UN ESSAI DE LECTURE DIDACTIQUE DU TEXTE DE RIEMANN SUR LES FONDEMENTS DE LA GEOMETRIE DE LA GEOMETRIE EUCLIDIENNE AUX GEOMETRIES INTRINSEQUES

ATELIER 12
Alain KUZNIAK
IUFM d'Alsace.

Une interrogation didactique de certains textes fondamentaux des mathématiques est-elle possible ? Qu'apporte-t-elle à l'enseignement des mathématiques en général et à la formation des enseignants en particulier ?
Nous avons développé ce questionnement, avec une visée spécifique sur l'enseignement de la géométrie, en étudiant le texte de Riemann «sur les hypothèses qui servent de fondements à la géométrie ». Ce texte, écrit en 1854, sans pratiquement aucune formule est parfois considéré comme le texte fondateur de l'évolution des mathématiques à la fin du dix-neuvième siècle et au début du vingtième siècle.

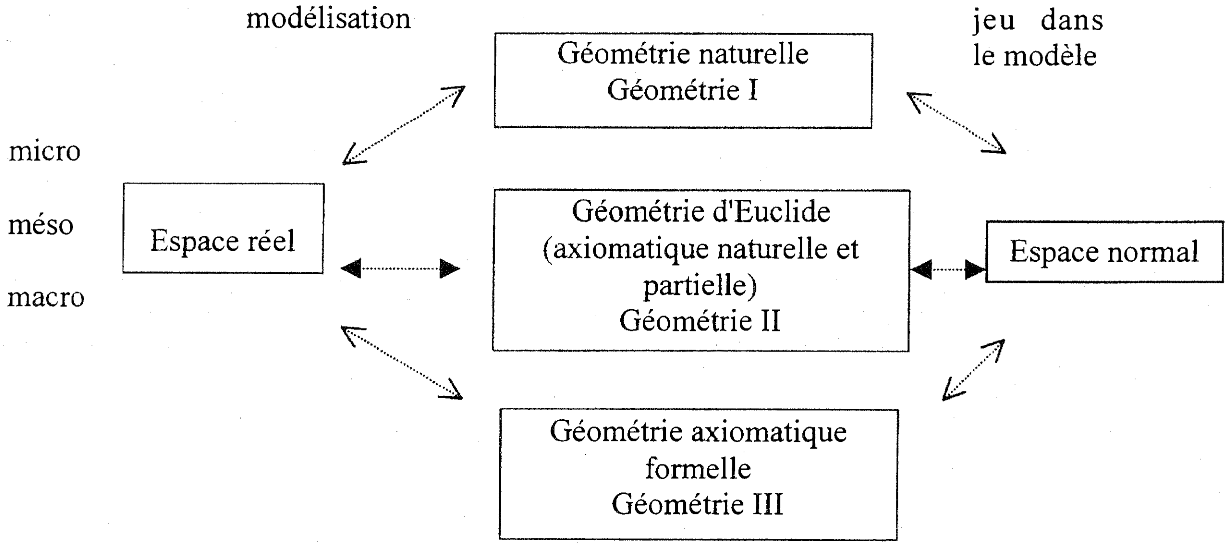
I. Introduction

1) Point de départ et genèse de la démarche suivie

Avec C. Houdement [1], nous avons étudié la géométrie enseignée dans tout le cursus scolaire et en formation des enseignants. Dans ce cadre, la définition de l'objet même de l'enseignement visé en géométrie nous est nécessaire pour analyser les transitions entre les différentes conceptions de la géométrie qui apparaissent au cours de la scolarité.
La géométrie dont nous traitons est la géométrie élémentaire dans un espace de dimension trois. Dans nos travaux, nous avons insisté, à côté du raisonnement déductif, sur l'importance de l'intuition et de l'expérience dans la constitution de la démarche géométrique notamment par rapport au démarquage du monde physique. Nous avons introduit et étudié trois types de paradigmes géométriques : la géométrie naturelle, la géométrie axiomatique naturelle et la géométrie axiomatique formaliste [1a].

D'un point de vue didactique, nous nous sommes interrogé sur la pertinence de l'approche de la géométrie développée par Berthelot et Salin [2]. Ces derniers, analysant la géométrie comme une modélisation de l'espace, développent notamment un jeu didactique autour de la décomposition de l'espace en micro, meso et macroespace. C'est de ce dernier aspect que nous contestons la pertinence et surtout l'aspect nécessaire dans une approche de la géométrie.
Cette opposition nous a conduit à introduire la notion *d'espace normal* [1b] de la géométrie qui représente le modèle choisi pour faire de la géométrie. Une réalisation de cet espace est possible dans un espace physique suffisamment réduit (comme la feuille de papier ou l'écran d'un ordinateur) pour faciliter le travail du géomètre.

Pour étayer notre position, nous avons exploré deux pistes. La première, purement didactique, critique les lourdes ingénieries mises en place dans le méso-espace et l'enfermement du jeu de la modélisation dans la géométrie pratique dont les exigences d'exactitude et de précision graphiques éloignent de la géométrie spéculative.
Une autre voie de recherche plus mathématique, mais toujours selon nous didactique, porte sur l'étude de la modélisation mathématique de l'espace et sur les relations entre les différentes sortes d'espace et le modèle mis en place. C'est ce dernier point qui nous a conduit à envisager l'étude des *variétés mathématiques* pour analyser le passage du local au global. Nous précisons également en quoi les espaces introduits par Berthelot et Salin ne sont pas, d'un point mathématique, réductibles simplement les uns aux autres. Enfin cette étude vise à affiner la notion *d'espace normal.*
Nous pouvons résumer notre questionnement par le schéma suivant :



Méthode suivie

Pour aborder le problème de la modélisation géométrique de l'espace dans les travaux mathématiques actuels, nous sommes confrontés à la difficulté de mettre en évidence les concepts élémentaires que nous cherchons. En effet, suivant une voie bien décrite par Bourbaki[1] *les contenus intuitifs qui sont à l'origine de la plupart des formes mathématiques sont progressivement évacués pour*, c'est le point de vue de Bourbaki, *leur donner toute l'efficacité qu'elles portaient en puissance.* Cette évacuation de tout contenu sensible est particulièrement nette dans la définition des variétés abstraites.

Pour tenter de retrouver ces contenus intuitifs initiaux, nous avons choisi de revenir aux textes fondateurs. Nous avons d'autant plus été encouragés à poursuivre dans cette voie que ces textes ont été écrits par des mathématiciens pour qui le raisonnement mathématique ne se réduit pas à une pratique axiomatique privée de l'intuition. Ainsi, Riemann s'inscrit dans le courant du philosophe Herbart initiateur de la Naturphilosophie allemande qui cherche à comprendre le monde et ne se contente pas de l'aspect formaliste ou calculatoire des mathématiques. Riemann insiste souvent sur le fait de voir "clairement, représenter géométriquement, éviter les formules et les calculs inutiles".

[1] On peut me demander par courrier électronique ce texte en traduction française.

Enfin d'un point de vue méthodologique, nous avons retenu pour l'étude du texte de Riemann, le point de vue herméneutique de Gadamer [3] sur un mode d'interprétation qui insiste sur l'importance de la formulation de la question et sur l'effet d'horizon propre au lecteur. Notre questionnement portant sur la nature de la modélisation de l'espace dans le cadre de la géométrie enseignée, nous emploierons librement les termes de micro, meso ou macroespace ainsi que la notion d'espace normal. Ces notions ne figurent évidemment pas dans la littérature mathématique étudiée et renvoient au champ de la didactique qui nous préoccupe. C'est en cela que nous pouvons parler de lecture didactique d'un texte mathématique.

Eclairage apporté sur la notion d'espace de la géométrie élémentaire

En fait, notre pêche a été bien plus riche que ce que nous l'avions espérée en renouvelant de manière importante notre vision de la géométrie élémentaire et en attirant notre attention sur une possible approche intrinsèque de la géométrie enseignée. C'est ce que nous allons tenter de rapporter dans la suite de cette présentation.

II. Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen

(Sur les hypothèses qui servent de fondements à la géométrie)

1) Présentation de l'œuvre

Peut-être est-ce là le travail géométrique le plus important de tous les temps, sinon par son étendue - il était fort bref - du moins par le monde d'idées qu'il contenait, par la puissante lumière qu'il projetait sur la base de l'édifice géométrique, par les répercussions, géométriques et physiques, qu'il devait avoir.

Ainsi s'exprime, A. Buhl[2] en 1928 soit plus de soixante-dix ans après la soutenance de Riemann. En effet, le texte que nous avons étudié est une Habilitationvortrag, c'est-à-dire une thèse dont le thème est fixé par l'Université, qui a été présentée en 1854 par Riemann en complément de son Habilitationschrift pour obtenir le poste de Privatdozent. Ce poste permettait à son titulaire d'enseigner à l'Université sans traitement mais en vivant des droits payés par les étudiants.

Le thème de son habilitation lui a été donné par Gauss qui figurait parmi les membres du Jury. Ce jury était composite et ses membres étaient des enseignants de toutes les disciplines. Ceci explique, en partie, le caractère intermédiaire du texte entre mathématique et philosophie. Il ne s'agit pas d'un écrit mathématique au sens usuel du terme car il n'y a pas de démonstrations explicites mais plutôt d'un programme de recherche. Ce texte de 20 pages sera publié pour la première fois en 1867 soit un an après la mort de Riemann survenue en 1866. Son caractère particulièrement elliptique et son côté novateur expliquent sa complexité qui a été soulignée par tous les contemporains de Riemann.

Il est divisé en trois parties précédées par une courte introduction particulièrement riche. Nous ne donnons de notre lecture de cette œuvre que les éléments particulièrement en relation avec notre sujet.

(Voir le plan en annexe)

---

[2] Barbarin La géométrie non euclidienne (3 ed) Gauthier Villars

2) Commentaires sur l'introduction : une formulation locale et métrique de la géométrie

Riemann interroge les fondements de la Géométrie. Ces derniers sont constitués d'axiomes et de relations liant les objets. Mais la logique des principes de l'édifice n'apparaît pas : pourquoi ces axiomes, sont-ils nécessaires, comment les a-t-on choisis ?
Les rapports mutuels de ces données primitives restent obscurs ; on n'aperçoit pas bien si elles sont nécessairement liées entre elles, ni jusqu'à quel point elles le sont, ni même a priori si elles peuvent l'être.

Cette interrogation, formulée ici par un mathématicien de premier plan, rejoint la question naïve des élèves, et plus généralement celle de tous les utilisateurs de la géométrie dans un cadre scolaire. Leur naïveté est sans doute plus grande et le type de réponse attendu ne renvoie pas nécessairement au champ de réflexion qui préoccupe Riemann. Mais le désir de l'intelligibilité est le même.
La voie que propose d'explorer Riemann est celle de grandeurs plusieurs fois étendues (mehrfach ausdedehnten Grössen). Il s'agit pour lui de construire un concept d'espace par extension du concept de grandeur en général, les grandeurs de l'espace physique (Raumgrössen) en constituant un cas particulier. Dès l'introduction, Riemann nous annonce le contenu décisif de son traité :
De là, il en ressortira qu'une grandeur de dimensions multiples est susceptible de différents rapports métriques, et que l'espace n'est par suite qu'un cas particulier d'une grandeur de trois dimensions.
Comment alors parmi tous ces espaces reconnaître notre espace ? Cela ne peut pas être le résultat d'une réflexion a priori mais la conséquence d'expériences.
Comme l'espace, défini par Euclide, de la géométrie élémentaire n'est pas la conséquence nécessaire de la construction développée par Riemann, il ne peut prétendre être a priori le modèle de l'espace physique. Seule l'expérience permet de faire le choix crucial du bon espace de représentation. Mais, c'est compliqué car il faut rechercher des faits simples pour déterminer les rapports métriques et les choix sont multiples. On peut privilégier ceux choisis par Euclide mais en étant conscient qu'il ne s'agit que d'hypothèses en conformité probable avec l'observation mais dont rien ne prouve l'extension à l'infiniment grand ou à l'infiniment petit.

3) Notion de variété et de courbure

Variété ou mannigfaltigkeit

Comme nous l'avons signalé, le développement de l'exposé de Riemann comprend trois parties. Les deux premières permettent à Riemann de préciser son idée de la construction de l'espace et de mettre en place celle-ci de manière intrinsèque.
La partie A, la plus générale et sans doute celle qui a donné lieu au plus d'interprétations diverses, sert à définir l'extension de la grandeur à plusieurs dimensions de manière assez imprécise et un peu floue. L'important est ici que cette construction se fait de proche en proche en étendant progressivement le nombre de dimensions nécessaires et en distinguant les extensions continues et discrètes.
Les modes de détermination parcourus formeront une variété de dimension une, dont le caractère essentiel est que, dans cette variété, on ne peut, en partant d'un point, s'avancer d'une manière continue que dans deux directions : en avant et en arrière. Imaginons maintenant que cette variété se transporte à son tour sur une autre variété complètement

distincte, et cela encore d'une manière déterminée, c'est-à-dire tellement que chacun de ses points se transporte en un point déterminé de l'autre variété ; l'ensemble des modes de détermination ainsi obtenus formera une variété de dimension deux.

L'autre idée qui donne tout son sens à la notion de dimension est qu'une grandeur n fois étendue est exactement déterminée par n grandeurs. Ainsi, la variété peut aussi être définie de manière intrinsèque sans recours aux coordonnées de l'espace ambiant.
La notion ainsi introduite est à la source de la notion moderne de variété. Dans le cadre général présenté par Riemann dans sa première partie, il s'agit plutôt de l'idée de variété topologique, les variétés différentielles (au sens moderne du terme) constituent le germe de la seconde partie.

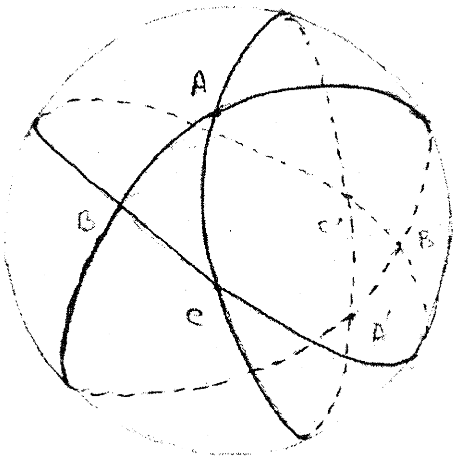
Dans cette seconde partie, Riemann introduit un certain nombre d'hypothèses métriques portant sur *l'élément linéaire ds_* de longueur qui constitue une généralisation de la longueur euclidienne obtenue grâce au théorème de Pythagore. Dans le plan euclidien, on peut mesurer la distance infinitésimale de deux points M(x,y) et M'(x+dx, y+dy) grâce à la valeur ds_= dx_ + dy_ (dans le plan). Riemann généralise cet élément linéaire en le définissant grâce à une forme quadratique définie positive $\Sigma g_{ij} dx_i dy_j$ où les g_{ij} peuvent être des fonctions continûment différentiables en fonction des différents x_i. Il est alors possible de bâtir une métrique intrinsèque où la distance de deux points est la longueur de la géodésique qui relie ces deux points, cette dernière existe grâce aux conditions posées sur les g_{ij} et sur la forme quadratique.

Un raisonnement simple utilisant le nombre de variables et de fonctions mises en jeu permet à Riemann de montrer que les espaces généralisés qu'il vient d'introduire ne se réduisent pas tous aux espaces euclidiens. La généralisation du concept de mesure proposé par Riemann fait ainsi éclater le cadre de la géométrie euclidienne et donne naissance à une multitude d'espaces non euclidien. Mais le point de vue proposé ici n'est pas axiomatique : les nouvelles géométries ne sont pas fondées sur la négation de l'axiome des parallèles mais proviennent naturellement d'une interrogation sur la métrique de l'espace.

Courbure

Les variétés particulières qui peuvent se ramener au *ds* euclidien usuel sont appelées par Riemann des variétés planes. Il consacre l'essentiel de la fin de la seconde partie à essayer de caractériser la diversité des variétés générées par l'élément linéaire en mesurant leur écart à la planéité et pour cela, il s'appuie sur une notion de courbure (inspirée de Gauss). Cette notion est essentielle pour bien comprendre la genèse intrinsèque de l'espace à partir d'un point de vue local. Nous allons l'illustrer sur le cas le plus simple, d'ailleurs développé par Riemann, celui des surfaces (de dimension 2) à courbure constante et positive. Nous suivons la voie intuitive présentée par Cartan[3] Il existe bien sûr des présentations plus rigoureuses basées sur une approche analytique.

1) On commence par définir un triangle ABC géodésique infinitésimal sur une surface, c'est-à-dire la figure formée par trois points et par les lignes de plus courte distance qui joignent ces trois points.

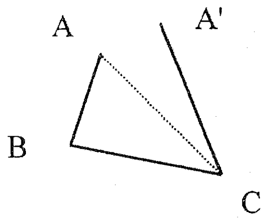


Dans le cas de la sphère, on peut calculer l'aire de ce triangle
A',B' et C' sont les points antipodaux de A, B, et C.
On calcule d'abord l'aire du fuseau (ou du double fuseau) dont les deux sommets sont A et A'. Cette aire est égale à 2↔4πR_↔A/2π, si A est mesuré en radians, c'est donc 4R_↔A. Puis, on calcule de la même façon les fuseaux déterminés par B et C. Ces trois fuseaux recouvrent la sphère en entier mais les triangles ABC et A'B'C' sont recouverts trois fois (une fois par chaque fuseau).
*On peut donc écrire: 4R_A+ 4R_B+ 4R_C= 4πR_+ 4 Aire (ABC) et l'aire du triangle ABC est égale à (A+B+C-π)R_*

2) On réalise ensuite une transformation qui envoie ce triangle curviligne sur le plan en conservant les distances et les angles. Le triangle ne se referme pas nécessairement comme le montre l'exemple de la sphère. Dans ce cas, l'aire du triangle ABC est(A+B+C-π)↔R_.
Comme une aire est toujours positive cette formule montre que la somme des angles d'un triangle sur la sphère est toujours supérieure à π.
Le point A du triangle aura donc deux images A et A' dans la transformation qui envoie (aplatit ?) le triangle curviligne sur le plan.

[3] Cartan (1926) Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann. Gauthier-Villars

3) Dans le triangle développé sur le plan, on obtient, en général, un angle ACA' non nul dont la mesure est $K(\sigma)d\sigma$ en chaque point de la variété où $d\sigma$ est l'aire du triangle infinitésimal ABC.



$K(\sigma)$, caractéristique de la variété, définit la courbure de la variété en un point.
Dans le cas de la sphère, on a donc $K(\sigma)d\sigma \leftrightarrow R\_=d\sigma$ et donc $K(\sigma) = 1/R\_$, la courbure de la sphère est constante.

Dans les espaces à courbure constante, les figures peuvent se mouvoir sans extension et sont donc invariantes par isométrie. Cette propriété, encore appelée axiome de libre mobilité, vraie dans l'espace euclidien l'est dans d'autres espaces. Ainsi, certaines propriétés qui résultent d'observations valides dans le méso-espace ne sont pas caractéristiques de l'espace euclidien et peuvent engendrer d'autres géométries.

4) Conclusion : applications à l'espace

Après avoir fait éclater le cadre traditionnel de la géométrie euclidienne et de fait créer une infinité d'espaces possibles, Riemann, dans sa conclusion, revient sur le problème du lien entre espace physique et géométrie. Il précise un certain nombre de conditions nécessaires et suffisantes pour que les variétés introduites à partir de l'élément linéaire possèdent les propriétés locales propres à la géométrie euclidienne. Ces propriétés sont valides dans les limites de l'observation de l'espace physique local.
La fin de l'exposé de Riemann ouvre des perspectives sur la physique de l'infiniment petit et de l'infiniment grand. Pour lui la géométrie de ces espaces est très probablement différente de la géométrie de l'espace ambiant comme semblaient le montrer les propriétés électromagnétiques découvertes à son époque. A cet égard, sa conclusion est particulièrement caractéristique d'un mode de pensée ouvert et prospectif, libre de tout préjugé.
Des recherches partant de concepts généraux, comme l'étude que nous venons de faire, ne peuvent avoir d'autre utilité que d'empêcher que ce travail ne soit entravé par des vues trop étroites, et que le progrès dans la connaissance de la dépendance mutuelle des choses ne trouve un obstacle dans les préjugés traditionnels.

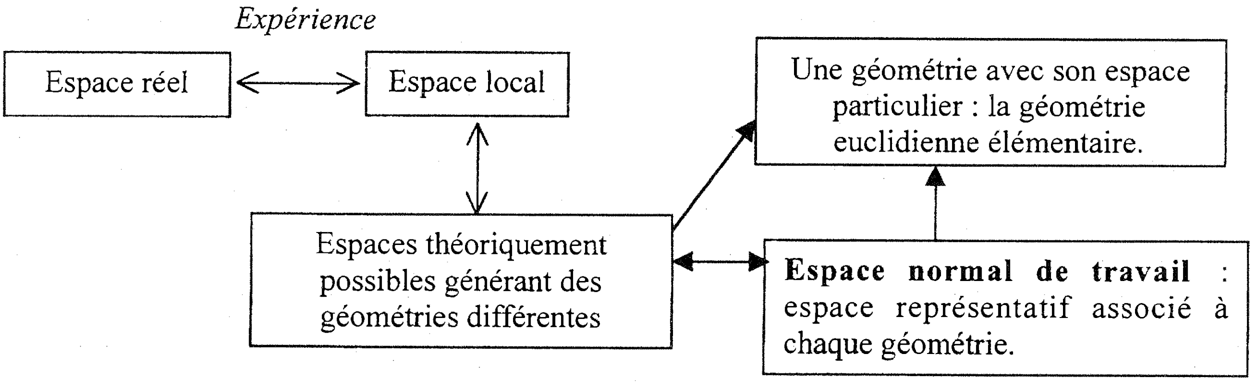
III. Retour au didactique

1) Une géométrie particulière : la géométrie élémentaire euclidienne

Dans cette partie, nous allons revenir à notre propos initial qui portait, rappelons le, sur les liens entre espace, géométrie et enseignement. Le détour par l'étude des conceptions de Riemann, nous semblait a priori susceptible d'éclairer les liens entre la géométrie et la modélisation de l'espace.
Quelques points nous semblent particulièrement fondamentaux dans une perspective didactique qui tente d'intégrer l'approche épistémologique.

L'existence de multiples géométries, la géométrie euclidienne n'étant qu'une géométrie parmi d'autres. Ces géométries vont être génèrées de manière naturelle en insistant sur certains points cruciaux de la modélisation en acte de l'espace.
L'insistance sur la localité. Les hypothèses fondatrices résultent d'observations locales et il faut être prudent sur toute généralisation hors du champ du méso-espace.
L'insistance sur la difficile adéquation du modèle avec la réalité. Le choix des faits nécessaires pour modéliser l'espace n'a rien d'évident et plusieurs directions existent.
et enfin
L'insistance sur la mesure des grandeurs (même abstraites) pour fonder et générer la géométrie. Cela constitue une rupture par rapport à la tradition euclidienne. Il s'agit aussi d'une rupture par rapport à une certaine tradition de l'enseignement dans sa version axiomatique renforcée par la trilogie affine, projectif, euclidien.

Nous résumons dans un nouveau schéma la problématique de la géométrie en tant que théorie de l'espace telle qu'elle nous apparaît à l'issue de l'étude du texte de Riemann.



Nous avons développé une articulation entre ces points de vue orientée vers une possible mise en œuvre dans un cadre scolaire. Notre réflexion passe par un approfondissement du lien local-global et par la mise en évidence de modèles localement mais non globalement euclidiens.

2) Articulation local-global

De manière traditionnelle, le passage du local au global s'effectue par une opération de la pensée qui reproduit à l'infini sans les modifier les propriétés rencontrées localement. Le local n'est que la réduction à l'identique du monde global et inversement ce dernier apparaît comme un monde local dont on aurait supprimé les murs.
Mais Riemann vient modifier cette vision et plusieurs types de problèmes sont alors envisageables.
1) Les propriétés retenues, vraies dans l'espace qui nous entourent le sont-elles encore dans l'infiniment petit et dans l'infiniment grand. Ceci est un problème de physique, mais ce problème vient perturber la question initiale sur l'unicité de la géométrie naturelle.
2) L'extension de la géométrie localement perçue comme euclidienne donne-t-elle nécessairement l'espace euclidien?
C'est Klein qui le premier a développé et résolu le problème de décrire tous les espaces globaux qui localement étaient indiscernables de l'espace euclidien dans le cadre de sa théorie des formes spatiales (Raumformen). Nous allons étudier ce problème en donnant un sens plus précis à la notion d'espace localement euclidien et ceci à partir de l'étude du cas du cylindre. Cette étude nous semble a priori fructueuse dans un cadre didactique grâce à son aspect particulièrement intuitif.

3) Digression mathématique : les espaces localement euclidiens

1) Sur une « géométrie naturelle » du cylindre

Nous considérons ici le cylindre classique, c'est-à-dire la surface infinie de dimension deux définie par un cercle directeur et des droites génératrices dont la direction est perpendiculaire au plan contenant le cercle directeur. L désigne la longueur du cercle directeur.
Nous pouvons, à la manière de l'écrivain anglais Abbott dans Flatland[4], imaginer un habitant de cette surface cylindrique. Cet habitant va être conduit à développer une géométrie naturelle qu'il peut construire en s'appuyant sur la notion de distance. Nous pouvons ainsi bâtir une géométrie métrique qui permet de résoudre un certain nombre de problèmes issus de l'expérience et nécessaires à la géométrie pratique des habitants du cylindre. Voici quelques-unes de ces questions.

Quel est le plus court chemin d'un point à un autre ? La réponse à cette question permet de développer une notion de droite sur la surface si l'on définit de manière classique la droite comme "le plus court chemin d'un point à un autre".

Quels sont les propriétés des triangles et des figures usuelles, par exemple la somme des angles du triangle est-elle égale à 180° ?

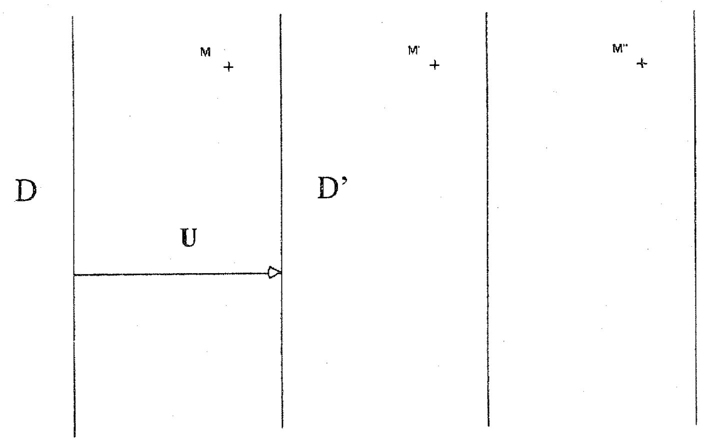
Le théorème de Pythagore est-il vrai ? etc.

Nous invitons le lecteur à essayer de résoudre ces différents problèmes sans lire immédiatement la suite de cet article. Il pourra prendre, comme les étudiants en formation, une feuille de papier et la rouler en cylindre. On peut aussi utiliser les rouleaux d'essuie-tout (vides) et étudier la manière dont ils sont faits.

Nous allons voir que pour résoudre ces différents problèmes, il est indispensable de disposer de plusieurs modèles de la surface cylindrique et de déterminer l'espace normal (ou les espaces normaux) de cette géométrie.

Un premier modèle (Modèle 1) résulte du développement isométrique du cylindre roulant sur le plan.

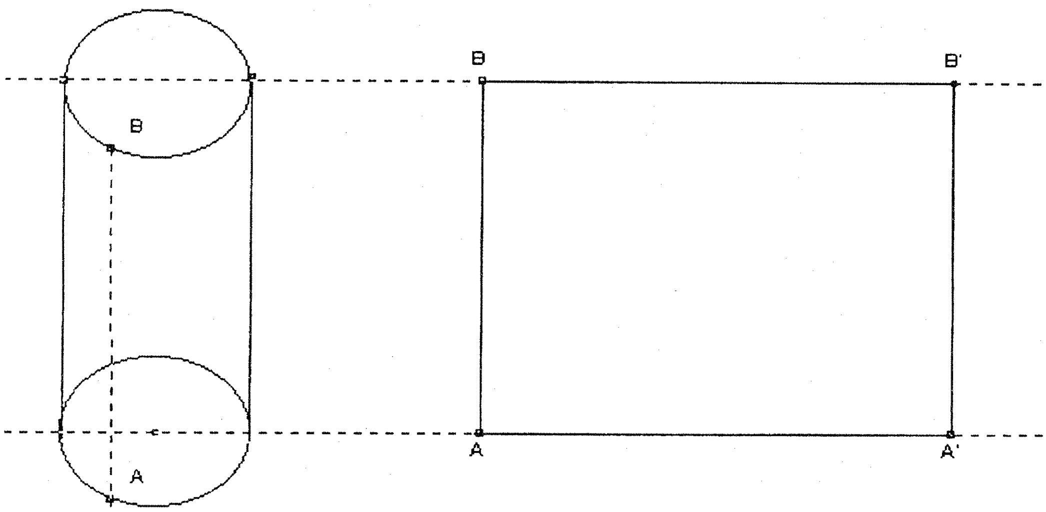
Nous le ferons même rouler autant de fois que nécessaire. Nous obtenons un réseau constitué



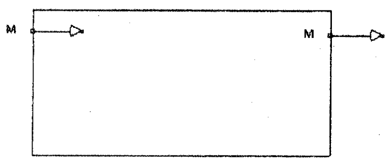
[4] Abbott (1884) Flatland Livre de Poche.

de droites parallèles.
Dans ce réseau, deux points M et M' sont équivalents s'ils sont les images sur le plan du même point du cylindre dans le déroulement précédent. En d'autres termes, s'il existe un entier relatif n et une translation t de vecteur n.$\vec{U}$ telle que M'=t(M) où $\vec{U}$ est un vecteur dont la longueur est le périmètre L du cercle directeur.

Un deuxième modèle (Modèle 2) est constitué par la bande plane délimitée par les deux droites parallèles (AB) et (A'B').



Ce modèle apparaît comme l'image du cylindre découpé suivant une génératrice qui devient (AB) et (A'B'). Il faut considérer comme identiques deux points sur les droites (AB) et (A'B') qui sont confondus sur la génératrice avant le développement.

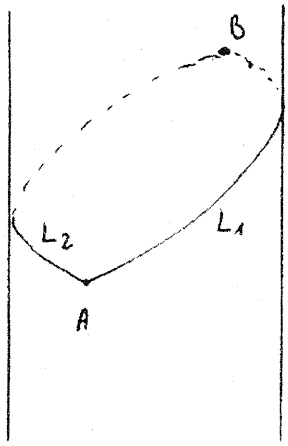


Ces modèles plans donnent naissance à des espaces normaux de travail sur une feuille de papier ou sur l'écran d'un ordinateur.

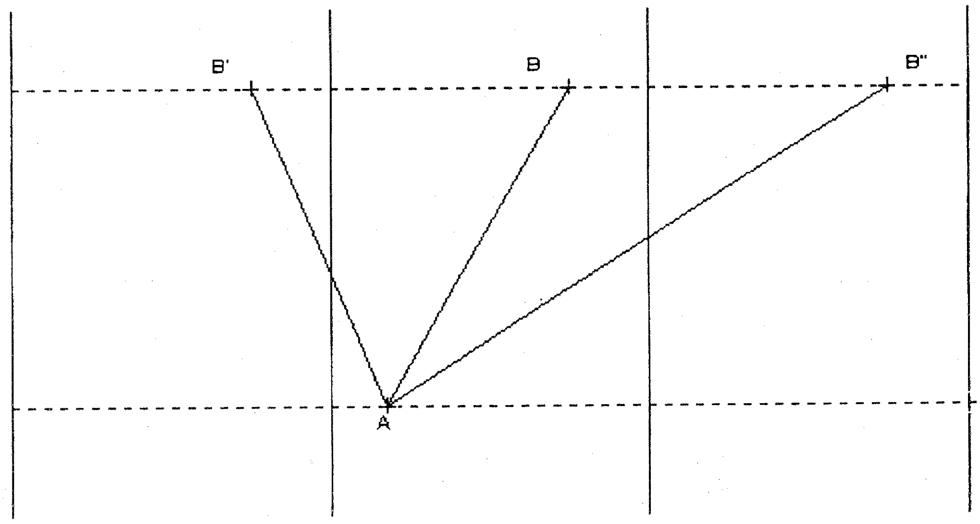
Ainsi en LOGO, la tortue peut quitter l'écran sur le côté droit pour réapparaître en un point opposé sur le coté gauche.

Nous disposons ainsi de plusieurs représentations du cylindre qui vont nous permettre de résoudre les problèmes que nous nous posons à propos de la définition d'une géométrie naturelle sur cette surface.

A titre d'exemple, nous allons envisager le problème de la définition des géodésiques sur le cylindre.
Une première difficulté surgit pour définir la distance de deux points du cylindre (plus court chemin de A à B). En effet, il existe deux possibilités pour rejoindre B à partir de A, on peut l'aborder par la gauche ou par la droite, laquelle des deux lignes est-elle la plus courte ?



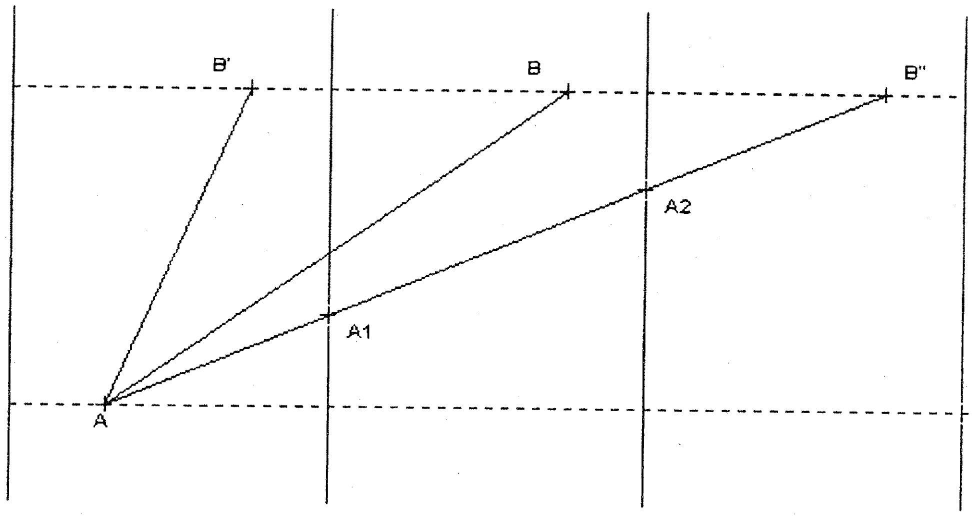
Plaçons-nous dans le réseau plan (Modèle 1) associé au cylindre, le point B est équivalent aux points B', B" etc. La distance de B à A est ainsi obtenue en considérant le plus court des segments AB_i.

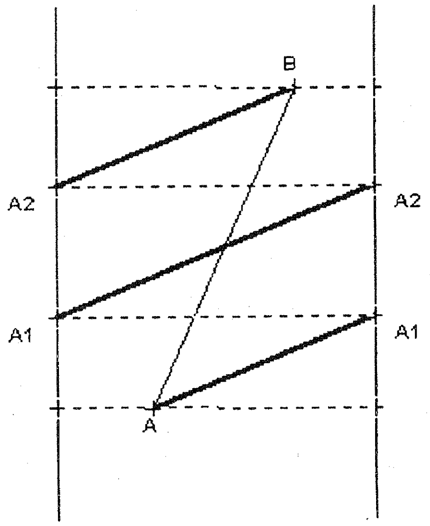


Suivant la position de A par rapport à la médiatrice de BB', le chemin le plus court sera AB ou AB'.

Les droites tracées sur le modèle 1 forment un angle constant avec les génératrices et si l'on retourne maintenant à la surface cylindrique dans R^3, les lignes ainsi obtenues sont des hélices.

Par extension, nous allons appeler droites du cylindre les lignes obtenues en prolongeant le segment de plus courte longueur qui joint A à B. Quelles sont alors toutes les droites du cylindre ?
A côté des hélices, il y a aussi les génératrices qui joignent deux points reliés par une droite parallèle à D.
Enfin, si deux points sont situés sur une perpendiculaire à D, la droite est alors un cercle directeur du cylindre. Dans ce cas, on remarque que la droite (le cercle directeur) est bornée et n'est donc pas illimitée comme dans le plan euclidien.
Il y a donc trois types distincts de droites : les hélices, les cercles directeurs et les génératrices.
Une autre propriété fondamentale de la géométrie euclidienne est fausse dans la géométrie du cylindre : par deux points il passe une infinité de droites. On peut le vérifier grâce aux deux figures suivantes tracées dans les modèles 1 et 2.





Dans l'espace normal associé au modèle 2, le segment AB, résultant de AB" dans le modèle 1, est constitué par les segments [AA_1], [A_1A_2] et [A_2B].

Pour un observateur local, les diverses droites sont pour lui des segments de droites parallèles.

Le développement plan montre également que le théorème de Pythagore est vrai et que la somme des angles dans un triangle est toujours égale à 180°.

Pour conclure, nous pouvons affirmer que dans une boule de rayon L/4, le cylindre possède une géométrie euclidienne, ce n'est pas le cas globalement. Nous dirons que l'espace en question est localement euclidien.

2) Géométrie localement euclidienne : le cas général[5]

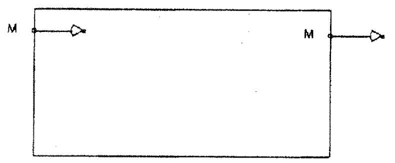
Nous définirons, de manière assez intuitive, les espaces localement euclidiens, comme des espaces dont la géométrie sur tout disque dont le diamètre est inférieur à une valeur fixe L, est une géométrie euclidienne. Une manière plus rigoureuse, dans le droit fil de la pensée de Riemann, consiste à appeler ainsi les variétés dont l'élément linéaire est euclidien.
En dimension deux, nous venons de voir qu'il existe au moins deux espaces localement euclidiens : le plan euclidien et le cylindre. En existe-t-il d'autres? En fait, il y a cinq espaces localement euclidiens de dimension 2 : le plan, le cylindre, le tore, le cylindre de Möbius, la bouteille de Klein.

---

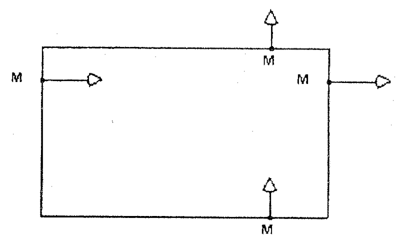
[5] Pour une présentation plus complète de cette partie, nous renvoyons à un article à paraître dans L'ouvert, Université Louis Pasteur, Strasbourg. On peut aussi consulter Cartan opus cité, Klein (1928) Nicht-euklidische Geometrie, et Nikulin et Shafarevitch (1982) Groups and Geometry, les deux ouvrages chez Springer Verlag.

Le problème de la description est résolu grâce à la mise en évidence d'un groupe d'isométries qui agit sur une partie du plan, le domaine fondamental. Ces groupes ont la propriété d'être totalement discontinus et sans point fixe : il s'agit donc de sous-groupes de pavage du plan ou de l'espace considéré. Ainsi, pour décrire l'espace il faut connaître son domaine fondamental et son groupe d'isométrie, on peut ensuite essayer de donner la surface de l'espace qui en est aussi l'image.

Le cylindre,

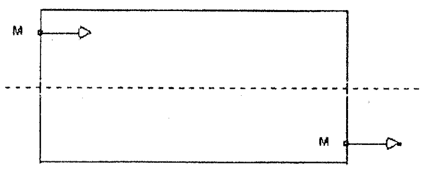


Le tore,



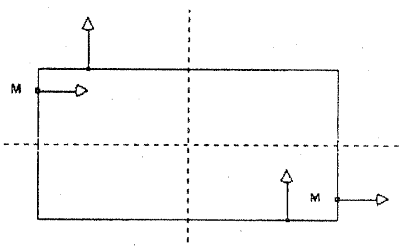
On peut aisément réaliser en LOGO, ces deux géométries. Il faut autoriser le mode enroulement latéral (pour le cylindre) et latéral et vertical (pour le tore)

Le cylindre de Möbius
On peut plonger cette surface dans R^3, en



réalisant un ruban de Möbius, mais infini.

La bouteille de Klein,



Il s'agit de la surface la plus complexe, son plongement dans R^3 est imparfait puisqu'il n'est pas injectif.

En LOGO, il est possible d'envisager ces deux dernières géométries mais en introduisant une tortue bicolore, rouge et bleue. Ainsi, dans la cas de Möbius, la tortue quitte l'écran latéralement en bas et à droite avec sa partie rouge vers le haut et revient latéralement en haut et à gauche avec sa partie rouge vers le bas. Voici un monde bien désorientant à l'image de ces surfaces qui ne sont pas orientables !
Enfin, nous voyons aussi la spécificité de *l'espace normal* qui correspond à ces écrans et qui aide le raisonnement géométrique à s'exercer dans ces espaces.

Vers une approche intrinsèque de l'enseignement de la géométrie ?

Pour conclure de manière provisoire, nous énonçons un certain nombre de pistes que nous souhaitons approfondir à l'avenir et qui nous ont été suggérées par ce travail.

Sur la diversité des géométries

La vision naïve de la géométrie éclate et ceci sans nécessairement recourir aux géométries non-euclidiennes les plus complexes. La validité de la modélisation traditionnelle qui consiste

à passer de la perception de l'espace au modèle géométrique sans interroger le passage du local au global, est remise en cause pour des raisons mathématiques.
Par rapport à notre questionnement initial, nous pouvons noter l'utilité d'introduire la notion "d'espace normal" comme support pour faire de la géométrie. Cet espace dépend de la géométrie choisie par l'intermédiaire du domaine fondamental dans le cas des géométries localement euclidiennes. Nous voyons qu'il ne se réduit pas simplement au micro espace et qu'il est riche, en puissance, de toutes les propriétés de la géométrie étudiée.

Sur l'intérêt mathématique d'une approche intrinsèque

Sans nier l'importance et la nécessité du modèle euclidien ne serait-ce que comme référence, on ne peut exclure de l'enseignement les approches intrinsèques de la géométrie. En effet, il est grand temps de prendre en compte la révolution épistémologique survenue à la fin du XIXème siècle et de préparer les élèves à une vision contemporaine de la géométrie et de la physique. Il est en effet devenu usuel de jongler entre les diverses modélisations de l'espace en fonction de leur efficacité pour résoudre les divers problèmes abordés.
L'enseignement français paraît figé sur le point de vue conventionnaliste développé par Poincaré. Cette approche privilégie la modification des règles de calcul au sein d'un modèle dépassé mais familier alors que dans le point de vue moderne c'est la modification du modèle qui permet d'interpréter et de comprendre les faits.

Sur l'intérêt didactique de cette approche

Les diverses géométries, localement euclidiennes, appuyées sur des espaces différents et familiers peuvent apparaître comme les différents cadres d'un jeu didactique (au sens de R. Douady). Ce jeu peut donner du sens à la définition des objets rencontrés :nous avons vu le problème des droites, mais il en est ainsi de tous les objets qui sont à la base du raisonnement géométrique. On peut ainsi espérer favoriser le processus de définition par les élèves, fondamental en classe, mais difficile à mettre en œuvre. En effet, dans le cadre de la géométrie euclidienne trop d'évidences perceptives viennent parasiter ce processus.
Cette variété des géométries attire aussi l'attention sur la nature des invariants à privilégier et ceci à un moment où les programmes de Lycée réintroduisent les triangles égaux et les triangles de même forme.
Cependant, la question reste entière de déterminer le type de mise en œuvre possible dans la scolarité des élèves et dans la formation des enseignants. Il s'agit là d'un thème possible de recherche didactique profond et à long terme non inféodé à la pression versatile de l'institution scolaire.

Sur la possibilité d'expérimenter

La considération des espaces localement euclidiens, notamment celui du cylindre et du tore, donne aux élèves la possibilité de mener une expérience dans le monde réel. Le passage effectif du modèle abstrait à sa réalisation concrète sur une surface, le jeu dans le modèle rendu possible grâce aux logiciels donnent un sens intuitif fort à ces géométries. Cela nous semble une condition nécessaire pour pouvoir envisager des mises en œuvre dans les classes.

Développement dans le plan euclidien.

Surface de R^3 **Espace Normal**

Modèle informatique

Sur le nouveau sens de la géométrie naturelle

L'ensemble de ces approches renouvelle l'intérêt de bâtir la géométrie naturelle en l'adaptant à son espace de référence. Cette approche plus métrique de la géométrie basée sur des problèmes rejoint l'approche de Clairaut mais en diversifiant les possibilités de modélisation. Cependant la dérive est rapide qui fait passer des problèmes de mesure de l'espace à la mesure effective de l'espace et qui transforme l'élève-géomètre en élève-arpenteur.

Annexe : table des matières de sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie

Plan de cette étude

A. Concept d'une grandeur de n dimensions.

§1. Variétés continues et discrètes. Les parties déterminées d'une variété sont dites des quanta. Division de la doctrine des grandeurs continues en :

1. Doctrine des simples rapports d'étendue, dans laquelle on ne suppose pas que les grandeurs soient indépendantes du lieu.

2. Doctrine des rapports métriques, dans laquelle cette indépendance doit être supposée.

§2. Génération du concept d'une variété d'une, de deux, ... de n dimensions.

§3. Réduction de la détermination de lieu, dans une variété donnée, à des déterminations de quantités Caractère essentiel d'une variété de n dimensions..

B. Rapports métriques dont est susceptible une variété de n dimensions, dans l'hypothèse où les lignes possèdent une longueur, indépendamment de leur position, et où toute ligne est ainsi mesurable par toute autre ligne

§1. Expression de l'élément linéaire. On considère comme planes les variétés dans lesquelles l'élément linéaire est exprimable par la racine carrée d'une somme de carrés de différentielles complètes.

§2. Etude de variétés de n dimensions, dans lesquelles l'élément linéaire peut être représenté par la racine carrée d'une expression différentielle du second degré. Mesure de leur écart de planéité (courbure) en un point donné et en suivant une direction superficielle donnée. Pour la détermination de leurs rapports métriques, il est (sous certaines directions) nécessaire et suffisant que l'on donne en chaque point la courbure suivant $n\frac{n-1}{2}$ directions superficielles.

§3. Explication géométrique.

§4. Les variétés planes (dans lesquelles la courbure est partout nulle) peuvent être considérées comme un cas particulier des variétés dont la courbure est constante. Celles-ci peuvent encore être définies par la propriété que les grandeurs de n dimensions y sont indépendantes du lieu (mobilité de ces grandeurs sans extension).

§5. Surface de courbure constante.

C. Application à l'espace

§1. Systèmes de faits suffisants pour la détermination des rapports métriques de l'espace, tels que la géométrie les suppose.

§2. Jusqu'à quel degré est probable la légitimité de ces déterminations empiriques, lorsqu'on sort des limites de l'observation pour entrer dans l'incommensurablement grand.

§3. Jusqu'à quel degré est-elle probable pour l'incommensurablement petit ? Lien de cette question avec l'explication des phénomènes naturels.

Références :

[1] Houdement et Kuzniak

a) 1999 « Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres » Educational Studies in Mathematics Vol 40/3..

b) 2000 « Formations des maîtres et paradigmes géométriques ». Recherches en Didactique des Mathématiques 20/1.

c) 1999 « Quelques éléments de réflexion sur l'enseignement de la géométrie : de l'école primaire à la formation des maîtres » (Avec C Houdement). Revue Petit X n°51. Article repris dans la revue Grand N

[2] Berthelot et Salin (1992) L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire. Thèse de l'université de Bordeaux.

[3] Gadamer (1976) Vérité et méthode **Seuil.**

---

1 Cahiers du Sud (1948) 1986, *Les grands courants de pensée mathématique* p 47. Ed Rivages