FONDEMENTS THEORIQUES ET PRESENTATION DES LOGICIELS DE LA SERIE ORATIO

ATELIER 10
Robert ADJIAGE,
IUFM d'Alsace

Résumé
Une introduction multi-registres des rationnels à l'école élémentaire.
Le constat qu'un recours précoce au système fractionnaire se heurtait à des obstacles résistants m'a amené à lui substituer un autre registre d'expression, celui des droites graduées, lors de l'introduction des rationnels. L'environnement informatique permet la gestion, à un coût acceptable, de ce registre et de son articulation avec les registres fractionnaires et décimaux étudiés dans un deuxième temps.

Mots clés : Registre sémiotique, nombre rationnel, droite graduée, fraction, décimal.

L'atelier a pour objet la présentation, par leur auteur, d'une série de logiciels et des choix théoriques qui ont présidé à leur élaboration. Ces logiciels constituent le socle d'un dispositif d'enseignement – développé lors d'une recherche doctorante – mis en œuvre dans une classe au cours des deux dernières années de son cycle III. Ils donnent aux élèves l'occasion d'une investigation de trois systèmes d'expression des rationnels, à savoir en respectant l'ordre de leur introduction en classe : les droites graduées ; les écritures fractionnaires ; les écritures décimales.

Exposé préliminaire

Les constats et choix fondamentaux

Deux questions permettront de cerner les enjeux de ce dispositif :
pourquoi accorder aux différents modes d'expression des rationnels une place centrale ?
pourquoi introduire les rationnels sans les fractions ?
Les éléments de réponse à ces deux questions se situent à la convergence de deux axes : l'un de nature empirique, l'autre de nature théorique.
En ce qui concerne le premier axe, maintes observations m'ont conduit à relever que les premiers contresens stables, plutôt freins que tremplins d'apprentissage, sont plus liés à des formes d'expression symbolique, notamment l'écriture fractionnaire, qu'à un défaut d'interprétation et de résolution, au moyen de la langue naturelle, des premiers problèmes rationnels, c'est-à-dire le plus souvent des problèmes qui modélisent une expérience physique mettant linéairement en relation deux séries de données entières (voir transparent #1).

Le deuxième axe se réfère à la théorie des registres de Raymond Duval, qui place l'appropriation et l'articulation d'au moins deux registres d'expression au cœur de la genèse conceptuelle. Cette théorie permet de mieux comprendre l'inadéquation du système fractionnaire à une introduction des rationnels. Examinons pour cela la manière dont s'oriente la prise et la production d'information, lors de la résolution d'un problème rationnel comme celui de la comparaison des épaisseurs de feuilles de papier de G. & N. Brousseau (voir transparent #1), suivant que le discours résolvant est tenu en langue naturelle ou au moyen des écritures fractionnaires. Dans le premier cas, l'énoncé du problème et son traitement mobilisent le même registre, qui sépare et articule séquentiellement les données, numériques (nombres exclusivement entiers) ou non numériques, le long d'une seule ligne d'écriture. Dans le second cas, le discours fractionnaire introduit une partition à deux voix, se développant sur deux lignes d'écritures (numérateur et dénominateur) liées, utilisant un symbolisme identique (les nombres entiers), mais dont le mode de signification et de traitement est radicalement différent. La conversion entre l'énoncé du problème (unidimensionnel) et les écritures fractionnaires résolvantes (bidimensionnelles) est donc non congruente, au sens de Duval (1995, pp. 47-49), et c'est ce caractère de non congruence qui peut expliquer les obstacles résistants rencontrés par les élèves lors des premiers apprentissages concernant les fractions. On notera qu'oser un développement **d'égalité en égalité** (ou d'inégalité en inégalité) est à l'origine de la bidimmensionnalité du discours fractionnaire et de sa compactification, ce qui le rend hautement appréciable pour les experts mais opaque pour les novices. Ces derniers ont en effet tendance à voir dans cette égalité (ou inégalité) une relation entre **deux** entiers (**deux** numérateurs et / ou **deux** dénominateurs successifs), et non une relation entre deux relations (les rapports à comparer) portant sur des entiers (Adjiage, 1999, pp.129-132). Par opposition, le traitement rhétorique (voir par exemple les démonstrations d'Euclide dans les livres V, VII et X, mais aussi les notations $a : b : : c : d$, lues a est à b comme c est à d, utilisées jusqu'au XIX$^{\text{ème}}$ siècle), progressant **d'équivalence en équivalence**, maintient la séquentialité du discours.

Résumons-nous :
l'expression symbolique des rationnels pose problème ; ce type de problème sera la base des situations problèmes posées par les logiciels ;
l'expression fractionnaire est inadaptée à une introduction des rationnels.
Ces constats m'ont donc amené à envisager des apprentissages qui débutent par l'appropriation d'un premier système d'expression des rationnels, alternatif à celui des écritures fractionnaires : le système des droites graduées (voir transparent #2), entendu comme un véritable registre d'expression des rationnels, c'est-à-dire un concurrent sérieux et pas une simple illustration des systèmes fractionnaire et décimal.

Ce choix se justifie par au moins quatre types de raisons :
- la nature de ce support, à la fois physique – explicite les opérations fondatrices de report et de subdivision – et à la fois sémiotique – représente des nombres et pas, comme les parts de tartes, une double quantification matérielle ;
- le type des traitements envisageables qui permettent d'annoncer et, après leur introduction, de contrôler les registres fractionnaire et décimal ;
- la possibilité, grâce aux ordinateurs, de faire de ce support un véritable champ expérimental, ouvrant la voie à des processus essai / erreur, à un coût raisonnable ;
- la possibilité d'inscrire dans ce registre les deux séries, liées par linéarité, de données entières qui caractérisent les premiers problèmes rationnels. En se reportant au transparent #2, paragraphe 0, on constatera en effet que, s'autorisant des repères autres que [0 ; 1], il est non seulement possible de représenter différemment "*trois fois un quart*" et "*un quart de trois*" (ce que ne permet pas le système fractionnaire), mais surtout d'interpréter trois quarts comme une dilatation transformant 4 en 3, (et donc 6 en 8, etc) ou comment 4 "peut tenir" dans 3, ce qui autorisera ultérieurement une interprétation du produit par une fraction (par exemple $\times\frac{3}{4}$) comme une dilatation (transformant 4 en 3 dans notre exemple).

Pour terminer ce paragraphe, j'évoquerai la manière dont la série ORATIO aborde l'étude des registres usuels, fractionnaire et décimal. Le cahier des charges, résumé dans le transparent #3, se veut minimal pour permettre, conformément à la théorie des registres, la détermination des unités signifiantes débouchant sur la discrimination de deux fractions ou de deux décimaux. On notera que la comparaison est l'opération qui fonde la possibilité de cette discrimination.

Structure de la série des 20 logiciels

On distingue deux grandes phases d'investigation des logiciels, liées aux trois opérations cognitives fondamentales (formation, traitement et conversion) énoncées par Raymond Duval (1995, pp.36-44). A ces deux phases correspondent deux familles de logiciels :

une première phase (formation et traitement) est destinée à une investigation interne à chacun des registres retenus ; la famille des logiciels qui lui correspond se subdivise en trois séries (Gradu ; Fracti ; Format) ;

une deuxième phase (conversion) est destinée à la mise en place des correspondances entre les diverses manières de signifier des trois registres étudiés ; la famille des logiciels qui lui correspond est formée de six éléments organisant toutes les conversions envisageables, dans les deux sens, entre les trois registres concernés.

Les ressources d'investigation des logiciels par les élèves

Les pré-requis sont minimaux : l'élève peut ne disposer pour tout bagage initial que des nombres entiers et de leur représentation sur droite graduée, d'une idée intuitive et / ou partielle de la notion de fractionnement, par exemple à travers une application de fractions simples – demis, quarts, tiers... – à des grandeurs usuelles – longueur, volume, durée.

L'investigation commence par la lecture du "mode d'emploi" qui annonce brièvement la nature de la tâche ; provoque les premiers questionnements auxquels on se garde bien de répondre.

Actions

Dans le but de respecter le mouvement entre les mises à l'épreuve, les réfutations et les validations, on se refuse, lors de l'exploration d'un registre, à enseigner a priori les règles qui le régissent. On préfère laisser les élèves tester les idées qu'ils se font de ces règles (par exemple, tester si 3,5 est plus petit que 3,14 parce que 5 est inférieur à 14), les mettre à l'épreuve des traitements autorisés par le logiciel puis des corrigés qu'il propose. Un maximum de degrés de liberté est en conséquence laissé aux utilisateurs (tenter, effacer, recommencer, changer d'échelle…). Cette phase permet de préciser le jeu des actions permises par le logiciel.

Rétroactions

Personnalisées et en temps réel, elles relancent le processus de recherche et donc ne sont pas de simples sanctions, positives ou négatives, débouchant sur des fins de non recevoir. (j'appelle « moulinette » une procédure, destinée à tester la validité d'une réponse, dont le verdict permet la mise au point d'un nouvel essai plus adéquat : *par exemple, pour trouver l'expression décimale de 3/4, on dispose de la moulinette : ... x 4 = 3, qui permet de décider qu'un essai comme 0,8 est trop grand car 0,8 x 4 > 3*).

Aide

Certains logiciels proposent une aide, non conçue pour accélérer ou court-circuiter un itinéraire d'apprentissage, mais pour pallier une difficulté technique – table de multiples – ou pour fournir un cadre de validation à forte valeur rétroactive – moulinette comme le format à virgule fixe pour la saisie et la comparaison des décimaux.

Verdict, score et corrigé

Pour que chaque action ait un coût, les exercices sont sanctionnés par un score prenant en compte le résultat et la manière d'y parvenir. Verdict et corrigé sont en général dynamiques, c'est-à-dire qu'ils prennent en compte à la fois la spécificité du cas traité et des interventions de l'élève. Il n'était pas rare d'observer, lors de mon expérimentation, des élèves qui, pour étudier les enseignements du corrigé, ont sciemment saisi des réponses erronées.

Trois moments forts du travail de conceptualisation ainsi entendu

1- Un premier moment important du travail de conceptualisation sera lié à des interrogations internes à un registre, par exemple l'équivalence des deux expressions suivantes de trois quarts : trois fois un quart et un quart de trois (transparent #2, § 0).

2- Un deuxième moment fort sera celui du détachement de la notion de son inscription initiale dans le premier système de représentation, droite graduée, par la prise en compte d'une inscription concurrente dans un autre système sémiotique, par exemple les écritures fractionnaires (voir Figure 1). Comment s'inscrit le 3, le 4, la barre de fraction de $\frac{3}{4}$ sur l'un ou l'autre des segments gradués ; quelles répercussions aura, sur l'expression au moyen du segment gradué, la variation d'un des constituants de la fraction ?

$\frac{3}{4}$

Figure 1 : trois expressions concurrentes de trois quarts

3 - Un troisième moment fort sera celui posé par la question de savoir en quoi l'une ou l'autre de ces expressions interprète et permet de résoudre un problème comme : 4 feuilles de papier ont une épaisseur de 3 mm, quelle est l'épaisseur d'une feuille de papier ? Ou encore comparer l'épaisseur d'une des feuilles de ce dernier tas à celle d'une feuille tirée d'un tas de 5 mm comportant 7 feuilles.

Itinéraire suggéré d'exploration des logiciels par les stagiaires

Logiciels de traitements

Série GRADU : gradu1 ; gradu4 ; gradu5 ; gradu6, exercices 1 et 4 ;

Série FRACTI : fracti1 ; fracti4 ; fracti5, exercice 4 ;

Série FORMAT : format1 ; format 2, exercice 3.

Logiciels de conversions

Form2gra, exercice 2 ; Form2fra, exercice1 ; Frac2for.

Deux questions et commentaires abordés lors du débat

Plutôt qu'un compte-rendu chronologique des différentes interventions, que j'aurais du reste été incapable de produire en l'absence d'un secrétariat de séance, j'ai trouvé préférable de tenter un résumé des interrogations autour de deux types de commentaires ou appréciations.

ORATIO et conceptualisation de la notion de rationnel

Question
Oratio ne propose-t-il pas qu'un travail sur des codes qui ne renverraient à rien ?

Éléments de réponse :
La notion de registre est beaucoup plus complexe que celle de code, car elle n'est pas centrée sur le signe mais sur la fonction d'objectivation qui suppose la mise en relation de discours tenus au moyen de formes d'expressions hétérogènes (et pas seulement celle d'un signifiant à un signifié). C'est lorsque je cherche à convertir 3,54 (élément d'un premier registre, inséré par ORATIO dans un discours de comparaison à 3,7 – ou 3,2345 ou ...) au moyen d'un format à virgule fixe en un point d'une droite graduée (élément d'un deuxième registre, pris dans un discours d'approximations successives entre deux entiers puis, au moyen de zooms récurrents, entre deux graduations au dixième puis enfin attrapé par une graduation au dixième de dixième) que je peux comprendre le rôle de chaque décimale et, notamment, en quoi le 54 (de 3,54) est inférieur au 7 (de 3,7) ou supérieur au 2345 (de 3,2345). La notion de registre ne se conçoit pas de façon isolée (comme un code) mais en concurrence avec d'autres registres. La forme d'objectivation attendue (de la notion de décimal en l'occurrence) repose sur la recherche d'invariants entre ces représentations hétérogènes.
Lorsque l'on dit "ne renvoie à rien", on pense bien souvent à l'absence d'une expérience sensible, comme si la problématisation d'une notion mathématique ne pouvait se concevoir qu'en référence au monde physique. Sans chercher à nier l'importance de la modélisation de problèmes physiques dans la construction des objets et notions mathématiques (voir ci-dessus le paragraphe 0, point n° 0), il importe de la relativiser : "Or les mathématiques se nourrissent aussi de processus de création contingents et libres qui apportent des concepts réellement nouveaux, dont l'origine n'est **ni le monde extérieur** ni l'entendement pur, mais plutôt la **nécessité interne des formalismes eux-mêmes** " (Klein, 2000, p.71). Prenons quelques exemples.
La notion de continuité, sitôt qu'elle s'exprime en (ε ; η), amène à prendre en compte des objets beaucoup plus diversifiés et complexes que ceux représentés graphiquement par un trait continu.
Le théorème de Fermat ($x \;\; + y \;\; = z$ n'admet pas de solutions entières pour $n > 2$), pour lequel une certaine forme d'expression (généralisant pour n quelconque l'équation $x^2 + y^2 = z^2$ qui admet des solutions entières) est à l'origine et à l'horizon du problème posé.
La recherche de solutions, **exprimables par radicaux**, d'une équation de degré n témoigne d'une volonté des mathématiciens de considérer comme solutions acceptables à leur problème celles liées à une forme d'expression, les radicaux, dont on pourrait sans doute montrer qu'il s'agit bien d'un registre ; alors qu'il eût été envisageable – ce qu'a entrepris notamment Newton – de développer des méthodes d'analyse numérique pour exprimer et approcher les solutions de ce type d'équation.

En ce qui concerne les apprentissages liés aux rationnels à l'école élémentaire, rappelons enfin que ce qui nous a décidé à tenter l'expérience d'une introduction procédant par nécessités internes aux mathématiques provient du constat que la première source d'erreurs stables est plus liée à des obstacles sémiotiques qu'à des difficultés dans la modélisation des premiers problèmes rationnels.

ORATIO et les processus de validation

Remarque d'un participant

Un logiciel comme Form2fra (convertir des écritures à virgule en somme de fractions décimales) ne propose pas de "moulinette" pour valider les hypothèses des élèves. Seul le verdict sans appel du logiciel, et pas un travail réfléchi, permettrait de débusquer une confusion centièmes / centaines par exemple.

Éléments de réponse

Chaque logiciel d'ORATIO doit s'entendre dans un ensemble plus vaste, renvoyant à d'autres logiciels, donc à d'autres registres ou d'autres conversions, mais aussi à des expériences physiques dont on a vu l'affinité avec le registre des droites graduées. C'est pourquoi il convient, en présence d'un obstacle didactique, de s'interroger sur les possibilités offertes par ce dernier registre pour le traiter. En l'occurrence, le logiciel Form2gra qui propose des conversions, au moyen de zooms successifs, des écritures décimales vers le registre des droites graduées nous semble être une piste adaptée de travail consécutivement à une confusion de type centièmes / centaines. En effet, ce logiciel permet d'associer à chaque tête de série décimale (une puissance de dix) un niveau de "profondeur de zoom" et donc d'engager un protocole de discrimination basé sur des interventions directes de l'élève (sélectionner l'intervalle à agrandir, lui appliquer un zoom, décider d'arrêter, et donc de choisir une graduation, ou de poursuivre le processus...).

ANNEXES

Transparent #1

Les élèves comparent l'épaisseur de deux feuilles de papier, chacune issue d'un tas différent, connaissant l'épaisseur et le nombre de feuilles de chaque tas (dans un tas donné, les feuilles sont de même épaisseur). Ce problème est destiné à la construction de la notion de rationnel-mesure.
Propos d'un élève : *« 60 f[euilles] ; 7 mm, c'est du (papier) fin, c'est pas du A [un des types de papier étudiés auparavant], on avait trouvé pour A (3f ; 1 mm) » – sous-entendu 60 f de A feraient bien plus de 7 mm".*

Un traitement rhétorique du problème de la comparaison des épaisseurs de deux feuilles de papier (Brousseau, 1986, p. 141)

$$\frac{1}{3}=\frac{20}{60} \quad \text{or} \quad \frac{20}{60}>\frac{7}{60} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{3}>\frac{7}{60}$$

Un traitement fractionnaire du problème de la comparaison des épaisseurs de deux feuilles de papier

Transparent #2 : le registre des droites graduées

Données

Une droite graduée régulièrement par des entiers ; un repère formé d'un couple d'entiers privilégié, parfois initialement subdivisé en s ($s \geq 1$) intervalles ; un nombre entier f (initialement égal à s), le fractionneur, dans une fenêtre en blanc sur fond noir à gauche du repére ;

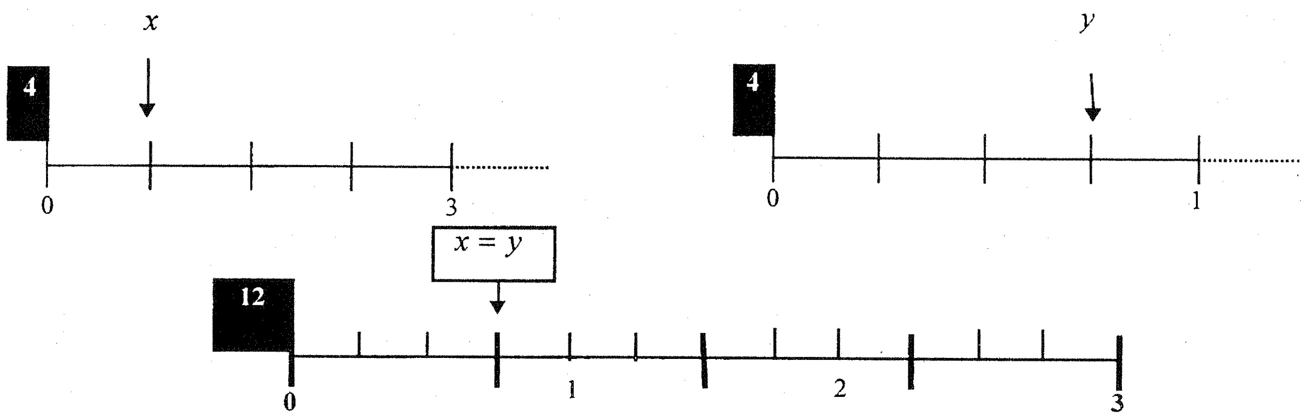
Ressources

Possibilité de resubdiviser **chaque intervalle** du repère en t sous-intervalles (f prenant alors la valeur $s\,t$), le recours à un système de zoom étant parfois possible ;
possibilité – pour certains logiciels seulement – de reporter le repére éventuellement resubdivisé.

Notons en outre que l'utilisateur :

saisit le nombre t directement au clavier, le logiciel assurant les opérations géométriques de resubdivision ;
peut effacer, modifier, tout recommencer...
marquer la position d'un rationnel par une flèche pointant vers un point de la droite.

Un exemple significatif : la possibilité d'inscrire différemment un quart de trois et trois fois un quart dans ce registre



Un quart de trois et trois fois un quart réfèrent au même nombre

Transparent # 3 : compétences minimales pour discriminer une fraction d'une autre fraction, un décimal d'un autre décimal

Registre fractionnaire

ranger les fractions par rapport aux entiers ;
ranger les fractions entre elles.
Exemples :
Séparation de $\frac{7}{5}$ et $\frac{9}{4}$, immédiat par 2
Séparation de $\frac{3}{5}$ et $\frac{2}{3}$
$\frac{3}{5}?5 = 3$; $\frac{2}{3}?5 = \frac{10}{3}$; et comme $\frac{10}{3} > 3$: $\frac{3}{5} < \frac{2}{3}$

Le point 0 utilise l'égalité : $\frac{a}{b}?n = \frac{na}{b}$, légitimée dans un contexte physique.

Registre décimal
ranger les décimaux entre eux .
Un outil purement sémiotique, le format à virgule fixe, suffit à l'acquisition de cette compétence.

BIBLIOGRAPHIE

Adjiage Robert & Heideier Aimé (1998), *didacticiels de la série Oratio*, éditions Pierron, 57206 Sarreguemines.

Adjiage Robert (1999), *L'expression des nombres rationnels et leur enseignement initial*, thèse, IREM, ULP Strasbourg 1.

Adjiage Robert et Pluvinage François (2000), *Un registre géométrique unidimensionnel pour l'expression des rationnels*, RDM Volume 20/1 n° 58, pp. 41-87, Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble.

Brousseau Guy et Nadine (1986), *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, thèse, Bordeaux.

Brousseau Guy et Nadine (1987), *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, IREM de Bordeaux.

Duval Raymond (1995), *Sémiosis et pensée humaine*, Éditions Peter Lang, Bern.

Duval Raymond (1996), *Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ?* RDM Volume 16/3, pp. 349-382, Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble.

Klein Étienne (2000), *L'atome au pied du mur*, p. 71, Éditions Le Pommier.