PRATIQUES DE CALCUL MENTAL, PRODUCTION COLLECTIVE D'ECRITS MATHEMATIQUES ET RESOLUTION DE PROBLEMES NUMERIQUES A L'ECOLE ELEMENTAIRE ET AU DEBUT DU COLLEGE

COMMUNICATION
D. BUTLEN, M. PEZARD,
IUFM de CRETEIL, équipe DIDIREM

Introduction

La recherche présentée ici porte sur les liens entre les habiletés calculatoires, la construction de représentations d'un problème numérique et la résolution de celui-ci chez des élèves de la fin de l'école élémentaire et du début du collège.
Dans ce but, nous étudions l'impact d'une pratique régulière de calcul mental sur la résolution de problèmes. Nous avons choisi cette entrée car nous admettons que le calcul mental est un champ d'expérience pour la résolution de problèmes numériques. En effet, la pratique du calcul mental accroît les habiletés calculatoires des élèves ; elle renforce leurs connaissances des propriétés des nombres et des opérations et les rend plus disponibles. De plus, une pratique régulière de calcul mental développe les capacités d'initiative des élèves ; elle leur permet de ne pas recourir immédiatement aux algorithmes écrits, parfois coûteux, mais au contraire d'explorer rapidement, par différents tâtonnements ou essais, diverses voies de résolution d'un problème numérique.
Notre travail s'inscrit dans le cadre de la didactique des mathématiques. Il étudie dans quelle mesure et sous quelles conditions une pratique régulière de calcul mental aide à la résolution de problèmes numériques. *Pour cela, nous construisons deux scénarios faisant intervenir plusieurs variables liées à la gestion de la classe, aux contenus mathématiques, aux différents niveaux scolaires (fin de l'école élémentaire et début du collège) et au temps d'expérimentation.*

Dans un premier temps, nous testons un dispositif expérimental minimal caractérisé par une simple pratique régulière de calcul mental (calculs mentaux, résolutions mentales de problèmes). Nous ne le décrirons pas ici ; nous renvoyons le lecteur à [11] (Butlen D. et Pézard M. 1996)
Dans un second temps, nous étudions des conditions permettant d'améliorer les résultats précédents en testant un dispositif d'enseignement intégrant le premier et présentant deux nouvelles composantes : une explicitation régulière, par le professeur, des méthodes rencontrées en mathématiques ; un recours à la production d'écrits collectifs. Cette production collective d'écrits est supposée favoriser une distanciation de l'élève par rapport à l'action et au contexte de l'apprentissage, une explicitation, par l'élève, des notions et méthodes fréquentées et plus généralement une décontextualisation de celles-ci. Or nous supposons que cette dernière favorise la résolution de problèmes en général.

Dans une première partie, nous présentons le cadre général de la recherche et notre problématique. Nous exposons ensuite la méthodologie et les principaux résultats. Nous concluons en montrant l'intérêt de notre ingénierie pour certains élèves en difficulté en mathématiques.

Problématique et cadre théorique de la recherche

Notre recherche s'inscrit prioritairement dans le cadre théorique de la didactique des mathématiques, tout en s'appuyant sur certains travaux de sociolinguistique et de psychologie cognitive.

1. Une recherche s'inscrivant dans la continuité de certains travaux de didactique des mathématiques

Nous prenons en compte les résultats des travaux sur le "méta", en particulier ceux d'A. Robert et de J. Robinet [38], ceux des travaux sur les élèves en difficulté (M.J. Perrin [33], D. Butlen et M. Pézard [9]) et ceux des travaux sur la mémoire didactique (J. Centeno , G. Brousseau [13]).

2. Une prise en compte des travaux de sociolinguistique sur le rapport au savoir, sur les liens entre langage et rapport au savoir

Notre recherche s'inspire , en la particularisant, de l'idée de "bilan de savoir " exploitée par B. Charlot, E. Bautier et J.Y. Rochex dans [14]. Toutefois nous ne l'utilisons pas seulement comme outil de diagnostic mais comme élément moteur de notre dispositif d'enseignement.

Nous reprenons, en les adaptant au domaine de l'enseignement des mathématiques, les notions de rapport au savoir définies par E. Bautier, B. Charlot et J.Y. Rochex dans [14], [2] et [3]. Nous pensons notamment que le rapport au savoir construit par les élèves en mathématiques relève plutôt d'un processus dialectique entre rapport identitaire et rapport épistémique. Nous développons cette idée dans un article à paraître dans RDM [12] en nous appuyant sur deux types d'arguments : d'une part la nature même des concepts mathématiques et d'autre part les étapes possibles de la conceptualisation en mathématiques. En effet le caractère à la fois outil et objet des concepts ne permet pas de distinguer aussi nettement le rapport identitaire lié à l'expérience et donc à l'aspect utilitaire du savoir, du rapport épistémique lié au savoir en tant qu'objet.

Nous reprenons aussi l'idée de processus d'objectivation du savoir en proposant une situation spécifique qui permette à l'élève de prendre de la distance par rapport à l'action et au contexte de l'apprentissage. Nous appuyant sur l'idée qu'un rapport épistémique au savoir se construit à travers l'écrit, nous proposons aux élèves de produire collectivement un texte écrit faisant le bilan des savoirs mathématiques fréquentés.

3. Une recherche s'appuyant sur certains travaux de psychologie cognitive portant sur les systèmes mnésiques et sur les représentations de problèmes

Dans l'interprétation de nos résultats, nous nous appuyons sur certains travaux, en particulier ceux de J.F. Richard [35], de M. Fayol [20] et de J. Julo [27] sur la représentation des problèmes. Nous retenons notamment le modèle de fonctionnement de l'espace mental se traduisant par l'équation : ET = ES + EO
ET : espace de traitement des données
ES : espace de stockage des données et de construction de la représentation associée à un problème.
EO : espace requis par les opérations.

Nous retenons également la définition de la représentation d'un problème proposée par J.F. Richard dans Psychologie Française n°29 : " *un problème est défini par trois catégories d'éléments : la situation initiale, la situation terminale ou but à atteindre, les transformations (matérielles ou symboliques) permises pour y parvenir. La représentation du problème est l'interprétation que le sujet se donne de ces différents éléments.* "

Des travaux de J. Julo, nous retenons les trois processus [27] qui lui paraissent importants dans la construction de représentations particularisées de problèmes : le processus d'interprétation et de sélection, le processus de structuration et le processus d'opérationnalisation.
Le processus d'interprétation conduit le sujet à sélectionner certaines informations pertinentes du point de vue de la tâche à réaliser et à les décoder. Ce décodage passe par une interprétation du " contexte sémantique "[1]
L'analyse du processus de structuration amène J. Julo à évoquer la notion de " schéma de problèmes ". Les problèmes que l'élève rencontre sont mémorisés en tant que connaissances spécifiques et intégrés comme telles à sa structure cognitive.
Le processus d'opérationnalisation *«est celui qui permet le passage à l'action, qu'il s'agisse d'une action effective (commencer des calculs, faire un dessin, tâtonner...) ou d'une action mentale (faire des déductions...) »* . Ce processus se caractérise par la mise en œuvre de connaissances opératoires issues de l'expérience du sujet sur la résolution de problèmes.

J. Julo évoque deux cas permettant de mieux comprendre comment l'élève élabore des procédures de résolution. Le premier cas est celui de la mobilisation " d'un prototype de problème ". Le second cas est celui des problèmes dans lesquels l'élève peut agir, faire des essais, tâtonner. L'étude de ce cas l'amène à préciser la notion d'heuristique : " *il s'agit de connaissances propres à la résolution de problèmes qui ne conduisent pas directement à la solution d'un problème donné mais qui augmentent la probabilité de découvrir celle-ci* ". Il les définit aussi comme des règles d'action qui orientent la recherche dans une direction ou dans une autre.

[1]Contexte sémantique : ensemble très vaste d'éléments de nature différentes dont certaines variations peuvent faciliter ou perturber la mise en place de la représentation du problème.

D'après J. Julo, le processus de structuration et les connaissances spécifiques que sont les schémas de problèmes pourraient avoir un rôle important dans le passage à une représentation opérationnelle.

Pour conclure, notre recherche comporte donc la construction et l'expérimentation de deux scénarios d'enseignement, l'analyse des données et l'interprétation des résultats selon deux dimensions : d'une part, la nature des écrits produits par les élèves et leurs effets sur le processus de conceptualisation ; d'autre part, l'étude de conditions (pratique régulière de calcul mental, production d'écrits collectifs, explicitations de méthodes) permettant d'aider à la résolution de problèmes.

Méthodologie

1. Description des scénarios d'enseignement, des publics testés et des modalités d'évaluation

Rappelons que nous ne décrivons ici que le second scénario, celui faisant intervenir, en plus d'une pratique régulière de calcul mental, une production d'écrits mathématiques collectifs résumant ce qui a été fait et appris en classe dans le domaine numérique et une explicitation orale, régulière, par le professeur, des méthodes rencontrées.

Nous avons diversifié le public de notre expérimentation sur trois niveaux de classe : une classe de CM2 (Melun, 77), une classe de sixième (collège de Maisons-Alfort, 94) et une classe de collège suivie pendant deux ans (en sixième et cinquième, collège de Vanves, 92). Les élèves testés sont souvent en difficulté en mathématiques : la classe de sixième de Maisons-Alfort est une classe faible ; la classe de sixième, suivie en cinquième, est la plus faible du collège de Vanves.

<u>Les activités régulières de calcul mental</u>

La classe de CM2 pratique régulièrement, toute l'année, du calcul mental, sous deux formes : d'une part des activités brèves et régulières (5 à 10 minutes tous les jours) ; d'autre part, des activités plus soutenues (environ trente minutes, une fois par semaine) au cours desquelles, il y a notamment une explicitation des différentes procédures utilisées ou susceptibles de l'être (voir annexe 1).
Les professeurs des deux classes de sixième et de la classe de cinquième consacrent, tout au long de l'année, 1 heure 30 sur trois semaines au calcul mental se découpant dans l'ordre de la façon suivante : trois séances de 10 minutes, une séance plus importante de quinze à vingt minutes de bilan, une séance de 45 à 50 minutes de production collective d'écrits.

La situation de production d'un écrit collectif

Tous les deux semaines en CM2, toutes les trois semaines dans les classes de collège, nous avons mis en place une situation spécifique de "bilan et production d'un écrit collectif", organisée ainsi : deux élèves de la classe doivent, en dehors du temps scolaire, rédiger un texte de quelques lignes (entre 5 et 10 lignes) résumant tout ce qui a été appris d'important en calcul mental depuis la séance précédente et notamment ce qu'il est utile de retenir de ces activités pour résoudre des problèmes numériques.

La consigne donnée aux élèves est la suivante : *"En 10 lignes maximum, vous rédigez un texte résumant tout ce qui a été appris depuis la dernière séance pendant les activités de calcul mental et de résolution mentale de problèmes ; vous préciserez si ce que vous avez appris lors de ces activités vous a été utile dans d'autres activités."*

Cette consigne a fait l'objet d'explicitations orales renouvelées à chaque séance (du moins au début) permettant de clarifier l'attente du professeur.

Le texte, écrit au tableau ou sur une feuille lisible par tous, est soumis au débat de l'ensemble de la classe pendant vingt à trente minutes au CM2, trente à quarante minutes au collège. Il est éventuellement amélioré collectivement puis adopté par la classe. Il est ensuite recopié dans un classeur (individuel mais aussi collectif) ; chaque élève peut ainsi y avoir accès. L'ensemble de ces textes constitue une mémoire collective écrite du travail effectué par les élèves dans le domaine numérique. Ils explicitent ainsi ce qu'ils jugent collectivement important de retenir des activités pratiquées.

Cette situation a un double but de diagnostic et d'apprentissage.
D'un point de vue de diagnostic, nous pensons avoir ainsi accès à ce que les élèves retiennent des activités de calcul mental faites en classe, à ce qui est important pour eux, et dans une certaine mesure, à certaines de leurs conceptions des nombres et des propriétés des opérations. Nous pensons recueillir des indices sur le niveau de disponibilité de ces connaissances ainsi que des indications sur certains réinvestissements d'une pratique régulière de calcul mental dans la résolution mentale et écrite de problèmes.
Du point de vue de l'apprentissage, nous admettons que ces séances où les élèves doivent produire un écrit collectif leur permettent de prendre du recul par rapport aux méthodes mises en œuvre, de les dépersonnaliser, de les décontextualiser et donc de mieux se les approprier.

Afin de mieux mesurer les effets de notre ingénierie et de préciser l'apport des activités de calcul mental et de production d'écrits collectifs à la résolution de problèmes, nous avons recueilli, en fin d'année, des textes individuels de bilan dans les classes entraînées et dans des classes témoins (2 classes de CM2, de sixième et de cinquième). D'après les enseignants, ces dernières sont constituées, dans l'ensemble, d'élèves ne présentant pas de difficultés particulières.

Les élèves des classes entraînées et des classes témoins de CM2 et de sixième doivent écrire en fin d'année (mois de juin) un texte individuel correspondant à la consigne ci-dessous :

"Vous devez écrire un texte résumant tout ce que vous avez appris d'important cette année pour résoudre des problèmes, tout ce qu'il faut retenir, utiliser, faire, pour savoir résoudre des problèmes où interviennent des nombres.
Le texte ne doit pas être trop long. Il doit tenir sur une feuille."

Pour les élèves de cinquième, la consigne est légèrement différente :
"Ecris tout ce qui te semble important de retenir à propos de ce que tu as appris cette année en calcul mental et plus généralement ce qui te sert dans la résolution de problèmes."

2. Méthodologie adoptée pour analyser les différentes productions des élèves

Pour analyser les productions des élèves, nous avons adopté deux grilles complémentaires de lecture. Le premier type de grille permet une analyse des textes collectifs et individuels produits par les élèves des classes entraînées et témoins centrée sur la place prise par les différents types d'énoncés mathématiques ou de méthodes.
Le second type de grille nous permet d'affiner cette analyse en nous intéressant plus particulièrement à un type d'énoncé : l'énoncé intermédiaire entre l'énoncé formel et l'exemple seul.
Pour mener ces deux analyses, nous avons découpé les textes des élèves en unités significatives : nous entendons par unité significative une partie de texte ayant un sens en elle-même indépendamment des autres ; elle peut comporter plusieurs mots, une ou plusieurs phrases.

Dans un premier temps, nous nous proposons donc d'analyser les textes collectifs en adoptant quatre points de vue, inspirés de la grille d'analyse mise au point par I. Tenaud et A. Robert (cf. I. Tenaud [44]) : la présence ou non d'énoncés mathématiques, la présence ou non d'énoncés de méthodes, la description du contexte de la situation d'apprentissage (énoncé de la consigne ou de la tâche à effectuer) et éventuellement de sa finalité (cf. annexe n°2).

Chaque type d'énoncé est analysé selon son degré de contextualisation. Pour les énoncés mathématiques, nous avons distingué trois niveaux : l'énoncé formel (théorème, définition, propriété, règle de calcul...), l'énoncé formulé à partir d'un exemple, et l'exemple (ou le contre-exemple) seul sans énoncé de règle généralisante.

Pour les énoncés de méthodes, nous avons distingué quatre niveaux : l'énoncé de méthodes très générales non liées à un contenu mathématique, l'énoncé de méthodes faisant référence à un contenu mathématique assez général, l'énoncé de méthodes décontextualisées, attachées à un contenu mathématique précis et explicité, et enfin l'énoncé d'exemples de procédures ou de techniques de calculs contextualisées.
Le tableau ci-dessous présente pour chaque niveau un exemple d'énoncé.

Niveau de contextualisation des énoncés de méthodes		Exemple d'énoncé
méta 1	Enoncé de méthodes très générales non liées à un contenu mathématique	" *c'est utile de connaître plusieurs techniques de calcul pour ne pas être en difficulté*" ou bien " *il faut expliquer nos erreurs pour ne pas les refaire ou pour éviter que d'autres les refassent* "
méta 2	Enoncé de règles ou de méthodes faisant référence à un contenu assez général	" *pour faire une opération juste, il faut chercher l'ordre de grandeur* " ou bien " *quand l'opération est trop compliquée, il faut remplacer les nombres difficiles par des nombres simples* "
méta 3	Enoncé de règles ou de méthodes décontextualisées mais attachées à un contenu mathématique précis	*nous avons remarqué que quand on multiplie un nombre par 0,5 ; on le divise par 2"* ou bien, à propos de la règle des zéros : "*dans notre tête, mentalement, nous nous sommes dit que l'exposant indiquait de combien de rangs vers la droite, on déplaçait la virgule"*
méta 4	Enoncé d'exemples ou de procédures ou de techniques de calcul contextualisés ou de démarches de résolution	*1,5 x 10* ^{4} *= 15000"* Ou bien : "*Nous multiplions 42x56* *42x50=2100* *42x6 = 252* *2100+252 = 2352"*

Nous voyons dans les exemples ci-dessus qu'un même énoncé peut être considéré à la fois d'un point de vue mathématique et d'un point de vue méthodologique. Dans le premier cas, nous nous intéressons à l'aspect objet de la notion concernée ; dans le second cas, à l'aspect outil.

Pour l'analyse des bilans individuels, nous avons adopté des critères d'analyse légèrement différents des précédents, mais prenant toujours en compte le niveau de contextualisation.

Dans un second temps, nous affinons notre analyse des énoncés mathématiques et de méthodes en nous intéressant plus particulièrement aux énoncés intermédiaires entre l'énoncé formel et l'exemple seul. Pour cela, nous avons défini une nouvelle classification qui nous permet de distinguer six niveaux de formalisation : les exemples mathématiques (E1) ou de méthodes (E2) illustrant une action ou une consigne, les énoncés intermédiaires (niveau 3 à 5) et enfin les énoncés mathématiques ou de méthodes formels (E6) ainsi que les énoncés formels décrivant un outil heuristique (H6).

Nous regroupons six types d'énoncés intermédiaires allant des énoncés les plus contextualisés comme l'exemple mathématique ou de méthode induisant une règle à caractère général mais non formulée (E3 ou E3bis) aux énoncés mathématiques ou de méthodes illustrés par un exemple (E4) ou formulés à partir d'un exemple (E5) et aux énoncés évoquant un outil heuristique illustré par un exemple (H4) ou formulé à partir d'un exemple (H5)

Nous devons signaler une limite méthodologique : les informations recueillies sont essentiellement de caractère déclaratif. Les élèves, individuellement comme collectivement, sont

amenés à expliciter par écrit des notions et des méthodes ; ces déclarations ne sont pas forcément synonymes d'actions ou d'apprentissages. Un élève qui explicite une méthode de résolution de problèmes ne l'utilise pas forcément et inversement un élève peut l'utiliser sans l'expliciter.
De plus, le caractère déclaratif des bilans peut être renforcé par des effets de contrat : l'élève peut, par exemple, "réciter" le discours méthodologique du maître sans pour autant l'utiliser dans la réalité.
Nous considérons toutefois que ces productions nous donnent des informations, parfois incomplètes, mais toujours révélatrices des apprentissages effectués. Notons que les textes obtenus occultent parfois certaines activités, en particulier celles devenues habituelles, au profit d'activités nouvelles.

<table>
<tr><th colspan="2">Type d'énoncé</th><th>Exemple d'énoncé</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Groupe n°1

Exemples de méthodes et d'exemples mathématiques illustrant une action ou une consigne (niveaux 1 à 2)</td><td>E1
Exemple illustrant une action ou une consigne (plutôt du type méthode)</td><td>" Cette semaine, nous avons joué au compte est bon. On nous donnait quatre nombres. Il fallait essayer de s'approcher le plus possible du nombre donné (ou de l'atteindre) en faisant des additions, des multiplications, des divisions ou des soustractions . Tous les nombres devaient être utilisés une et une seule fois.
Ex : trouver un nombre (132) avec 6-16-4-32
6x16=96
96+32=128
128+4=132. "</td></tr>
<tr><td>E2
Exemple mathématique seul, illustrant une action ou une consigne</td><td>" Cette dernière semaine, nous avons donné la valeur exacte du quotient sous forme de fractions et nous l'avons encadré entre deux nombres entiers naturels puis nous avons précisé en l'encadrant entre deux nombres décimaux allant jusqu'au centième, millième, 1/10n
ex : 2857,00 8
45 xxxxx
57 357,12
10
20
4

357<357,12<2857/8<357,13<358 ".</td></tr>
<tr><td>E3
Enoncé mathématique ou de méthodes encore fortement contextualisés comme l'exemple mathématique ou de méthode induisant une règle à caractère général mais non formulée</td><td>"Pour trouver le nombre de chiffres au quotient de la division de 8657 par 39 :
je multiplie 39 par 10 : 39x10=390, comme c'est trop petit,
je multiplie 39 par 100 : 39x100=3900, comme 3900 est inférieur à 8657
mais que 39x1000=39000 est supérieur à 8657
donc il y a 3 chiffres au quotient car il est encadré par 100 et par 1000".
Ou bien : "Nous multiplions 42x56
42x50=2100
42x6 = 252
2100+252 = 2352
On a décomposé la multiplication par une addition avec un nombre exact de dizaines".</td></tr>
</table>

Groupe n°2 Enoncés intermédiaires entre l'exemple seul et l'énoncé formel (niveaux 3 à 5)	E3bis Enoncé intermédiaire entre l'exemple de méthode très contextualisé et la méthode formulée à partir d'un exemple	" Cette quinzaine, nous avons cherché 3,4 ou 5 nombres qui se suivent (consécutifs) afin que leur somme arrive à un nombre déterminé. Il suffit de faire la solution avec les N (inconnu) : N+(N+1)+(N+2)=249 3N+3=249 249-3=246 246:3=82 N=82 N+1=83 N+2=84 "
	E4 Règle mathématique ou méthode illustrée par un exemple	" Cette quinzaine, nous avons fait des multiplications par 25. Il fallait multiplier par 100 et diviser par 4. Ex: 22x25= ? On fait : 22x100=2200 2200/4=550. "
	E5 Règle mathématique ou méthode formulée à partir d'un exemple	" Dans notre tête, mentalement, nous nous sommes dit que l'exposant indiquait de combien de rangs vers la droite, on déplaçait la virgule ". " Là comme le multiplicateur était 104, on l'a déplacée de 4 rangs vers la droite et on a complété par deux zéros car il manque deux nombres à la partie décimale. Exemple 1,50 x 104 = 15000. "
	H4 outil heuristique illustré par un exemple	" Avant de trouver le résultat, il faut trouver un ordre de grandeur pour avoir une idée du résultat ex : 12,2 que l'on arrondit à 10 "
	H5 outil heuristique formulé à partir d'un exemple	" Pour résoudre un problème, il faut trouver le ou les nombres que l'on a besoin. Par ex : un marchand vend un chou à 10F pièce, un kg de carottes à 12F. Combien coûtent 5 choux ? Le nombre le plus important est celui du chou car il ne faut que le prix du chou pour répondre. "
Groupe n°3 Enoncés Mathématiques ou de méthodes formels	E6 Enoncé mathématique ou de méthode formel	" multiplier un nombre par des puissances de 10 : on met autant de zéros à droite du nombre que l'indique l'exposant. "
	H6 Outil heuristique énoncé formellement	" Il faut se donner un ordre de grandeur et ensuite calculer. Si on se donne un ordre de grandeur, c'est pour ne pas tomber complètement à côté du résultat. " " Le calcul en croix sert à trouver le nombre qui nous manque dans le tableau de proportionnalité. " Ou bien : " on peut faire un dessin pour s'aider "

Résultats et interprétation

1. Le statut des énoncés intermédiaires et le processus de conceptualisation

Tout d'abord, notre ingénierie favorise une prise de distance par rapport au contexte de l'apprentissage. Elle amène les élèves à dépasser le stade de l'action pour produire des énoncés mathématiques et de méthodes davantage décontextualisés. Cette décontextualisation s'accompagne d'une part plus importante prise par le débat collectif, particulièrement en CM2 et en cinquième. Nous soulignons aussi la présence, dans les textes collectifs comme dans les bilans individuels des classes entraînées, d'énoncés intermédiaires entre l'énoncé formel et l'exemple seul. Nous allons préciser ce résultat et étudier le rôle qu'un tel type d'énoncé peut jouer dans le processus de conceptualisation des notions mathématiques.

a. Emergence d'énoncés intermédiaires dans les classes entraînées

En CM2 et en cinquième, les élèves participant davantage au débat comme à l'activité de production d'écrit en général, produisent plus d'énoncés intermédiaires que ceux de sixième.
Tout se passe comme si le fait de " jouer le jeu " du débat et de la production collective amène les élèves à expliciter davantage leurs formulations, pour convaincre les autres et pour affiner leur propre pensée, voire se convaincre eux-mêmes, et donc à produire des énoncés au statut intermédiaire.

Dans les bilans individuels, la proportion d'élèves produisant des énoncés intermédiaires ou formels (niveau 3 à 6) est nettement plus importante dans les classes entraînées. L'écart entre classes entraînées et classes témoins varie de 80% (sixièmes du collège de Maisons-Alfort) à 20% pour les cinquièmes du collège de Vanves. Cet écart porte sur la présence d'énoncés intermédiaires pour les trois niveaux de classes, mais aussi sur la présence d'énoncés formels pour les classes de CM2 et sixième.
Notre ingénierie permet à davantage d'élèves de produire des énoncés mathématiques ou de méthodes témoignant d'un niveau intermédiaire de conceptualisation plutôt que des descriptions d'activités.
Nous constatons un double effet de notre ingénierie : d'une part une production plus précoce d'énoncés formels en CM2 et partiellement en sixième, d'autre part l'apparition, dès le CM2, d'énoncés intermédiaires. Ces énoncés intermédiaires sont soit des exemples génériques (énoncés comprenant une règle formalisée et un exemple), soit des exemples induisant une règle générale plus ou moins explicitée.

Notons de plus une évolution plus marquée vers plus d'énoncés s'appuyant sur un exemple générique en cinquième entraînée.

b. Le processus de conceptualisation : des étapes et des cheminements différents

Il n'y a pas de correspondance automatique entre production d'énoncé formel et compréhension

L'élève qui produit un exemple générique associé à un énoncé général dans un souci de communication, n'a pas automatiquement une compréhension plus faible du concept que celui qui produit l'énoncé formel seul. Nous pouvons être en présence d'un effet de contrat : en fonction du contexte, l'élève doit comprendre les normes à respecter : produire un énoncé formel correspondant à un savoir socialement reconnu, produire un énoncé prenant en compte l'éventuel degré de compréhension de l'interlocuteur ou bien encore produire un énoncé qui témoigne de son cheminement personnel. Le statut de l'interlocuteur est important. S'il s'agit du professeur, l'élève jugera peu utile et sans doute peu conforme d'illustrer la règle par un exemple. Par contre, s'il s'agit d'expliquer à un pair ou de s'expliquer à lui-même, il aura plus facilement recours à l'exemple.

De plus, un énoncé formel ne témoigne pas forcément d'une bonne acquisition du concept ni même de la maîtrise de la formulation utilisée ; il peut être, dans la pratique, une simple reproduction, plus ou moins fidèle, du cours du professeur. De nombreux élèves de cinquième des classes témoins produisent ainsi des énoncés qui laissent penser que la notion n'est pas complètement maîtrisée, exemple : " $a \pm (b \pm c) = a \pm b \pm c$ " ou " $a - (b - c) = a + b + c$; $a - (b + c) = a + b - c$ ".

Un exemple de cheminements différents : le cas des deux sixièmes entraînées

L'étude comparée des qualités respectives des textes individuels et collectifs des deux sixièmes entraînées met en évidence des différences concernant les apprentissages effectués dans ces deux classes considérées toutes les deux comme faibles.

Nous observons des effets pratiquement inversés sur les productions des deux sixièmes.

En effet, les textes collectifs de la sixième de Maisons-Alfort semblent privilégier les énoncés formels, alors que les textes individuels des même élèves laissent une part importante aux énoncés s'appuyant sur des exemples ayant un caractère générique plus ou moins prononcé.

Par contre, dans la sixième de Vanves, les textes collectifs accordent une place équivalente aux exemples génériques et aux énoncés formels, alors que les textes individuels laissent une place plus importante aux énoncés formels.

Nous pouvons donner plusieurs éléments d'explication à ce résultat faisant intervenir les contenus mathématiques évoqués, les pratiques des enseignants et l'importance prise par le débat et la communication entre élèves.

Les pratiques des enseignants des deux sixièmes ne sont pas identiques ; le professeur de Vanves accorde une place plus importante à un enseignement "méta". De plus, le débat collectif est plus difficile à mettre en œuvre à Maisons-Alfort qu'à Vanves ; cela a évidemment un effet sur les productions collectives des élèves. Contrairement à leurs camarades de Maisons-Alfort, dans un souci de communication, les élèves de Vanves proposent des exemples génériques dans leurs textes collectifs. Ce souci est moins fort dans les textes individuels.

Nous constatons donc un décalage dans le temps entre les deux sixièmes. A Maisons-Alfort, un texte apparemment conforme aux attentes habituelles de l'enseignant peut s'imposer, surtout s'il bénéficie d'un accord tacite des bons élèves qui reconnaissent " une bonne formulation ". Quand le débat est faible, le contrat valide les énoncés formels ; d'autant plus qu'un énoncé mathématiquement incontestable ne peut être refusé par l'enseignant même si ce dernier doute de son appropriation par tous. Seul le jeu de la communication peut à moyen terme changer les règles du contrat. L'apparition progressive puis massive d'exemples à caractère générique témoigne d'un nouveau contrat qui devrait s'accompagner d'une meilleure appropriation des notions par un plus grand nombre d'élèves.
Le faible taux d'exemples à caractère générique produits par les élèves des classes témoins nous conforte dans cette analyse.

Les élèves de la sixième, particulièrement faible, de Maisons-Alfort semblent profiter plus tardivement des conditions particulières à notre ingénierie. En effet, dans leurs productions collectives, les énoncés intermédiaires ne sont produits qu'en fin d'année, période qui est aussi à celle de l'écriture des bilans individuels. Par contre, les élèves de Vanves produisent ce type d'énoncés plus tôt dans l'année, à l'occasion des productions collectives.

c. Le statut de l'énoncé intermédiaire dans le processus de conceptualisation

L'énoncé intermédiaire peut représenter un niveau intermédiaire entre le cas particulier et la règle générale, entre l'expérience et le décontextualisé, entre la situation d'apprentissage et le concept.
Nous évoquons ici des thèmes centraux dans les théories de l'apprentissage développées par Vygotski.
Nous pouvons nous référer au processus de formation des concepts, qu'il décrit comme passage d'une structure de généralisation à une autre, pour éclairer certaines étapes du processus de conceptualisation de notions mathématiques.
En effet, nous pouvons interpréter les énoncés intermédiaires comme révélateurs d'une première généralisation de l'expérience personnelle et collective des élèves ; celle-ci se traduit, entre autres, par le passage d'un exemple seul ou d'une description d'action à un énoncé intermédiaire faisant intervenir un exemple à caractère générique. Les élèves accompagnent l'énoncé formel (ou reconstruisent cet énoncé à l'aide) d'un exemple qui ne coïncide pas forcément avec une expérience vécue. Cet exemple peut être retrouvé, mais l'analyse précise des textes nous amène à penser qu'il est plutôt reconstruit, voire inventé, par l'élève sur le moment, dans un double souci de communication et d'explicitation de sa pensée.
Bien sûr, ces exemples font écho à ceux traités en cours mais s'en différencient sur plusieurs points : contexte légèrement différent ou valeurs numériques inventées pour l'occasion...

Nous pouvons établir un parallèle entre énoncé formel et énoncé intermédiaire d'une part et ce que Vygotski définit à propos des concepts et des pseudo-concepts.
Le pseudo-concept est décrit comme un équivalent fonctionnel du concept, en apparence semblable au concept, mais qui en diffère quant au mode de généralisation et de catégorisation

dont il résulte. Ces deux niveaux de conceptualisation, bien que différents, permettent toutefois aux individus de communiquer et de se comprendre (au moins partiellement).
D'une façon un peu analogue, l'énoncé intermédiaire permet aux élèves de se comprendre, de se mettre d'accord sur une formulation ; mais il peut toutefois renvoyer individuellement à des niveaux de formalisation et de conceptualisation différents.

L'énoncé intermédiaire révèle donc un " compromis " dans la formulation mais aussi un processus de conceptualisation s'appuyant sur une dialectique entre collectif et individuel.
Devant produire un écrit pour le groupe classe, les élèves construisent des énoncés intermédiaires. L'analyse des bilans individuels des classes entraînées montre que ce type d'énoncé perdure dans les bilans individuels aux côtés d'énoncés plus formels (les exemples seuls se raréfient).
Il semble donc que l'énoncé intermédiaire, dans un premier temps résultat d'une démarche collective, témoigne ensuite d'un apprentissage individuel par un double mouvement de contextualisation et de décontextualisation. Tout se passe comme si l'appropriation des énoncés intermédiaires produits collectivement permettait aux élèves d'une part, de recontextualiser certains énoncés formels afin de leur donner du sens ; d'autre part, de généraliser leurs exemples individuels afin de les dépersonnaliser tout en autorisant des appels éventuels à l'expérience.
Nous sommes ici en présence d'une appropriation collective qui précède et induit une appropriation individuelle. Cela renvoie dans une certaine mesure aux théories développées par Vygotski mettant en valeur le caractère d'abord social et collectif de l'apprentissage.

2. Des références plus nombreuses aux pratiques de calcul mental ; vers la construction d'outils heuristiques

Signalons tout d'abord que notre ingénierie débouche sur une production plus importante, plus riche et plus décontextualisée d'énoncés de méthodes.

Dans les classes non entraînées, l'apport du calcul mental est peu explicité par les élèves et essentiellement calculatoire. Il est tout autre dans les classes où notre ingénierie a été mise en oeuvre.
L'analyse des déclarations des élèves des différents niveaux scolaires fait apparaître une graduation dans les apports du calcul mental à la résolution de problèmes.
Tout d'abord, en CM2, une pratique régulière de calcul mental débouche sur une plus grande aisance et une plus grande rapidité de traitement des opérations lors de la résolution de problèmes numériques.
En sixième, l'apport est plus riche : les techniques étant plus sûres, les élèves utilisent le calcul mental d'une part pour prévoir et contrôler leurs résultats (" *Pour moi, c'est important de trouver l'ordre de grandeur des opérations car après on peut comparer à son résultat et il faut trouver un résultat très proche de l'ordre de grandeur")*, d'autre part pour faciliter leur recherche, par exemple, en simplifiant les données numériques du problème.
Cet apport est encore plus riche en cinquième où nous décelons un changement de statut des nombres dans un énoncé de problème : l'élève peut remplacer les données numériques soit par des nombres plus simples (arrondis ou plus petits) soit par des lettres pour trouver plus facilement le raisonnement à effectuer (" *si dans des problèmes on a des chiffres difficiles, on*

peut les remplacer par des lettres ou par des nombres plus simples " ou bien " *quand il y a des nombres compliqués, on les simplifie ; après les avoir simplifiés, on cherche une méthode et lorsque l'on trouve on l'applique aux nombres compliqués* "*).* Les données numériques ne sont plus "figées" mais peuvent varier ; l'accès au modèle est alors plus aisé. Le calcul mental devient donc un outil de recherche lors de la résolution de problèmes.

Dans un premier temps, notre ingénierie permet donc une explicitation de la part des élèves des apports du calcul mental à la résolution de problèmes ; puis, en les amenant à dépasser les habiletés calculatoires, elle débouche sur de nouveaux apports. Grâce à une prise de distance par rapport aux données numériques et à une exploration plus aisée des relations entre ces données, la recherche du modèle se trouve facilitée. Nous pouvons dire que ce nouvel apport relève de l'heuristique dans la mesure où il aide l'élève à acquérir des stratégies de résolution de problèmes numériques.

<u>Le calcul mental, un champ d'expérience pour la résolution de problèmes numériques</u>

Le calcul mental contribue à accroître les habiletés calculatoires des élèves. Cela peut se traduire, lors de la résolution de problèmes numériques, par une meilleure maîtrise des calculs. Cela renforce aussi l'assurance et l'aisance des élèves engagés dans des calculs lors d'une résolution de problèmes. Ce dernier aspect est souligné dans les bilans individuels des élèves de la classe de CM2 entraînée. Nous retrouvons cet apport à l'état de traces dans les déclarations des élèves des classes témoins de sixième et de cinquième.

Nous allons essayer d'expliquer, en nous appuyant sur un exemple, comment le calcul mental permet d'accroître les capacités d'initiative des élèves lors de la résolution d'un problème numérique.

Le problème " des briques "[2] ci-dessous a été proposé dans la classe de sixième entraînée de Vanves, les stratégies des élèves ont pu être observées à cette occasion.

"*On empile des briques de 0,1 mètre de hauteur pour construire un mur de 2 mètres de haut. Combien de briques empile-t-on les unes sur les autres ?*"

Ce problème est en général très mal réussi quand il est posé dans un devoir écrit. La reconnaissance de l'opération à effectuer ainsi que l'obtention du résultat de l'opération sont deux obstacles importants.

Nos observations semblent montrer qu'une pratique régulière de calcul mental autorise l'élève à rechercher des procédures de résolution non standards, à faire des essais, à accepter de faire des erreurs (par exemple : " *compter combien de fois on doit ajouter 0,1 pour obtenir 2* " ou bien " *calculer en plusieurs étapes, soit le nombre de briques dans une hauteur de 1 mètre, puis de 2 mètres : "0,1 x 10 = 1 donc 20 briques", soit la hauteur de 2 briques et donc le nombre de*

---

[2] Cet exemple est développé dans une contribution à la brochure de la commission inter-Irem premier cycle intitulée *des mathématiques en sixième* : " le rôle du calcul mental dans la connaissance des nombres, des opérations et dans la résolution de problèmes ", Butlen D. Monfront A.M. Pézard M.

briques ; "0,1 x 2 = 0,2 donc 20 briques" , ou encore " *des essais de multiplication de 0,1 par divers nombres pour trouver lequel donnera 2* ").

Une pratique régulière de calcul mental permet aussi de jouer sur la taille des nombres en simplifiant les données numériques ou en les remplaçant par des lettres. Nous avons par exemple relevé les procédures suivantes : " *traduction par une expression littérale très contextualisée, les lettres évoquant les grandeurs : B x N ? = N* " ou bien " *expression du modèle par une phrase : la hauteur d'une brique multipliée par le nombre de briques est égale à la hauteur totale* " ou enfin " *transformation des nombres donnés par des nombres plus "simples" : je remplace par exemple 0,1 par 5 et 2 par 50, alors je sais le faire* ".

La pratique du calcul mental est propice à ce détour éliminant, dans un premier temps, les nombres "difficiles". En effet, pour oser négliger en début de recherche les nombres jugés compliqués, il faut que l'élève ne fasse pas du traitement de l'opération une priorité. De même, il faut que la peur d'avoir à la réaliser avec de tels nombres ne l'envahisse pas trop. Une pratique régulière de calcul mental peut donner cette disponibilité nécessaire à l'appropriation du problème.

Une pratique régulière de calcul mental permet donc à l'élève de ne pas recourir immédiatement aux algorithmes écrits, parfois coûteux, mais au contraire d'explorer rapidement différentes voies de résolution du problème. L'élève peut ainsi davantage adapter ses stratégies aux données du problème. Certaines déclarations extraites des bilans individuels le confirment comme par exemple : "*quand je fais du calcul mental, j'utilise beaucoup de façons pour trouver le résultat. Ma façon dépend beaucoup des nombres ou de la question du problème.*"

Le changement de statut des données d'un problème numérique - elles ne sont plus "figées" mais peuvent varier - contribue sans doute à l'initialisation de la notion de variable. En tout cas, cela semble important pour la construction de la représentation de certains problèmes.

L'analyse des bilans individuels des élèves des classes témoins montre qu'un enseignement méthodologique "classique"[3] ne suffit pas seul, du moins à ce niveau de scolarité, à créer un lien entre les apprentissages effectués en calcul mental et ceux relatifs à la résolution de problèmes. Les élèves évoquent des étapes de résolution indépendantes des contenus : lecture "intelligente" de l'énoncé, tri des données, recherche de l'opération, calcul, vérification en recalculant, rédaction d'une phrase réponse... Ils explicitent d'autre part certaines règles de conduite du "métier de bon élève" : bien présenter ses calculs, bien rédiger, réfléchir...

Ces attitudes et compétences sont sans doute importantes pour les apprentissages mais on peut légitimement s'interroger sur leur efficacité quand elles ne s'accompagnent pas d'outils mathématiques mobilisables lors de la résolution effective de problèmes.

Les effets de notre dispositif se situent davantage au niveau de l'activité mathématique de l'élève. Les résultats de notre seconde expérience confirment et précisent l'apport du calcul mental à la résolution de problèmes numériques. Notre ingénierie semble permettre aux élèves de dépasser les effets d'un enseignement méthodologique "classique" et leur apporter des outils de recherche

---

[3] Nous entendons par enseignement méthodologique " classique ", un apprentissage des grandes étapes de résolution d'un problème, assez indépendant des contenus mathématiques ou bien l'explicitation de certaines " attitudes de bon élève ".

qui relèvent de l'heuristique. En effet, l'élève devient davantage capable d'explorer les relations entre les données d'un problème soit en utilisant des techniques proches de l'algèbre (remplacer des nombres par des lettres et écrire les relations en jeu), soit en jouant sur la taille et la nature des nombres (remplacer par des nombres plus simples, passer de D à N...).

3. Une démarche intéressante pour certains élèves en difficulté, un chemin original vers le formalisme

Rappelons que notre expérimentation s'est déroulée dans des classes plutôt faibles. La classe de cinquième entraînée était la plus faible du collège de Vanves. Les classes témoins sont jugées par leurs professeurs d'un niveau supérieur. Si, comme nous l'avons souligné précédemment, notre ingénierie permet à davantage d'élèves de produire des énoncés mathématiques ou de méthodes (intermédiaires ou formels), nous pouvons penser que des élèves plutôt faibles sont concernés.
Nous allons essayer d'affiner le profil des élèves ayant recours à des énoncés intermédiaires.

Les énoncés intermédiaires sont produits essentiellement par les “ bons élèves ” et par les élèves plutôt faibles en CM2 et cinquième. En sixième, ce sont surtout les “ bons ” élèves qui produisent les énoncés intermédiaires. A ce niveau scolaire, le faible débat, le rapport à l'écrit et les effets de contrat peuvent expliquer ce résultat. Ce sont les élèves les plus performants qui s'autorisent à produire plus d'énoncés mathématiques ou de méthodes en ayant recours partiellement au formalisme.
En cinquième, les élèves en trop grande difficulté n'ont pas assez d'une année pour dépasser les descriptions de contextes ou d'activités ; toutefois deux tiers d'entre eux produisent quelques énoncés formels.

Il semble donc que notre ingénierie crée des conditions permettant à des élèves faibles, sur une durée de deux ans, de produire des énoncés intermédiaires. Cette production s'accompagne, d'après les évaluations du professeur, de réels progrès en mathématiques. Il est évidemment difficile de dire qui des deux précède l'autre.
Ce sont surtout des élèves en difficulté moyenne qui bénéficient des conditions créées par notre expérimentation.

L'ensemble de notre dispositif d'enseignement permet à ces élèves en difficulté moyenne de produire des énoncés mathématiques plus décontextualisés mais ancrés dans leur expérience personnelle. Cette production n'aurait pas été possible pour ces élèves sans l'aide de leurs pairs et sans l'explicitation de méthodes par le professeur. La mémoire collective de la classe ainsi construite semble constituer pour chacun un ensemble d'expériences, de connaissances et de savoirs en partie décontextualisés, vécus en commun avec les autres élèves et avec le maître, partiellement codifiés dans leur mémoire personnelle ; cela leur permet d'élargir leurs possibilités de formulation mais aussi de s'approprier, au moins partiellement, certaines notions et méthodes mathématiques.

Il semble que les outils heuristiques construits lors de notre expérimentation pourraient aider les élèves de collège à s'approprier une démarche algébrique. En effet, explorer les relations entre les données d'un problème, remplacer les nombres par des lettres... sont des techniques qui seront, par la suite, utilisées en algèbre, en particulier quand il s'agit de " mettre en équation " un problème. Il semble que notre ingénierie serait efficace à un moment bien particulier du cursus et sans doute pour des élèves présentant des difficultés moyennes. En effet, elle doit précéder un enseignement d'algèbre, permettre de donner du sens à celui-ci en s'appuyant sur des exemples de transformations de procédures arithmétiques en procédures " pré-algébriques ". Mais elle ne doit pas intervenir trop tard car une démarche algébrique institutionnalisée en écraserait les effets. D'autre part, ce passage risque de s'avérer inutile pour des élèves capables de s'approprier rapidement une démarche algébrique.

De même que les énoncés intermédiaires permettent à certains élèves, notamment en difficulté, de dépasser le contexte de l'apprentissage tout en donnant du sens aux énoncés formels, les outils heuristiques décrits précédemment peuvent être interprétés comme une étape dans l'appropriation des méthodes explicitées par le professeur. Celles-ci, grâce aux expériences accumulées en calcul mental et à une prise de distance due aux écrits collectifs, se concrétisent tout en gardant un degré de généralisation suffisamment large pour être réutilisables dans des contextes voisins. Ainsi, par exemple, la phrase " *chercher l'opération* " afin de répondre à la question posée, se transforme en " *remplacer les nombres par des nombres plus simples pour trouver l'opération* ". La première reste souvent un " geste " vide de sens pour des élèves en difficulté[4], elle s'avère tout aussi inutile pour des élèves ayant déjà construit un schéma automatique de reconnaissance... Nous retrouvons un résultat analogue à celui évoqué plus haut : des démarches trop formelles ou trop générales pour des élèves plutôt faibles peuvent s'ancrer dans des expériences individuelles tout en gardant un certain degré de généralisation. Ces démarches ne seraient pas possibles pour ces élèves sans l'aide de leurs pairs et sans l'explicitation de méthodes par le professeur. La mémoire collective de la classe ainsi construite semble constituer pour chaque élève un ensemble d'expériences, de règles d'action partiellement décontextualisées, qui lui donnent de nouvelles possibilités de formulation et d'action. La réflexion collective permet ainsi une appropriation individuelle des méthodes explicitées par l'enseignant ou par les élèves.

Ces étapes intermédiaires dans la conceptualisation de notions mathématiques, comme dans la construction d'outils heuristiques ou dans l'acquisition et la mise en œuvre de démarches " pré-algébriques ", peuvent constituer des étapes originales, nécessaires pour certains élèves en difficulté. Ce cheminement n'est possible que si certaines contraintes institutionnelles et cognitives sont dépassées. En particulier, cette construction demande du temps ; notre recherche montre que les résultats ne deviennent vraiment significatifs que dans la classe de cinquième, soit donc au bout de deux années de pratique régulière de calcul mental et de production collective d'écrits mathématiques.

[4] M.J. Perrin a relevé ce phénomène ; en particulier, le manque de capitalisation et le manque de méthodes sont des caractéristiques fréquentes des élèves en difficulté.

Bibliographie

[1] ALLARDICE B.S., GINSBURG H.P. (1983) Children's psychological difficulties in mathematics In H.P. Ginsburg (Ed), *the development of mathematical thinking*, New-York Academic Press.

[2] BAUTIER E. (1995) *Pratiques langagières, pratiques sociales. De la sociolinguistique à la sociologie du langage*, Paris, l'Harmattan

[3] BAUTIER E. (1996) Les élèves et le rapport au savoir, In COPIRELEM*documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques, Actes du stage d'Angers de la COPIRELEM*, IREM Paris VII

[4] BAUTIER E., ROBERT A. (1988) Réflexions sur le rôle des représentations métacognitives dans l'apprentissage des mathématiques, *Revue Française de Pédagogie* n°84, pp 13-19, INRP Paris

[5] BOERO P. (1989) Mathematical literacy for all experiences and problems Proceedings, In PME XIII

[6] BRIAND J. (1993) *l'énumération dans le mesurage des collections. Un dysfonctionnement dans la transposition didactique*, Doctorat de Didactique des mathématiques, Bordeaux, Université de Bordeaux 1

[7] BRISSIAUD R. (1989) *Comment les enfants apprennent à calculer.*, Paris, Ed. RETZ.

[8] BUTLEN D. et PEZARD M. (1992) Une expérience d'enseignement des mathématiques à des élèves de CE2 en difficulté, *cahier de DIDIREM* n°13, IREM de Paris VII, Université de Paris VII.

[9] BUTLEN D. et PEZARD M. (1992) Elèves en difficulté, situations d'aide et gestion de classe associée , *Grand N* n°50 , pp.29-58 , IREM de Grenoble, Université de Grenoble 1.

[10] BUTLEN D. et PEZARD M. (1992) Calcul mental et résolutions de problèmes multiplicatifs, une expérimentation du CP au CM2 *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol 12-2-3, La pensée sauvage, pp. 319-368

[11] BUTLEN D. et PEZARD M. (1996) Rapports entre habileté calculatoire et prise de sens dans la résolution de problèmes numériques, étude d'un exemple : impact d'une pratique régulière de calcul mental sur les procédures et performances des élèves de l'école élémentaire, *cahier de DIDIREM* n°27, IREM de Paris VII, Université de Paris VII.

[12] BUTLEN D. et PEZARD M. (1999) Rôle de l'écrit collectif dans la conceptualisation de notions mathématiques et dans l'acquisition de méthodes de résolution de problèmes, article à paraître.

[13] BROUSSEAU G. et CENTENO J.(1992), Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant, *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol 11/2.3, La pensée sauvage

[14] CHARLOT B., BAUTIER E. et ROCHEX J.Y. (1992) *Ecole et savoir dans les banlieues... et ailleurs*, Paris, Armand Colin

[15] CHEVALLARD Y. (1984-1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre, 1ère, 2ème partie, *Petit X* n°5, 19, IREM de Grenoble, Université Joseph Fourier.

[16] CHEVALLARD Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre, 3ème partie *Petit X* n° 23, IREM de Grenoble, Université Joseph Fourier.

[17] CONNE F. Calculs numériques et calculs relationnels dans la résolution de problème d'arithmétique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol 5-3

[18] CONNE F. (1993) Savoirs et connaissances *Recherche en Didactique des Mathématiques* , Vol. 13, La pensée sauvage, Grenoble

[19] DENIS M. (1982) Représentation imagée et résolution de problèmes. *Revue Française de Pédagogie* , n° 60.

[20] FAYOL M. (1990) *L'enfant et le nombre.*, Neuchâtel, Delachaud / Niestle

[21] FAYOL M. HABDI H. et GOMBERT J.E. (1987) Arithmetic Problems Formulation and Working Memorie Load Laboratoire de Psychologie Université de Bourgogne - Dijon.

[22] FAYOL M. (1985) Nombre, numération et dénombrement. Que sait-on de leur acquisition ? *Revue Française de Pédagogie* n° 70.

[23] FAYOL M. et MAURY S. (1986) Combinatoire et résolution de problèmes aux cours moyens 1 et 2 . *Recherches en Didactique des Mathématiques.*, Volume 7-1, Editions la Pensée Sauvage, pp. 63-104

[24] FISCHER J.P. (1981) Développement et fonctions du comptage chez l'enfant de trois à six ans *Recherches en Didactique des Mathématiques.*, Vol 2-3, Editions la Pensée Sauvage

[25] FISCHER J.P. (1988) Complexité de compréhension et d'exécution des opérations arithmétiques élémentaires *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Vol 9-2. Editions la Pensée Sauvage, pp. 133-154

[26] FISCHER J.P. (1987) L'automatisation des calculs élémentaires à l'école. *Revue Française de Pédagogie* n°80

[27] JULO . (1995) *Représentations des problèmes et réussite en mathématiques*, Rennes, Presses Universitaires de Rennes

[28] LABORDE C. (1982) *Langue naturelle et écriture symbolique*, Thèse de Doctorat d'Etat, Grenoble, Université de Grenoble

[29] LAHIRE B. (1993) *Culture écrite et inégalités scolaires,* Lyon, Presses Universitaires de Lyon

[30] LEGRAND M. (1991) Circuit ou les règles du débat mathématique, In Commission Inter-IREM Université, *Enseigner les mathématiques autrement en DEUG A, première année*, Lyon, IREM de Lyon.

[31] LEGRAND M. (1990) Un exemple de discours sur les mathématiques et leur apprentissage, In Commission Inter-IREM Université, *Enseigner les mathématiques autrement en DEUG A, première année*, Lyon, IREM de Lyon.

[32] LEONTIEV A.N. (1959) Principles of mental development and the problem of intellectual backwardness. In B.J. Simon (Ed), *Educational Psychology in the USSR*. London : Routledge Kegan.

[33] PERRIN-GLORIAN M.J. (1992) *Aires et surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6ème* Thèse de Doctorat d'État, Paris, Université de Paris VII

[34] RESNICK L.B. (1983) A developmental theory of nomber understanding. In H.P. Ginsburg (Ed), *The development of mathematical thinking*. New-York Academic Press.

[35] RICHARD J.F. (1982) Mémoire et résolution de problèmes, *Revue Française de Pédagogie* n° 60.

[36] ROBERT A., TENAUD I. (1989) Une expérience d'enseignement de la géométrie en terminale C, *Recherches en Didactique des Mathématiques* n° 9.1, La Pensée Sauvage, pp 31-70,

[37] ROBERT A. et ROBINET J. (1992) Représentations des enseignants et des élèves *Repères-IREM* n°7; Editions Tropiques, pp.93-99

[38] ROBERT A. et ROBINET J. (1996) Prise en compte du méta en didactique des mathématiques, *Recherche en Didactique des Mathématiques, Vol 16.2*

[39] ROCHEX J. Y. (1997) L'oeuvre de Vygotski : fondements pour une psychologie historico-culturelle, Note de synthèse, *Revue Française de Pédagogie* n°120, pp 105-147

[40] ROGALSKI. J. (1984) A propos de l'acquisition de la bidimensionnalité chez les élèves d'âge pré-scolaire et scolaire. et Enseignement et acquisition de la bidimensionnalité. *Cahiers de didactique des mathématiques* n° 12 et 13, Paris, IREM de Paris VII.

[41] ROUCHIER A. (1991) *Etude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaire : proportionnalité, structures itéro-récursives, institutionnalisation.* thèse de Doctorat d'état, Orléans, université d'Orléans

[42] SARRAZY B. (1997) Sens et situations : une mise en question de l'enseignement des stratégies métacognitives en mathématiques , *Recherches en didactique des mathématiques* vol. 17/2,La Pensée Sauvage-Editions, pp 135-166,

[43] SENSEVY G. (1994) *Institutions didactiques, Régulation, Autonomie. Une étude des Fractions au Cours Moyen* Thèse de Doctorat, Marseille, Université de Provence

[44] TENAUD I. (1991) *Une expérience d'enseignement de la géométrie en terminale C : enseignement de méthodes et travail en petits groupes*, Thèse de Doctorat, Paris, Université de Paris VII

[45] VERGNAUD G. (1981) *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Editions Peter Lang.

[46] VERGNAUD G. (1989) Questions de représentation et de formulation dans la résolution de problèmes mathématiques, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, IREM de Strasbourg, Vol 2

[47] VYGOTSKI L. S. (1985) *Pensée et langage*, Paris, Editions sociales.

Annexe 1

Cette annexe présente des exemples d'activités de calcul mental proposées dans chaque niveau de classe

Annexe 1.a : exemples d'activités de calcul mental, niveau CM2

1. Compter Décompter
compter de 9 en 9 à partir de 7
compter de 13 en 13 à partir de 4
décompter de 8 en 8 à partir de 123
décompter de 14 en 14 à partir de 246
...

2. Règle des "zéros"
178 x 10 17 x 1000 5000 x 10 30000 : 10 400000 : 1000
...

3. Additions et soustractions mentales
39 + 45 60 - 26 119 + 36 83 - 49...

4. Multiplications et divisions mentales
32 x 5 32 x 25 28 x 9 34 x 11 ...
158 : 2 305 : 5 549 : 9 568 : 8 ...

5. Problèmes à résoudre mentalement
La distance entre chaque arrêt d'un autobus est d'environ 1500 mètres ; au premier arrêt 10 personnes montent, au second arrêt 3 personnes descendent, au troisième arrêt 5 personnes montent ; Y-a-t-il plus ou moins de personnes dans l'autobus quand il repart après ce troisième arrêt ? Combien en plus ou en moins ?

Un quadrillage rectangulaire comporte 168 carreaux en tout, il y a 4 carreaux sur la largeur, combien y-a-t-il de carreaux sur la longueur ?

Un restaurant propose un menu du jour à 70 F. Il y a 4 choix possibles pour l'entrée, trois choix possibles pour le plat principal et 2 choix possibles pour le dessert ; combien de menus différents peut-on constituer ?

Avec ses bottes de 7 lieues, le Petit Poucet se déplace de ville en ville ; il fait des pas de 8 km ; s'il parcourt 50 km, combien de pas va t-il faire ?

6. Le jeu de Syracuse
On part d'un nombre n ; s'il est pair on le divise par 2 ; s'il est impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1. On arrive toujours à 1...
exemple avec : n = 17, 15, 25

Annexe 1.b : exemples d'activités de calcul mental, niveau sixième

1. Compter décompter

Compter de 0,3 en 0,3 à partir de 7,2
Décompter de 0,3 en 0,3 à partir de 7,2

2. Ordre de grandeur

Donner une valeur approchée de 0,195 x 4,11 ; de 0,294 x 0,4
Le quotient de la division 9675 : 43 est-il de l'ordre de 2, 20 ou 200 ?
Ordre de grandeur de 21,7 x 39, à l'unité près.
Des deux fractions 5/7 et 7/5, laquelle est plus petite que 1 ?

3. Opérations mentales

407,8 - 100   407,8 - 10   407,8 - 0,1   407,8 - 1/100

4. Calcul rapide sur les fractions

1/9 x 3/5   2/7 x 3/4   23,5 + 4/100 ...

Donner quatre écritures différentes de 35/8 en utilisant les signes +,-,x.

5. Problèmes à résoudre mentalement

J'achète 48 bonbons à 0,80 F l'un. J'ai 24 F. Ai-je assez ? J'ai 50 F. ai-je assez ?

J'ai 18 F. dans mon porte-monnaie, combien au maximum puis-je acheter de sucettes coûtant 1,50 l'une ?

2 groupes montent dans un car. Il y a 30 personnes dans le premier groupe, le nombre de personnes du deuxième groupe est égal au 2/3 de celui du premier. Combien de personnes sont montées ?

On sait que deux élèves sur trois ont plus de 12 au contrôle. Donner 3 exemples de classes, en indiquant pour chacune le nombre total d'élèves et le nombre d'élèves ayant eu plus de 12 au contrôle.

Annexe 1.c : exemples d'activités de calcul mental, niveau cinquième

1. Ordre de grandeur d'un résultat

73 x 10,2   4731,4 + 5036 1000,3 - 218

2. Priorité des opérations, énoncé de problème

Effectue 200 + 4 x 30
Invente un problème qui se résout par ce calcul.

3. Travail sur les fractions

Ecris sous forme d'un entier le plus grand possible plus une fraction
3/2   14/3

Donne une autre écriture fractionnaire de :
4/6   7/3

Ecris en ordre croissant :
4/5   2/5   7/4   7/5

Ecris une fraction égale à :
0,25   1,2

Ecris si possible un nombre décimal égal, sinon la valeur approchée à 0,01 près de :
3/2   3/4   2/3

Effectue :
3/7 + 5/7   1 - 7/9 2 + 3/5
6 X 7/3   2/5 x 4/5   2/7 x 3/4

4. Problèmes à résoudre mentalement

Julien a eu 30 sur 40 au premier devoir et 20 sur 30 au deuxième, quel est la meilleure note ?

Huit garçons et quatre filles mangent chacun un petit pain au chocolat à 2,50F. pièce Combien les enfants ont-ils dépensé en tout ?

Un rectangle a une longueur de 6 cm et une largeur de 6 cm, un autre rectangle a une longueur de 17 cm et une largeur de 15 cm. Leurs côtés sont-ils proportionnels ?

Un pull valait 200 F. Combien vaut-il après une augmentation de 25%.

Après 20% de réduction, un livre coûte 40 F. Combien coûtait-il avant la réduction ?

Annexe 2

Grille d'analyse des textes collectifs

		1	2	3	4	
		mathéma-tique	discours de méthodes	description d'un apprentis-sage	description de finalités d'apprentis sage	Total
1	énoncé d'un théorème, d'une définition, d'une propriété, d'un algorithme de calcul					
2	règle formulée à partir d'un exemple					
3	un exemple, un contre-exemple					
4	méta 1 : énoncé de méthodes très générales non liées à un contenu mathématique					
5	méta 2 : énoncé de règles ou de méthodes faisant référence à un contenu assez général					
6	méta 3 : énoncé de règles ou de méthodes décontextualisées mais attachées à un contenu mathématique précis					
7	méta 4 : énoncé d'exemples ou de procédures ou de techniques de calcul contextualisés ou de démarches de résolution					
8	énoncé d'une activité (chronique)					
9	énoncé d'une consigne					
10	validation (preuve, démonstration, argumentation)					
	Total des énoncés (par type de point de vue)					