objectifs d'apprentissage .

Troisième phase : Proposer trois problèmes de types différents à un niveau donné.

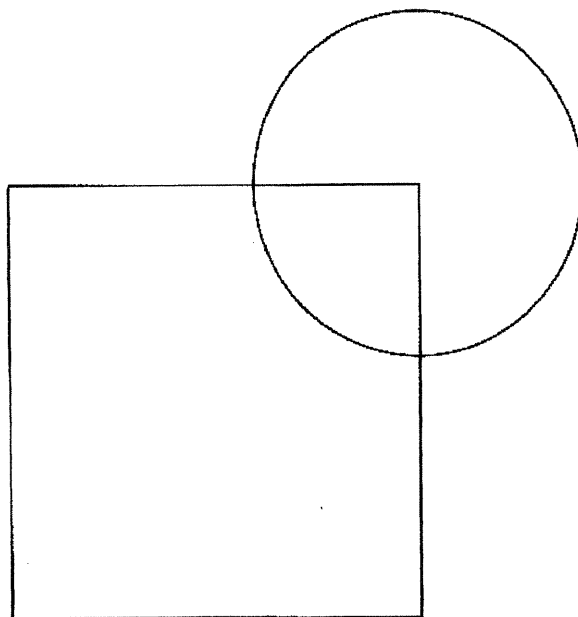
Les professeurs stagiaires ont à choisir trois problèmes :

- une situation de reproduction d'un dessin.
- Une situation de communication pour faire construire une figure.
- Une situation de fabrication d'un solide.

Pour chacun d'entre eux, ils doivent imaginer un scénario de mise en œuvre en classe.

ANNEXE N°1 : TEST D'EVALUATION DE SIXIEME, ANNEE 2000

Tests d'évaluation de sixième de septembre 2000

Exercice 37

Rédige un texte qui permet à quelqu'un qui ne voit pas la figure de la tracer en respectant les dimensions.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Rédigez le texte en utilisant les connaissances que, selon vous, on pourrait attendre d'un élève en fin de cycle trois.

ANNEXE N°2 : QUELQUES PRODUCTIONS D'ELEVES

Un échantillon de réponses à l'exercice 37, fournies par des élèves d'une classe de sixième jugée « bonne » (22 élèves).

- **Youssef :**

Trace une droite AB mesurant 5 cm.

Prends ton équerre et trace la perpendiculaire passant par A et la seconde B. Enfin trace la droite qui reliera le tout. Tu obtiens un carré. Trace un rayon de 2,2 cm qui part du coin du carré. Trace ton cercle et tu obtiens la figure.

- **Anaïs :**

Trace un cercle dont le rayon est de 2,2.

Trace une droite de 5,5 cm partant du centre du cercle. À partir de cette droite forme un carré de 5,5 de longueur et 5,5 de largeur.

- **Loïc :**

D'abord il faut faire un carré de 5,5 de largeur et 5,5 en longueur, et un cercle qui fait 2,2 cm qui passe au dessus du carré, qui rentre dans une pointe du carré de 2,2 cm.

- **Mikaël :**

Fais un carré de 5,5 et un cercle de 2,2 centimètres.

- **Ophélie :**

Trace un carré de 5,5 cm de côté. Trace un cercle de 2,2 cm de rayon sur l'angle droit en haut à gauche, celui ci te servira de centre.

Ces écrits révèlent des formes de connaissances géométriques : pouvez-vous les expliciter ?

Ces connaissances sont-elles attendues ou inattendues ?

ANNEXE N°3 : QUELQUES ELEMENTS D'ANALYSE

L'analyse des productions d'élèves par les PE2 permet de mettre en évidence :

- 2) que ces écrits font apparaître des rapports différents aux objets de la géométrie :
 - la reconnaissance visuelle de formes géométriques : description de ce que l'on voit sans référence à la façon dont les objets sont générés.
 - l'expression de connaissances spatio-géométriques : aucun lien entre les deux figures élémentaires ou bien prise en compte du critère de position.
 - la description de gestes d'actions de tracé (géométrie du trait).
 - une amorce de conceptualisation : formulation du minimum d'informations pour définir un objet dont on connaît une caractérisation géométrique : « un carré de 5,5 » ; « un cercle de 2,2 ».
- 3) qu'il ne faut pas s'arrêter au vocabulaire utilisé : une méconnaissance, un emploi incorrect ou imprécis du vocabulaire peut aussi bien être l'indice de manques profonds sur la connaissance des objets géométriques que celui d'une réelle connaissance des caractéristiques géométriques de ces objets mais formulés avec des termes imprécis ou relevant de la perception (le coin du carré par exemple).
- 4) que dans une géométrie instrumentée ce sont les instruments qui donnent un statut aux objets mathématiques, car ce sont eux qui en déterminent les propriétés.
- 5) que dans une situation de communication, où la nécessité de l'anticipation exige la description du dessin à l'aide de caractères géométriques (déterminés par l'utilisation d'instruments), c'est le registre du langage qui permet de sortir du domaine de la perception et ainsi de faire exister un objet sous la forme d'une description de constructions et de relations mathématiques.

Note : les productions d'élèves ont été recueillies par Mirène Larguier, professeur au collège de Lunel (34).

ANNEXE N° 4 : TRAVAUX D' ELEVES NICE 1998

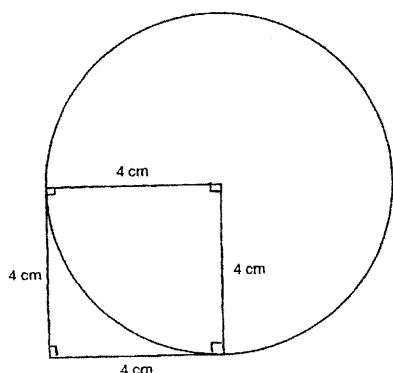
PREMIER VOLET - DEUXIÈME PARTIE

Analyse de travaux d'élèves (4 points)

L'exercice 41 de l'évaluation à l'entrée en 6e 1997 est :

Exercice 41

Écris un texte pour permettre à quelqu'un qui ne voit pas la figure de la tracer en : dimensions indiquées.



Elève B

Tracer un carré de 4 cm de longueur et 4 cm de largeur. Cocher les angles droits. Après avoir fait cette figure tracer un cercle de 4 cm passant par C et A.

Elève C

Il y a un carré de 16 cm autrement dit 4 cm de côté il a quatre angles droits et ses côtés sont égaux il y a un cercle qui est inscrit dans le carré et il coupe la diagonale du côté de la droite, il y a un sommet du carré au milieu du cercle qui est le centre de ce cercle et les deux autres côtés qui sont dans le cercle sont son rayon du cercle.

Voici 4 productions d'enfants :

Elève A

Tracer un carré de 4 cm de côté. Faire un cercle de 4 cm de rayon passant par 2 angles du carré. Les deux angles sont en diagonales.

Elève D

Tracer un carré de 4 cm sur 4 cm ABCD (A en haut à gauche, B en bas à gauche, C en haut à droite, D en bas à droite). Tracer un cercle qui a pour centre C passant par A et D.

Questions :

1°) A travers la tâche proposée aux élèves, indiquer les trois principales compétences que l'on veut évaluer.

2°) Montrer que le texte proposé par l'élève B peut conduire aussi bien à la production d'une figure correcte que d'une figure incorrecte. Construire une figure incorrecte à partir de ce texte.

3°) Relever les erreurs éventuelles des productions des élèves A et D.

4°) Production de l'élève C :

Sans ajouter aucun mot, ni changer l'ordre des informations, réécrire la production de l'élève C en enlevant les informations mathématiques inutiles.

ANNEXE 5 : VOLET 2 LYON 1999

DEUXIEME VOLET

(8 points)

Un enseignant de CM1 se propose d'utiliser les supports fournis dans l'**annexe 3** pour les deux activités suivantes :

Activité 1 : " Jeu du portrait " à partir des figures données en annexe 3.

Les élèves disposent d'une fiche sur laquelle sont reproduites ces figures (sans les questions a et b). L'enseignant annonce aux élèves qu'il a choisi une des figures et qu'ils doivent la retrouver en lui posant des questions. Au début, les questions sont libres (sauf celles qui mentionnent la position des figures sur la feuille ou les lettres qui les désignent) ; ensuite les questions mentionnant les noms des figures sont interdites (par exemple, la question " *Est-ce un rectangle ?* " est maintenant interdite).

Activité 2 : Exercice écrit : répondre aux questions a et b figurant dans l'**annexe 3**.

1. Analyse de l'activité 1

- 1.1 Quelles compétences générales et quelles connaissances relatives aux quadrilatères peuvent être mises en œuvre dans ce " jeu du portrait " ?
- 1.2 Analyser le choix des caractéristiques des figures de l'**annexe 3** en référence aux objectifs que peut viser l'enseignant à travers l'exploitation du " jeu du portrait ".
- 1.3 Après avoir fait jouer au " jeu du portrait ", l'enseignant demande à chaque élève de choisir l'une des figures et de fournir un message écrit comportant des renseignements qui permettront aux autres élèves de retrouver la figure choisie. Il impose comme contrainte de ne pas citer de nom de figure. Un élève choisit la figure B.

Indiquer en quoi cette activité de production de messages met en jeu des compétences différentes de celles en œuvre dans le " jeu du portrait ".

Proposer trois messages corrects différents que cet élève est susceptible de rédiger pour permettre aux autres élèves de retrouver cette figure.

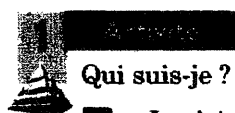
2. Analyse de l'activité 2

- 2.1 Répondre aux questions posées dans l'exercice proposé aux élèves.
- 2.2 Indiquer, en le justifiant, l'ensemble des instruments géométriques que vous donneriez aux élèves pour qu'ils puissent répondre aux questions posées.
- 2.3 Indiquer quels types de difficultés les élèves peuvent rencontrer pour répondre aux questions posées.
3. Dans le but d'évaluer les acquis des élèves, l'enseignant propose une fiche comportant huit figures de l'**annexe 3**, en demandant aux élèves de reconnaître les carrés et les rectangles. Cette fiche comporte quatre intrus (ni carrés, ni rectangles).

Indiquer les huit figures que vous proposeriez en précisant les critères qui ont guidé votre choix.

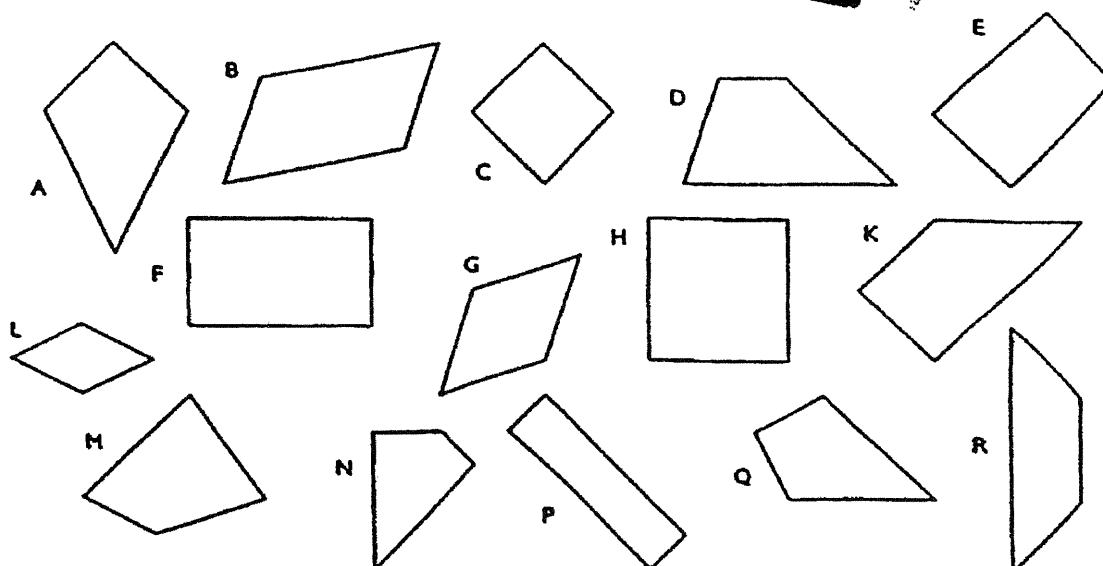
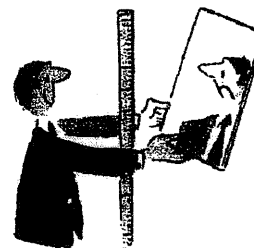
ANNEXE 3

Extrait de Math en Flèche - CM1 - Collection Diagonale - NATHAN



Qui suis-je ?

- • Je n'ai que 2 côtés opposés parallèles ;
- je possède 1 axe de symétrie.
- • J'ai au moins 2 angles droits ;
- je n'ai que 2 axes de symétrie.



ANNEXE N°6 : SELECTION D'EXERCICES DE GEOMETRIE

Thème : Géométrie du triangle et du quadrilatère

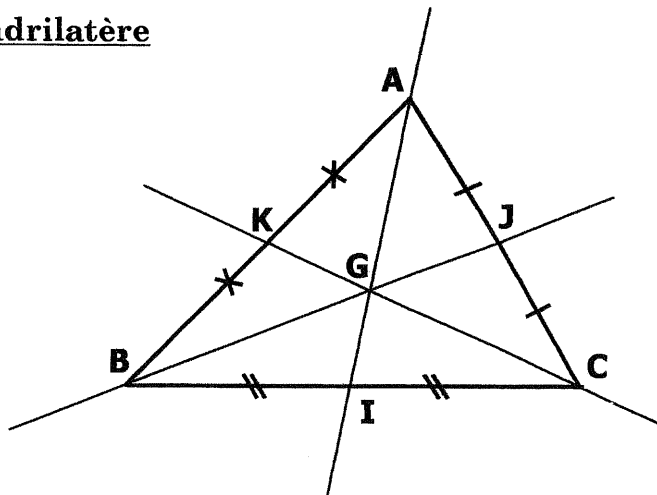
Ex1 :

Soit un triangle ABC et ses médianes [AI], [BJ] et [CK]. G est l'intersection de ses médianes.

Montrer que les deux triangles BIG et CIG ont même aire.

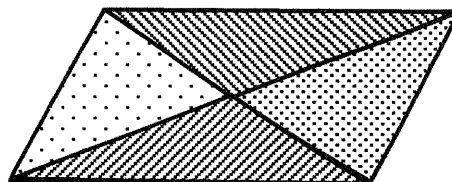
Montrer que les deux triangles BIA et CIA ont même aire.

En déduire que les six petits triangles déterminés par les médianes ont même aire.



Ex2 :

Dans un parallélogramme, montrer que les quatre triangles découpés par les diagonales ont même aire.



Ex3 :

On donne un parallélogramme ABCD. I le milieu de [AB]. (DI) coupe la diagonale [AC] en P. Montrer que $AP = AC/3$.

Ex4 :

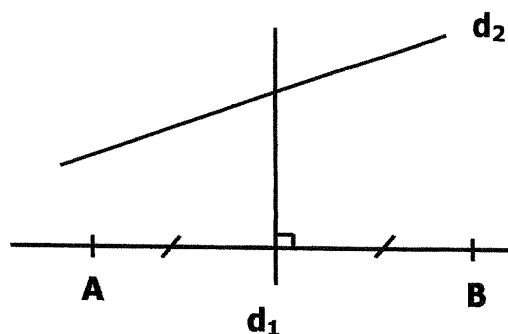
On donne un quadrilatère quelconque ABCD. I, J, K, L sont les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD] et [DA]. Montrer que IJKL est un parallélogramme.

Quelle est la particularité de ce parallélogramme si le quadrilatère ABCD est un trapèze isocèle. Et si le quadrilatère est un losange ?

Thème : Exercices de construction**Ex1 :**

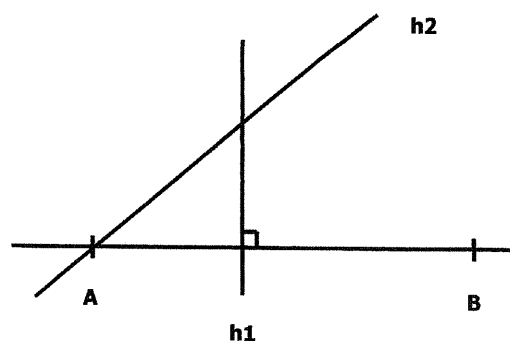
Dans la figure ci contre, $[AB]$ est un côté du triangle ABC, d_1 et d_2 sont deux médiatrices du triangle.

Construire le triangle ABC à partir de ces indications.

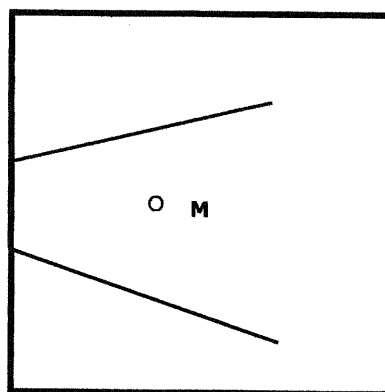
**Ex2 :**

Dans la figure ci contre, $[AB]$ est un côté du triangle ABC ; h_1 et h_2 sont deux hauteurs de ce triangle.

Construire le triangle ABC à partir de ces indications.

**Ex3 :**

Deux droites sont sécantes en un point A qui est en dehors de la feuille. Soit M un point. Construire la droite (AM). (On pourra utiliser la propriété des hauteurs).



ANNEXE N°7 : PLAN DU COURS MAGISTRAL

GEOMETRIE DES OBJETS PLANS

1. ELEMENTS THEORIQUES

1.1. Les objets de la géométrie plane

- Généralités
- Quelques relations importantes
- Qu'est-ce qu'une figure géométrique ?

1.2. Étude de quelques familles d'objets géométriques particuliers

- Éléments pour une classification
- Le triangle
 - ◆ lignes particulières du triangle : hauteur, médiatrice, bissectrice et médiane, propriétés et théorèmes importants
 - ◆ propriétés métriques et angulaires dans un triangle
- Les quadrilatères
 - ◆ classification
 - ◆ remarques d'ordre topologique
 - ◆ les trapèzes
 - ◆ les parallélogrammes
- Les polygones réguliers
- Le cercle

2. ELEMENTS DE DIDACTIQUE

2.1. Extraits significatifs des programmes officiels et commentaires

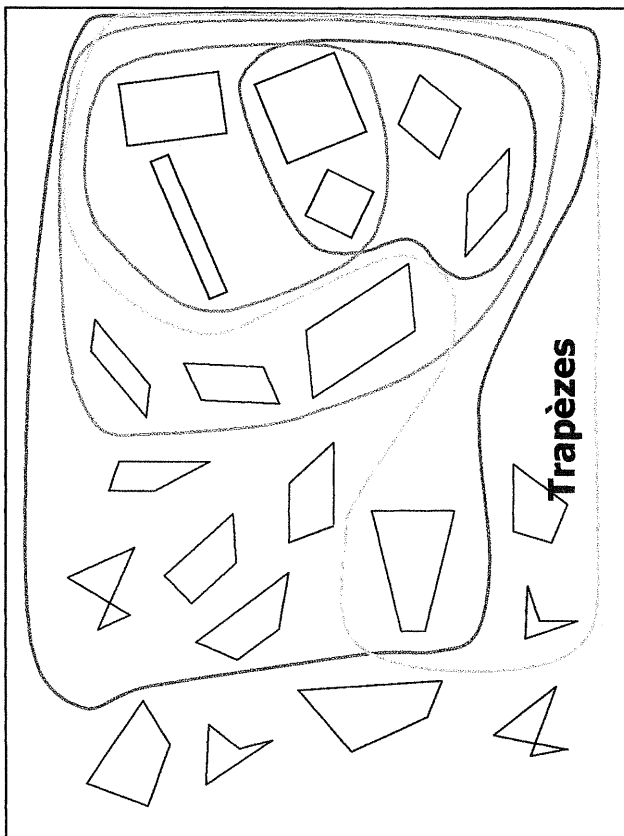
- ◆ Maternelle
- ◆ Cycle des apprentissages fondamentaux
- ◆ Cycle des approfondissements

2.2. Comment étudier les objets géométriques à l'école ?

- Quelques idées importantes et quelques questions :
 - ◆ à propos des objectifs

- ♦ à propos du vocabulaire : observer, analyser, décrire, reproduire, représenter, construire, raisonner.
 - Des progressions et des activités :
 - ♦ La place de l'étude des solides par rapport à celle des figures.
 - ♦ Trois options possibles pour l'étude des figures :
 - Option 1 : le point, la ligne, la ligne droite etc.
 - Option 2 : progression par catalogue des figures classiques aux plus rares
 - Option 3 : progression par "inclusion des classes"
 - ♦ Quelques principes à respecter de toutes façons :
 - Pratiquer le langage géométrique
 - Faire travailler sur des figures complexes
 - Diversifier les supports
 - ♦ Les situations didactiques en géométrie
- Dialectiques de "l'action" ; de la "validation", de la "formulation", de "l'institutionnalisation".
- ♦ Quelques matériels et situations "classiques" :
 - le tan gram
 - les polyminos
 - le géoplan
 - les pailles et la ficelle de cuisine
 - découpages, assemblages, superpositions
 - situations de formulation
 - variables didactiques liées à la géométrie

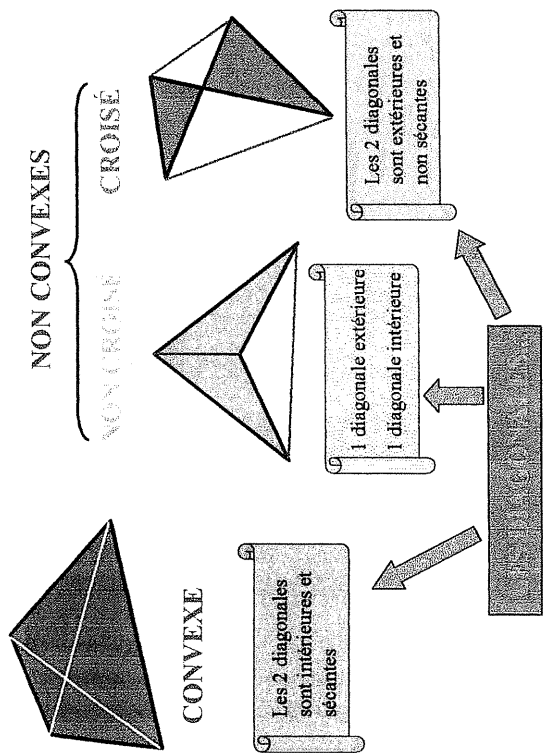
Partie théorique : les quadrilatères



1

Remarques topologiques

QUADRILATÈRES...

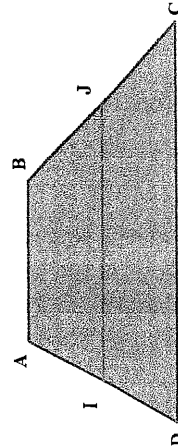


2

THEOREME DES MILIEUX

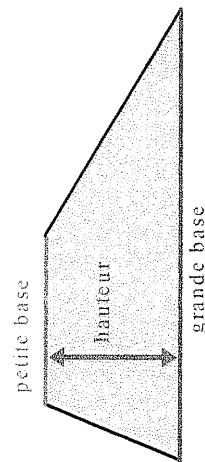
Soient I, et J, les milieux des côtés non parallèles d'un trapèze de bases [AB] et [CD], on a alors la double propriété suivante

$$(IJ) \text{ est parallèle aux bases} \\ \text{et } IJ = \frac{AB + CD}{2}$$



4

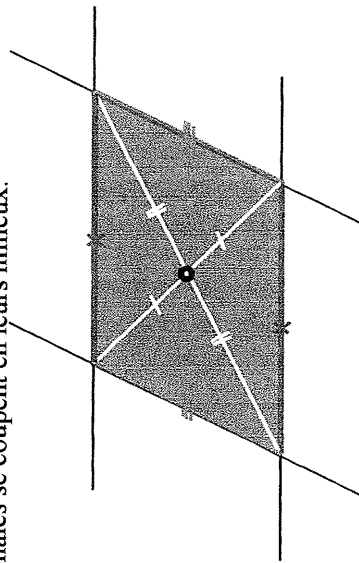
Petit rappel de vocabulaire...



3

Les parallélogrammes

- les côtés opposés sont parallèles ("deux à deux")
- les côtés opposés sont égaux deux à deux
- les diagonales se coupent en leurs milieux.

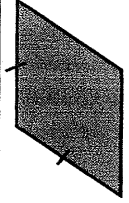
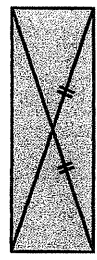
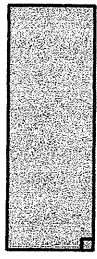
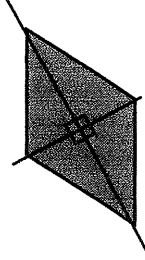


Chacune de ces propriétés est "caractéristique", ce qui signifie qu'elle peut être utilisée comme définition.
Les deux autres sont alors des propriétés résultant de cette définition.

5

Les polygones réguliers

Parallélogrammes particuliers...

ayant...	2 côtés consécutifs...	les diagonales...
... de même longueur :	 losange	 rectangle
... perpendiculaires :	 rectangle	 losange

7

Les trois étiquettes ci-dessous récapitulent les différentes options.

Première option

Définition :

Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux.

Conséquences :

Les côtés opposés sont égaux deux à deux.
Les diagonales se coupent en leur milieu.

Deuxième option

Définition :

Un parallélogramme est un quadrilatère convexe dont les côtés opposés sont égaux deux à deux.

Conséquences :

Les côtés opposés sont parallèles deux à deux.
Les diagonales se coupent en leur milieu.

Troisième option

Définition :

Un parallélogramme est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu.

Conséquences :

Les côtés opposés sont parallèles et égaux deux à deux.

6

Si $p = \dots$

3



triangle équilatéral

6



hexagone régulier

4



carré

7



heptagone régulier

5



pentagone régulier

8



octogone régulier

8

Éléments de didactique

2.2. Comment étudier les objets géométriques à l'école

2.2.1. Quelques idées importantes, quelques questions ...

2.2.1.1. A propos des objectifs

idée de fond :

culture géométrique
dépasser

l'apparence simplifiée

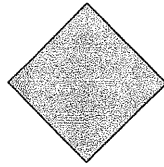
l'idée fausse

l'idée vague.

Langue maternelle et langage mathématique

“carré” $\diamond$ “cube”

“chiffre” $\diamond$ “nombre” ...



« Losange » ?

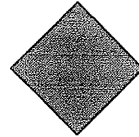
« CARRÉ » !

9

2.2.2.3. Quelques principes à respecter de toutes façons ...

Pratiquer le langage géométrique

Éviter les représentations prototypiques :



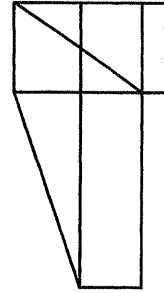
carré



parallèles



trapèze



Faire travailler les enfants
sur des figures composites :

Diversifier les supports

11

2.2.2.2. Trois options possibles pour l'étude des figures.

Option 1. Le point, la ligne, la ligne droite, etc...

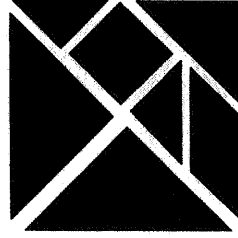
Option 2. Progression par “catalogue”,
des figures classiques aux figures plus rares...

Option 3. Progression par “inclusions des classes”.

10

2.2.2.5. Quelques matériels et situations “classiques”.

2.2.2.5.1. Le Tan Gram



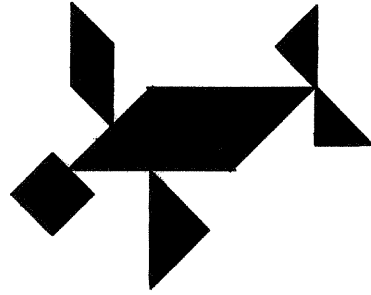
But du jeu :

avec les pièces,

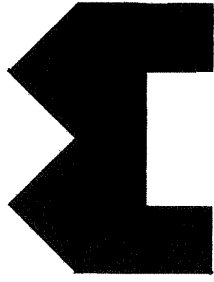
réaliser des silhouettes fournies dans un catalogue

12

En voici une facile :

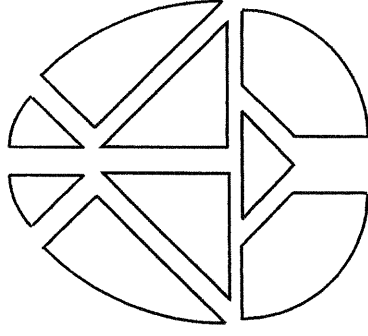


et une plus délicate :



13

Variante "moderne" :



Objectifs variés ; essentiellement :

- composer des figures complexes à partir de figures simples
- percevoir des figures simples dans des figures complexes
- éviter les conceptions prototypiques.

14

Utilisation dans les "petites classes" :

➤ mettre une pièce dans une empreinte

- choix de la pièce parmi combien ?
- les pièces sont elles présentées au départ groupées ou non ?
- sont elles orientées comme l'empreinte

➤ mettre plusieurs pièces dans plusieurs empreintes

- combien d'empreintes ? combien de pièces ? (autant, plus ou moins que d'empreintes ?)
- les empreintes sont elles contiguës ou séparées ?
- si deux empreintes sont contiguës, la frontière entre les deux est -elle visible ?

➤ reproduire un modèle à côté du modèle, le modèle est d'une taille conforme aux pièces

- combien de pièces constituent le modèle ?
- n'a-t-on que les pièces nécessaires ou plus ?
- "à côté" est-ce latéralement ou au-dessous ?
- le modèle présente-t-il les séparations entre les pièces ?

➤ reproduire un modèle à côté du modèle, le modèle est plus grand ou plus petit que ce qu'on obtiendra

- mêmes questions que précédemment...

15

Avec des plus grands :

Figures simples imposées :

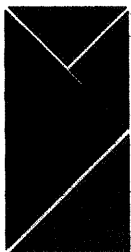
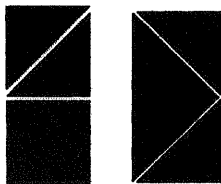
Exemples :

Triangles de différentes tailles :



16

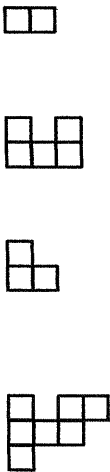
Rectangles de tailles ou de proportions égales ou différentes :



17

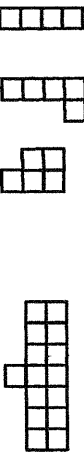
2.2.2.5.2. Les polyminos

Polymino : un assemblage de carrés avec les conditions suivantes
 - ne pas être fait de deux morceaux séparés ou seulement reliés par un sommet
 - deux carrés adjacents doivent l'être "vraiment" c'est-à-dire par un côté complet.



Un classique du genre : chercher tous les pentaminos...
 ---> 12 pentaminos

Avec ces pentaminos, réaliser diverses figures, exemple :

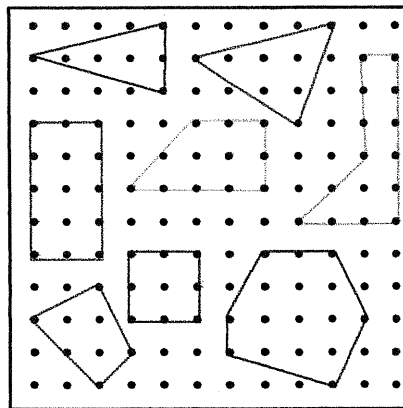


18

2.2.2.5.3. Le géoplan "planche à clous"

Figures planes :
 - Réaliser un maximum de figures :
 (au moyen d'élastiques)

applications à { Repérage
 Aires
 Transformations géométriques

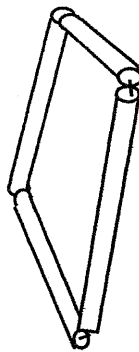


19

2.2.2.5.4. Les pailles ...

Réaliser diverses figures imposées

intérêt : aspect "ligne" du polygone,
 propriétés
 choisir les bonnes longueurs de pailles
 et choisir le bon angle.



Ex. : le carré est un losange particulier
 Autre possibilité : souder à l'étain

20

2.2.2.5.5. Découpage / assemblage / superpositions

Intérêt :

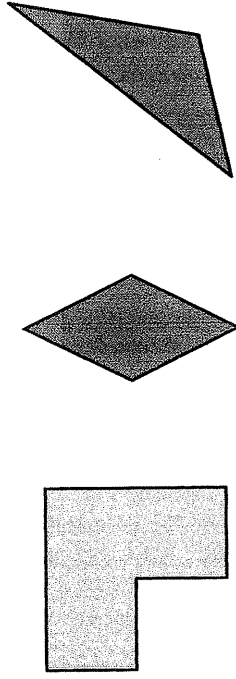
Notion d'aire

Perception des figures simples dans des figures complexes

Découpage / assemblage :

Exemples

Couper ces figures en deux ou trois morceaux qui ré-assemblés formeront (dans chaque cas) un rectangle :



21

2.2.2.5.6. La situation du message

Objet principal : le langage géométrique.

- une figure géométrique,
- l'enfant doit rédiger un texte (le "message")
- un autre enfant lit le texte
et reconstitue la figure sans voir l'original.

Nombreuses variables didactiques :

- Variables liées à la figure géométrique :
 - figure réalisée par l'enfant ou par le maître ?
 - contraintes imposées ou non
 - support de la figure
- Variables liées aux instruments :
 - utilisation ou non d'une équerre ?
 - d'un double décimètre ?
- Variables liées au texte :
 - lexique imposé ou non
 - nombre maximum de mots.

23

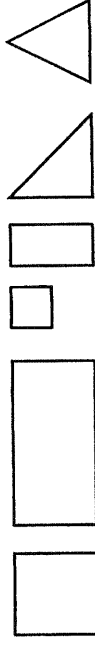
Superpositions :

Figures "de base" sur transparents.

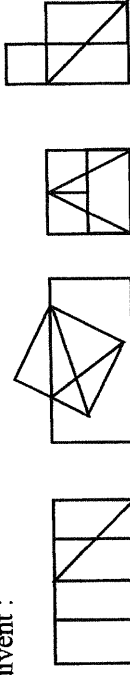
Les superposer pour obtenir diverses figures imposées.

Exemples :

Figures de base :

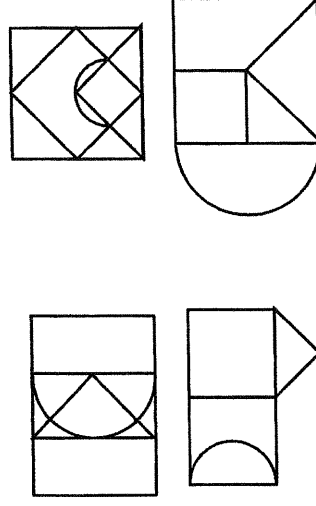


avec les figures ci-dessus, réaliser par superposition celles qui suivent :



22

Ex. de figures que le maître pourrait proposer :



Nécessité d'un vocabulaire géométrique rigoureux.

Validation par les faits et effets,
et non pas par un jugement du maître.

24