L'ARITHMETIQUE DANS LES EXERCICES ET PROBLEMES DU CERPE : QUELQUES ELEMENTS D'ANALYSE

COMMUNICATION
Marie–Pierre GALISSON
IUFM de Versailles

Résumé
Utilisant le cadre de l'anthropologie des savoirs (Y. Chevallard), cette communication a pour objet de préciser le rapport institutionnel à l'arithmétique pour un étudiant en première année d'I.U.F.M. Le support d'analyse comporte tous les énoncés d'exercices et de problèmes des sujets proposés au CERPE entre 1992 et 1998 et les éléments de corrigés, publiés par la COPIRELEM.
Proposant une description des savoirs et savoir-faire sollicités dans la partie dite « théorique » de l'épreuve, cette analyse présente, dans une première partie, une typologie des tâches fréquemment rencontrées et des techniques permettant de les réaliser. Cette première grille d'analyse s'avérant limitée, la seconde partie propose une catégorisation des sujets en fonction de la nature des savoir-faire attendus (maîtriser des notions abordées à l'école primaire ; établir des parallèles avec l'activité de l'élève ; modéliser, généraliser, démontrer).
En conclusion, émergent quelques éléments d'analyse :
Sur l'importance accordée au champ de l'arithmétique par rapport aux autres champs d'étude ;
Sur les invariances et les évolutions dans le choix des thèmes privilégiés par les concepteurs de sujets ;
Sur la spécificité de l'activité arithmétique en fonction des thèmes et des contextes des énoncés.

I. Introduction

Sur l'ensemble des champs que couvre la partie disciplinaire du CERPE, l'arithmétique semble se caractériser comme un thème d'étude fidèle aux Recommandations Officielles[1] : c'est un thème « relevant de notions enseignées à l'école primaire, permettant d'évaluer la rigueur d'un raisonnement logique, la capacité à utiliser diverses représentations, favorisant l'explicitation d'un modèle mathématique, son traitement et la possibilité de mettre en regard des stratégies utilisables par les élèves de l'école primaire ».

Cette première impression, ressentie à l'issue de mes premières expériences de formateur et confortée par les analyses effectuées par M.L. Peltier[2] dans sa thèse, sur la spécificité des compétences sollicitées en arithmétique, m'a conduit à m'interroger sur le rapport institutionnel qu'un étudiant en première année de formation pouvait entretenir avec ce savoir

[1] Recommandations relatives aux concours de recrutement de professeurs d'école ; note de service N 94271 du 16- 11, 1994 reprenant un extrait du B.O. n°5 (30 janvier 1992).

[2] PELTIER M.L. (1995) *La formation initiale, en mathématiques, des professeurs d'école : entre conjoncture et éternité,* Thèse de doctorat Université Paris VII.

(rapport tel qu'il peut apparaître à travers les savoirs et savoir-faire évalués dans la partie disciplinaire de l'épreuve).
C'est donc, un peu dans le prolongement de la recherche menée par M.L. Peltier dans la première partie de sa thèse, partie où elle propose une caractérisation « des mathématiques du professeur d'école », cherchant à vérifier si les évolutions qu'elle avait constatées dans le domaine de l'arithmétique se trouvaient confirmées les années suivantes, que s'est inscrit mon travail.
Pour définir « le » domaine de l'arithmétique du professeur d'école, j'ai repris l'ensemble des thèmes retenus par M.L. Peltier comme caractérisant ce domaine, c'est-à-dire Multiples, Diviseurs, PPCM et PGCD ; Division euclidienne et congruences ; Nombres premiers ; Numération et bases, y adjoignant, toutefois « Entiers, décimaux, rationnels ». Ces thèmes couvrent à peu près tout ce qui concerne le nombre ; je n'ai pas pris en compte la proportionnalité, bien qu'on ne puisse négliger l'importance de sa composante numérique (application d'un pourcentage, utilisation de la règle de trois, étude d'un tableau de nombres).
Pour étudier le rapport institutionnel d'un étudiant en position de PE à l'arithmétique, c'est-à-dire décrire l'activité mathématique du candidat « dans l'institution : partie disciplinaire du concours », j'ai utilisé la notion de praxéologie ou organisation mathématique définie par Y. Chevallard[3]. Ce concept, défini comme un quadruplet (tâche, technique, technologie, théorie), permet de décrire les savoirs et savoir-faire mis en œuvre par le candidat dans l'effectuation des tâches prescrites par les énoncés de concours. L'utilisation de cet outil d'analyse sur l'ensemble des sujets donnés au concours depuis 1992 et jusqu'en 1998 m'a permis d'obtenir une typologie (non exhaustive) des tâches relatives aux thèmes précédemment définis, d'identifier les techniques induites et de resituer ces techniques dans l'environnement technologico-théorique permettant de les éclairer et de les produire.
Toutefois, la difficulté d'exprimer en terme de tâches directement formulables dans le cadre arithmétique, un certain nombre de consignes, m'a amené à différencier la fonction des savoirs en jeu en prenant en compte le contexte des situations, la formulation des consignes, la nature des procédures de résolution attendues. C'est la raison pour laquelle il m'a paru pertinent de différencier les énoncés en tentant de déceler les «traces» des intentions affichées dans les Instructions Officielles. Ces intentions peuvent être appréhendées à travers la fonction assignée aux savoirs par les tâches. J'ai distingué trois types de fonctions attribuées au savoir arithmétique :

- Evaluer la capacité du candidat à restituer des savoirs, appliquer directement des savoir-faire (que ce soit à un niveau élémentaire ou supérieur) ; les savoirs et savoir-faire servent à réaliser des tâches que l'on peut qualifier de routinières ; les consignes sont transparentes et le contexte est arithmétique.
- Evaluer la capacité du candidat à établir des parallèles entre les stratégies des élèves et une stratégie plus experte (éclairée par un savoir non connu de l'élève ou implicitement utilisé par celui-ci) ; les savoir-faire mis en œuvre ouvrent une perspective sur ce que peut être l'activité mathématique de l'élève : une activité de recherche, une démarche de justification… ; les consignes sont « ouvertes », le contexte et l'énoncé ne sont pas porteurs d'indices informationnels sur le savoir en jeu.
- Evaluer la capacité du candidat à modéliser une situation, à conjecturer et à justifier ou prouver, à généraliser ; les savoirs sont des outils de modélisation, de résolution ; les procédures de résolution peuvent nécessiter des changements de cadres ; l'activité induit une nécessaire réflexion sur ce qu'est l'activité mathématique ; les questions peuvent

[3] CHEVALLARD Y. (1999), *L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique*, Recherches en didactique des mathématiques, Vol 19/2.

être « ouvertes » ou préciser la nature de la tâche à réaliser (démontrer, établir), il y a pluralité des contextes : les cadres sont variés.

(Les exemples de sujets illustrant cette classification seront proposés dans la partie II).

Cette classification effectuée sur l'ensemble des sujets apporte un éclairage supplémentaire sur le rapport institutionnel du candidat à l'arithmétique, dans le volet disciplinaire de l'épreuve : elle constitue la troisième partie.

Dans une dernière partie, j'essaie d'identifier les invariances et les évolutions dans les choix des concepteurs de sujets, de préciser ce qui peut distinguer l'arithmétique des autres champs d'étude, lui conférer un statut spécifique dans la formation de PE.

II. Typologie des tâches et techniques rencontrées

Sur l'ensemble des cinq domaines, je n'illustrerai que ceux qui me paraissent les plus significatifs, à savoir les domaines désignés sous les rubriques « Multiples, diviseurs, PGCD et PPCM », « Division euclidienne et congruences » et « Nombres premiers ».

Les listes proposées sont construites de la façon suivante : les tâches citées sont précédées par un numéro, les techniques utilisables pour effectuer ces tâches sont repérées par une puce. Sont relevées tout d'abord des tâches mettant en jeu des notions explicitement présentes dans la formulation de la consigne ou dans l'énoncé (aspect objet d'étude) ; en italique, sont ensuite proposées des tâches dans lesquelles le savoir en jeu est un outil de modélisation ou de résolution (le savoir n'est pas nommé, la tâche n'apparaît pas explicitement dans la consigne). Dans les deux premiers domaines, sont cités, en fin de liste, des « genres de tâches » (Résoudre), leur présence témoigne de leur fréquence sur l'ensemble des années et précise les limites du champ d'étude.

Dans chacun de ces trois domaines, nous essaierons de mettre en avant quelques éléments d'analyse et d'illustrer quelques difficultés.

Dans le domaine « Multiples, diviseurs, PGCD et PPCM », nous relevons :

1. Etablir qu'un entier a est divisible par un entier b :

En le décomposant sous la forme du produit de l'entier b par un entier à trouver :

dans un cadre numérique, en effectuant des divisions ;

dans un cadre algébrique, en utilisant une factorisation soit à partir d'une expression définissant a, soit à partir du codage littéral caractérisant a.

En utilisant des critères de divisibilité.

2. Etablir la divisibilité d'un nombre a par le produit de deux facteurs premiers entre eux :

En utilisant le fait que a est divisible à la fois par chacun des deux facteurs.

3. Enoncer les critères de divisibilité.
4. Déterminer un entier naturel a dont on sait qu'il est divisible par un entier b :

En appliquant les critères de divisibilité par 2, 3, 5, 9, 10, 25,...

En résolvant des équations déduites de la modélisation algébrique de la situation.

5. Déterminer la liste de tous les diviseurs d'un naturel :

En essayant successivement les naturels dans l'ordre croissant et en utilisant les critères de divisibilité ;

En construisant un arbre après avoir décomposé le nombre en produit de facteurs premiers.

6. Déterminer le nombre de diviseurs d'un naturel s'exprimant sous la forme $a^p \times b^q$:

En utilisant un arbre.

7. Calculer le PGCD de deux ou plusieurs entiers (explicitement demandé dans un seul sujet sur 5) :

En recherchant le plus petit diviseur commun dans les listes de leurs diviseurs respectifs ;
En effectuant le produit des facteurs, communs à leur décomposition en produit de facteurs premiers, affectés du plus petit exposant parmi les exposants présents.
8. Résoudre un problème sans recourir à une mise en équation :
En utilisant un schéma et un raisonnement conduisant à l'identification d' une grandeur inconnue dont un multiple peut être déterminé à l'aide d'un dénombrement et de calculs additifs et (ou) soustractifs ;
En modélisant la situation de façon à déterminer un PPCM, puis des multiples adéquats.

Les tâches portant sur les notions « objets d'étude » permettent d'évaluer la capacité du candidat à restituer des savoirs, à les appliquer dans un contexte arithmétique. Ces notions (multiples, diviseurs, divisibilité) relèvent de l'école élémentaire. Dans les techniques, on peut souligner, à côté de l'utilisation des propriétés arithmétiques (propriétés dont certaines sont connues des élèves de cycle 3), le rôle des modélisations et traitements algébriques (quand le nombre étudié le nécessite) et le statut un peu à part de l'objet « arbre ».

La tâche 1 est un assez bon exemple : nous trouvons cette tâche dans les énoncés qui suivent :
Les énoncés des exercices sont reproduits sous leur forme originelle. De façon à favoriser une meilleure compréhension, des questions préliminaires sont parfois présentes, les tâches étudiées sont en gras.
Exemple 1
*3)[...] **Justifier que 100 001 est un multiple de 11,** (Rouen 1997).*
La technique consiste à effectuer la division euclidienne, s'assurer que le reste est nul ou à utiliser le critère de divisibilité par 11.

Exemple 2
Décomposer 111 111 en produit de facteurs premiers.
En utilisant la décomposition obtenue, montrer que le nombre 888 888 est divisible par 37 ;
Décomposer 888 888 en produit de facteurs premiers. (Grenoble 1992).
La technique repose sur la reconnaissance, dans l'écriture, d'une décomposition sous forme de produit de facteurs de l'expression qui définit le multiple d'un entier.
Exemple 3
Un nombre A s'écrit avec 3 chiffres. En permutant ses chiffres des dizaines et des unités on obtient un nombre B. En permutant ses chiffres des dizaines et des centaines on obtient un nombre C. En permutant ses chiffres des centaines et des unités on obtient un nombre D.
Sachant que A-B = 18 et C-A = 360 :
Calculer D-A.
Montrer que A est multiple de 3.
Trouver A sachant qu'il est multiple de 9 (donner toutes les solutions). (Nancy- Metz 1993).
L'expression de A ayant été déterminée ainsi : A = 111c + 42, c'est la factorisation de l'expression algébrique qui permet d'effectuer la tâche ; le critère de divisibilité par 3 peut être aussi utilisé : A = cdu et c + d + u est multiple de 3 (on peut établir en effet que : d-u = 2, u-c = 2 ; d'où c + d + u = 3u).
Exemple 4
Soit n un nombre entier naturel écrit en base dix avec quatre chiffres différents, on pose n = mcdu.
On appelle n' le nombre entier naturel dont l'écriture en base dix est obtenue à partir de celle de n en permutant :
Le chiffre des unités de mille avec celui des unités ;
Le chiffre des centaines avec celui des dizaines.

Montrer que la différence entre n et n'est un multiple de 9 (prendre m > u).
Rappeler le caractère de divisibilité par 9 des entiers naturels.
Soit n = 7421, vérifier sur cet exemple la propriété trouvée à la première question.*(Toulouse 1993).*
C'est la même technique que la précédente, l'utilisation du critère de divisibilité par 9 est explicitement attendue.

Exemple 5
Dans cet exercice on ne considère que des entiers naturels.
Montrer que la somme de trois nombres consécutifs est un multiple de 3.
Soit N un nombre somme de quatre entiers consécutifs. Montrer que N-2 est multiple de 4.
Avec quelle condition sur N la réciproque est - elle vraie ?
La somme de 51 nombres entiers consécutifs est 1785, quels sont ces nombres ? (Indication : on rappelle que pour tout entier p, on a $1 + 2 + \ldots p = p(p+1)/2$ *) (Lyon 1997).*
La technique met en jeu modélisation algébrique et factorisation de l'expression obtenue, avant de nécessiter une référence à la définition d'un multiple.

S'il semble possible de décrire l'activité mathématique du candidat, en termes de savoirs et savoir-faire explicites, quand il effectue ce type de tâches, la situation diffère quand les tâches sont de type 7 ou de type 8 : comment rendre compte de la modélisation que le candidat doit réaliser et du parallèle qu'il peut établir entre son activité et celle de l'élève ?

Exemple 1
[...] 8.1 On considère les entiers 42, 21 et 14. Trouver leur plus grand commun diviseur (PGCD).
8.2. Montrer que si 7 est un diviseur commun aux deux naturels ab et bc, alors 7 divise également le nombre ca. En déduire que dans ce cas abbcca est divisible par 7.
8.3. Donner la liste de tous les nombres qui s'écrivent abbcca avec ab et bc divisibles par 7. Par quel entier plus grand que 50 sont-ils tous divisibles ? (Rouen 1997).
Exemple 2
Les dimensions d'une caisse à parois rectangulaires sont en cm : 150 ; 165 ; 105. On veut fabriquer des boîtes cubiques aussi grandes que possible dont l'arête est mesurée par un nombre entier de centimètres et avec lesquelles on se propose de remplir entièrement la caisse.
Calculer la mesure de l'arête des boîtes ainsi que le nombre de ces boîtes. (Paris1992).
Exemple 3
Un terrain triangulaire a pour dimensions 120, 96 et 72. Déterminer le nombre minimal de piquets nécessaires pour l'entourer, sachant qu'ils doivent être régulièrement espacés, d'un nombre entier de mètres et qu'il doit y avoir un piquet à chaque sommet du triangle. (Antilles - Guyane1995).
Si, en 1997, le sujet de Rouen demande explicitement de calculer le PGCD de 42, 21 et 14, les sujets de Paris (1992), Antilles - Guyane (1993 et 1995), Rouen 1(1998) nécessitent que le candidat modélise lui-même la situation (la situation présente d'ailleurs le même contexte en 1992, 1993, 1998) : il s'agit de déterminer les dimensions de boîtes parallélépipédiques permettant de remplir d'autres boîtes ou de savoir si des boîtes de dimensions données permettent ou non d'en « paver » d'autres. Les changements de cadres qu'induisent ces tâches (du cadre de la géométrie et de la mesure au cadre arithmétique) ne peuvent être évoqués sans tenir compte du contexte : comment exprimer les savoirs et savoir faire qui génèrent ces changements de cadres ?

Exemple 4

Trois émissions se partagent 180 minutes, la $1^{ière}$ dure 2 fois plus longtemps que la $3^{ième}$, qui elle dure 12 minutes de moins que la $2^{ième}$. Trouver la durée de chaque émission par un schéma, sans sortir du domaine de l'école primaire.
Donner une solution algébrique. (Antilles - Guyane 1996).

Liés aux tâches de type 8, les problèmes de partages inégaux conduisent aussi le candidat à faire un pas de côté pour abandonner son mode de pensée algébrique et adopter une procédure arithmétique utilisable par les élèves de l'école élémentaire.

Existent encore des problèmes où des procédures arithmétiques peuvent avantageusement se substituer aux procédures algébriques.

Exemple 5

35 personnes paient 756 F de plus qu'un groupe de 13 personnes : quel est le prix du menu ? (Amiens 1994).

Ou encore des problèmes conduisant à la détermination de PPCM :

Exemple 6

Placés par tablées de 6, 8 ou 10, il reste toujours un convive isolé : déterminer le nombre de convives, sachant qu'il est inférieur à 100 ? (Paris 1993), les chocolats de Charlie (Nancy-Metz 1994).

L'ensemble des sujets qui comportent ce type de tâches semble évaluer la capacité du candidat à maîtriser à un niveau plus expert, des notions enseignées à l'école élémentaire et à faire le lien entre procédure élève et procédure plus élaborée.

Dans l'environnement technologico-théorique relatif à ce domaine, voici quelques uns des éléments qui peuvent sembler en constituer les « fondements ». Je fais le choix de relever, comme éléments caractéristiques à ce domaine, des savoirs qui constituent à la fois des objets d'étude et des outils de résolution.

Ces éléments qui rendent intelligibles, justifient et produisent les techniques utilisées sont les suivants : les définitions du multiple et du diviseur d'un entier naturel, les critères de divisibilité d'un entier par 2, 3, 5, 9, 11, 25 et par les puissances de 10, la transitivité de la relation « est diviseur de » (i.e. : Si a divise b et si b divise c alors a divise c.). D'autres éléments interviennent : outils dans les techniques mises en œuvre, ils seront cités dans le domaine qui leur est plus spécifique.

Dans le domaine « Division euclidienne, congruences », nous relevons les tâches (numérotées) et les techniques possibles (précédées d'une puce) ci-dessous :

Une expression numérique ou algébrique de type : $D = d \times q + r$ étant donnée :

Déterminer le quotient et le reste dans la division euclidienne de D par d ;

Déterminer le couple (dividende, diviseur), quotient et reste étant connus, le dividende étant majoré ;

Déterminer le dividende, le quotient et le reste étant connus, le dividende est majoré ;

Déterminer le dividende, sachant que reste et quotient sont égaux, le diviseur est connu :

En utilisant les relations qui définissent la division euclidienne : $D = d \times q + r$ et $r < d$.

Compléter une division posée à « trous » :

En utilisant la technique opératoire de la division euclidienne ou en utilisant la liste des multiples du diviseur.

Déterminer les restes dans une division de diviseur connu d'une suite d'entiers consécutifs, de carrés de nombres entiers consécutifs, de multiples consécutifs d'un entier donné, des puissances successives d'un naturel. Etablir une conjecture et l'utiliser pour une généralisation :

En repérant des régularités (par exemple, la périodicité) et en modélisant la situation à l'aide d'une division euclidienne dont le reste donne « sens » à la périodicité observée.
Donner l'écriture chiffrée dans une base n (n distinct de 10) d'un entier N exprimé par son écriture chiffrée en base 10 :
En utilisant la division euclidienne et le principe de numération.
Déterminer un nombre obtenu en comptant ou en décomptant de n en n, à partir d'un entier donné ; dire si un entier peut être atteint en comptant ou en décomptant de n en n :
En utilisant la division euclidienne pour déterminer suivant les cas, le dividende, le reste, le quotient. (Il s'agit de déterminer l'un des termes d'une suite arithmétique, de rang connu ou inversement).
Déterminer le terme correspondant à un rang donné dans une suite périodique modélisant un phénomène observable :
En effectuant la division euclidienne du « rang » par le nombre correspondant à la longueur de la période et en établissant une relation entre les restes obtenus et les rangs.
Résoudre dans N une équation du premier degré à deux inconnues :
En utilisant une méthode de recherche « simple, claire et systématique ».
Il semble pertinent de penser que les deux premières tâches proposées (tâches 1 et 2) ont pour objectif de vérifier que le candidat maîtrise une notion qu'il aura à enseigner, à savoir la division euclidienne. Dans les tâches qui suivent, certaines s'apparentent aux tâches prescrites aux élèves (par exemple tâche 5) pour introduire la division euclidienne, en début d'apprentissage, comme outil de résolution ou mettent en jeu la division euclidienne comme outil de modélisation (tâches 3 et 6), puis de résolution. Ces tâches, proposées dans un premier temps à un niveau élémentaire, conduisent ensuite à des conjectures, des généralisations, des démonstrations.

Voici quelques exemples. Dans le type de tâche 1, on trouve (notamment les premières années de cette étude) des énoncés du type suivant :
Exemple 1
Dans l'ensemble de l'exercice, on considère les nombres entiers naturels D et q tels que :
$D < 4500$ *et* $q = 82$.
La division euclidienne du nombre D par le nombre d fournit le quotient $q = 82$ *et le reste* $r = 45$. *Recherche, en justifiant la réponse, l'ensemble des couples (D,d) qui répondent à la question.*
Même question avec $r = 112$.
Discuter suivant la valeur du reste, l'existence de solutions. (Créteil 1992).
Objet d'étude, la division euclidienne permet au candidat de révéler sa maîtrise des relations entre dividende, quotient, diviseur et reste, sa connaissance de la propriété du reste ; les contraintes de la situation permettent aussi d'appréhender sa capacité à élaborer une justification ou une recherche exhaustive des solutions.
Pour illustrer le type de tâche 3, je relève :
Exemple 2
Dans la division par 5, un nombre A donne un reste de 3.
On multiplie A par 14 ; quel est le reste, dans la division par 5, du nombre ainsi obtenu ?
On multiplie A par un entier m supérieur à 1. Donner un procédé permettant de calculer le reste, dans la division par 5, du nombre ainsi obtenu. Appliquer ce procédé aux cas où $m = 328$ *puis* $m = 5^{36} + 2$.
On désigne par Am le produit de A par m.

Compléter le tableau suivant :

Dividende		*A*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*	*0A*	*1A*	*2A*	*3A*
Reste dans la division par 5													

D'une manière générale, connaissant le reste de la division par 5 de Am, quel sera le reste de A (m+1), dans la division par 5 ?
Comment prévoir, en fonction de m, le reste de Am, dans la division par 5 ?(Nantes 1992).
Le reste de la division est explicitement objet d'étude, l'étude de cas particuliers, conduit à la généralisation et la démonstration nécessite une procédure algébrique s'appuyant sur le rôle du reste. La notion de congruence est sous jacente. L'absence de cette notion, comme outil de résolution ainsi que celle du raisonnement par récurrence, comme méthode de preuve, conduisent à des tâches nécessitant une procédure de résolution fondée sur l'observation, l'identification de régularités et un raisonnement arithmétique s'exprimant dans un langage naturel.

La tâche de type 5 s'apparente tout d'abord à une tâche élève.

Exemple 3
On décompte de 3 en 3 à partir de 50 tant qu'on obtienne un entier naturel : « 50, 47, 44, 41,... ».
Quel nombre termine cette suite ?
On décompte toujours de 3 en 3 tant qu'on obtienne un entier naturel, mais à partir de 8932 : « 8932, 8929, 8926,... ».
Quel nombre termine cette suite ?
Combien comporte t-elle de termes ?
Quel est le centième terme ? (Lille 1994).
Exemple 4
[...]De façon générale, si a < b, donner un procédé général et rapide permettant de dire s'il est possible d'atteindre b en partant de a en comptant de 23 en 23 ; donner le plus petit entier naturel à partir duquel en comptant de 23 en 23, on peut atteindre 31600.(Nantes 1996).
S'inspirant de situations d'apprentissage proposées par des manuels (par exemple Objectif Calcul CM1 Hatier 87) pour introduire la technique de la division euclidienne, ces sujets suggèrent indiscutablement les liens entre l'activité de l'élève et la capacité du maître à maîtriser la notion en jeu, à lui donner sens comme outil de modélisation et de résolution (explicitement dans le sujet de Nantes 1996). La modélisation et le traitement arithmétique ou algébrique sont en général nécessaires pour « aller au bout » d'une tâche de type 5.
Les tâches de type 7 (résolution de problèmes) requièrent plus spécifiquement une aptitude à mettre en œuvre des procédures de recherche méthodiques organisées, procédures qui seront à développer chez les élèves.
Exemple 5
Le directeur d'un centre aéré dispose de 1090 F. Sachant qu'il doit utiliser intégralement cette somme d'argent et qu'il peut acheter des ballons à 40 F l'un et des cordes à sauter à 15F l'une, donner en justifiant un exemple de choix possibles, tous les choix possibles en présentant clairement la méthode. (Rouen 1995).
La procédure de résolution attendue, ne pouvant relever d'une technique relative aux congruences, nécessite pour s'avérer efficace d'utiliser des propriétés arithmétiques (recherche du PPCM et du PGCD de 15 et 40). Si dans ce cas précis, les variables numériques

jouent un rôle déterminant dans la complexité de la procédure, le contexte reste évocateur d'un problème scolaire.
Coexistent donc, dans ce domaine, des tâches très diverses. La plupart des sujets qui comportent ces tâches vont amener le candidat à une réflexion, soit sur la pluralité des démarches de résolution en fonction des outils disponibles (pour l'élève, pour le maître), soit sur la démarche de preuve, de généralisation. Soulignons à ce sujet, le rôle important que joue l'outil algébrique dans de nombreuses procédures de résolution : l'absence de la notion de congruence nécessite la modélisation algébrique de la situation.

Les éléments technologico-théoriques qui vont s'adjoindre à ceux précédemment cités sont, pour une part, des éléments disponibles (ce sont des objets de savoir identifiés, reconnus). Je relève tout d'abord la définition de la division euclidienne. Cet objet de savoir est objet d'étude mais aussi l'outil qui permet de donner existence à un élément tel que le principe de numération (principe souvent sollicité que ce soit dans l'un ou l'autre des domaines présentés). Le second élément disponible est le principe de numération : il rend intelligible le système décimal, permet l'étude des propriétés des nombres. Sont d'autre part implicitement convoqués mais non disponibles, la notion de congruence, la compatibilité de la relation « est congru à » avec l'addition et la multiplication dans Z. De même, la notion de suite numérique (arithmétique notamment), le raisonnement par récurrence apparaissent comme des objets « évanescents ». La fonction que ces notions pourraient assurer (justification de propriété, par exemple des critères de divisibilité, généralisation de propriétés à des entiers dont le nombre de chiffres n'est pas limité,...) n'existe pas ; une certaine dimension de l'arithmétique (dimension où les nombres ne sont pas nécessairement de « taille » définie, où l'outil algébrique montre ses limites) est occultée.

Dans le domaine « Nombres premiers »
Décomposer un entier naturel en produit de facteurs premiers :
En utilisant les critères de divisibilité par les entiers premiers (si possible), on obtient un diviseur et son quotient associé : tant que le quotient associé n'est pas premier, le processus est à réitérer. La décomposition s'exprime comme le produit de tous les diviseurs premiers identifiés.
En déterminant les diviseurs premiers de façon méthodique, en testant dans l'ordre croissant les diviseurs premiers et en réitérant la méthode sur le quotient associé à un diviseur identifié ; la procédure est ensuite analogue au processus précédent.
Dire si un nombre est premier :
En vérifiant que tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à la partie entière de sa racine carrée ne sont pas diviseurs du nombre.
Exprimer un rationnel sous la forme d'un quotient de deux entiers premiers entre eux *(sous forme irréductible) :*
En simplifiant une écriture fractionnaire (si le rationnel est exprimé sous cette forme) *i.e.* en déterminant d le PGCD du numérateur a et du dénominateur b ; ainsi a = da' et b = db' et le quotient cherché est le quotient de a' par b'.
En transformant une écriture chiffrée par une procédure permettant d'éliminer les parties décimales, en une écriture fractionnaire et en appliquant le procédé précédent.
Peut-être un peu brièvement, ce domaine (peu représenté) se caractérise par sa « technicité » : les exercices qui relèvent de ce domaine, semblent posés pour évaluer l'aptitude du candidat à restituer des techniques, les appliquer de façon systématique, sans référence à quelque activité réflexive sur la finalité de la tâche.

Exemples
Décomposer 111111, puis 888888 en produit de facteurs premiers (Grenoble 1992).
Dire si l'affirmation est vraie : Tous les nombres premiers sont impairs (Rouen 1996).
Simplifier les fractions 1001/100 001 et 2 500 025/825 (Rouen 1997).
Ces énoncés caractérisent les activités tournant autour de ce thème (le savoir en jeu est objet et outil d'étude). Il s'agit pour le candidat de connaître la définition d'un nombre premier, les premiers nombres premiers, de connaître quelques techniques dans lesquelles ils interviennent (pour simplifier des fractions, voire justifier d'une divisibilité).

Les objets théoriques que doit connaître le candidat sont les suivants : les définitions d'un nombre premier et de deux nombres premiers entre eux, la propriété d'existence et d'unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers de tout naturel non premier. L'environnement technologico-théorique comprend donc des objets qui n'ont pas de rapports directs avec les objets de savoir et les techniques enseignées à l'école élémentaire. Il existe une composante théorique dans « l'arithmétique du professeur d'école » qui révèle un besoin institutionnel de ne pas confondre activité arithmétique et activité « pratique ». Les savoirs en jeu n'apparaissent pas comme immédiatement utilisables dans la pratique professionnelle du professeur des écoles, la formation semble prendre en compte une culture arithmétique où les propriétés des nombres constituent la composante théorique.

Sur l'ensemble des savoirs disponibles, en conclusion on peut noter que sont toutefois essentiellement représentées des notions très liées avec les contenus de l'école primaire : le candidat doit révéler son aptitude à appréhender avec recul des notions qu'il aura à introduire, auxquelles il devra donner sens dans sa pratique future.

III. Classification des sujets

Me référant aux diverses « fonctions » de l'arithmétique définies dans l'introduction et décelables, me semble t-il, dans la nature des compétences sollicitées, je distingue trois, voire quatre types de sujets :
Les sujets mettant en œuvre des techniques élémentaires (cycle 3 ou 5$^{\text{ième}}$) pour réaliser des tâches relevant de notions liées à l'école élémentaire ou non nécessairement liées étroitement à cette dernière mais relevant d'une application directe de techniques usuelles ; plus simplement, ils peuvent être caractérisés comme des sujets dont l'objectif est d'évaluer des « compétences de base ».
Les sujets portant sur des notions élémentaires, contextualisés et pour lesquels les procédures de résolution envisageables permettent de prendre en compte l'activité mathématique de l'élève en situation de recherche.

Des sujets traitant de notions non nécessairement élémentaires et devant évaluer l'aptitude du candidat à conjecturer, généraliser, justifier ou démontrer, à modéliser, à valider sa procédure, à réfléchir sur le sens de sa démarche.
Un quatrième type de sujets pour lesquels il me semble que peuvent être appliqués les deux derniers critères.

Quelques exemples significatifs viennent d'être précisés dans la typologie des tâches.
Voici donc une répartition des sujets par année en fonction de ce classement :

Années	rapport nombre sujets arithmétiques sur nombre total	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4
1992	15/25	2	3	7	3
1993	18/28	6	6	5	1
1994	19/28	5	7	2	5
1995	12/26	4	3	4	1
1996	15/26	4	5	6	0
1997	9/21	1	2	6	0
1998	15/21	4	5	5	1

L'interprétation de ces résultats semble fort délicate : je ne peux éliminer une part d'*a priori* dans le choix des éléments qui m'ont conduit à cette répartition. Je ne peux occulter ma méconnaissance des politiques de formation internes aux centres IUFM et ne pas prendre en compte les conjonctures ponctuelles qui ont joué sur les critères de recrutement.
Il me semble toutefois pertinent de souligner que chaque année, séparément, les trois premiers types de sujets sont représentés.
Certains sujets évaluent des compétences que nous pouvons qualifier de « compétences de base » (au sens des évaluations nationales). Par compétences de bases, j'entends des techniques telles que l'identification de la nature de nombres à partir de leur « désignation canonique », l'effectuation d'opérations dans D ou Q, la comparaison des nombres, l'identification de bases, l'application de techniques relatives à la divisibilité... Le savoir en jeu est objet explicite de l'étude.
Je note aussi une certaine régularité dans la fréquence des sujets de type 2. Ce sont des problèmes relevant d'équations diophantiennes du premier degré à deux inconnues dans N ou pouvant induire des résolutions de type arithmétique. Ce sont encore les problèmes nécessitant une modélisation arithmétique (recherche de diviseurs communs, utilisation de la division euclidienne, par exemple). Ces sujets mettent en avant l'aspect outil de résolution de l'arithmétique.
Le nombre de sujets de type 3 est majoritaire cinq années sur huit : l'arithmétique intervient dans les tâches prescrites comme outil de modélisation, de généralisation ou de preuve dans des situations portant, soit sur l'étude d'un objet arithmétique (critère de divisibilité, Nantes 1994), principe de numération, soit sur une notion relative à un autre cadre (commensurabilité de grandeurs, Clermont- Ferrand 1995)...

Peu de sujets rentrent dans la dernière catégorie. Parmi ceux qui parviennent à articuler des tâches spécifiques au cycle 3 et des tâches nécessitant modélisation ou preuve, je relève les types de problèmes suivants : les problèmes traitant de techniques opératoires (technique de multiplication à la Russe, Bordeaux 1994), les problèmes relevant de mise en équations nécessitant une recherche exhaustive dans le cadre numérique et une modélisation dans un cadre algébrique, voire graphique. La notion arithmétique est tantôt l'enjeu de l'étude, tantôt un outil mis en parallèle avec des outils de cadres différents.

IV. Conclusion

IV .1. Place accordée au domaine de l'arithmétique et évolution dans les choix des concepteurs

Pour répondre aux questions concernant l'importance relative du champ de l'arithmétique et les possibles évolutions dans les choix des concepteurs de sujets, les résultats observés sur l'ensemble des années et des académies sont mis en parallèle. Sont donc relevés la fréquence des sujets portant sur l'arithmétique au cours des années passées, et le nombre de sujets par année, octroyant à la composante arithmétique un barème compris entre 3 et 8 points. Ce barème[4] nous permet d'estimer le rôle non négligeable de cette composante dans le volet disciplinaire du concours :

Années	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Nombre de sujets traitant d'arithmétique	15	18	19	11	15	9	15
Nombre total de sujets disponibles	25	28	28	26	26	21	21
Barème compris entre 3 et 8 points	9	16	14	6	9	7	10

On peut constater une assez grande variabilité. La chute brutale observée en 1995 peut en partie s'expliquer par la restructuration du volet disciplinaire, elle coincïde avec l'augmentation notable de la composante « géométrie et mesure ». L'influence considérable de la démonstration hypothético-déductive que pressentait M.L. Peltier dans sa thèse se trouve avérée. Ce phénomène épisodique semble s'être renouvelé en 1997, la diminution des sujets consécutifs aux regroupements de plusieurs académies conforte la prédominance des domaines relatifs à la géométrie, aux fonctions et à la proportionnalité. En 1998 la tendance se modifie : les activités concernant le « nombre » retrouvent un certain « poids ».
Chaque année, sauf en 1995 et 1997, plus de la moitié des sujets comporte une partie traitant d'arithmétique. Chaque année encore, sauf en 1995, la fréquence des sujets accordant entre trois et huit points à la partie arithmétique du volet disciplinaire oscille entre un tiers et un peu plus d'un demi.

Les thèmes abordés (invariance et évolution)

Le tableau ci-après permet un éclairage sur la représentativité des cinq thèmes au cours des années. Il permet de préciser que les tâches relevées précédemment ne sont pas nécessairement des tâches fréquemment demandées.

[4] le barème, quand il n'est pas donné, est évalué en tenant compte d'indications données par M.L. Peltier et à l'aide d'une péréquation personnelle.

Dans la colonne (*), nous donnons le rapport « *nombre de sujets arithmétiques / nombre total des sujets* ».

Années	(*)	Multiples, diviseurs, PGCD, PPCM	Division euclidienne, congruence	Nombres premiers	Numération, bases	Entiers, décimaux, rationnels
1992	15/25	8	7	1	4	2
1993	18/28	6	7	2	6	4
1994	19/27	9	11	0	3	4
1995	12/26	5	5	0	2	4
1996	15/26	8	5	3	5	4
1997	9/21	5	2	2	5	3
1998	15/21	7	3	0	3	6

Des domaines (dans l'absolu) sont abordés avec une certaine constance. Par exemple, les tâches mettant en jeu les notions de multiples, diviseurs, PGCD sont assez présentes ; ces tâches constituent sur l'ensemble le domaine dominant. Parfois objet d'étude, mais aussi outil pour résoudre des problèmes (dans des contextes familiers aux élèves), ces notions vivent de façon ostensible dans les programmes de l'école primaire. Inversement les tâches relatives à la notion de nombres premiers restent peu fréquentes ; il est possible de penser que, ne pouvant constituer qu'un objet d'étude en lui-même, peu en rapport avec les contenus de l'école primaire, cette notion reste marginale (certes, elle intervient implicitement comme outil dans le domaine de la simplification des fractions, mais ceci reste sans rapport avec l'école ; la simplification des fractions n'est pas traitée à l'école élémentaire).

Le nombre des sujets portant sur la division euclidienne (objet d'étude et outil de modélisation), après avoir connu une progression sur les trois premières années, subit une baisse certaine. Peut-être, faut-il considérer que l'ensemble des tâches envisageables (en fonction des techniques dont dispose l'ensemble des étudiants) ayant été circonscrit, la nécessité de « trouver du nouveau » entraîne les concepteurs de sujets à délaisser ce domaine pour un temps.
Minoritaires, par rapport aux deux premiers domaines jusqu'en 1996, les tâches relatives aux numérations et aux nombres retrouvent une importance équivalente à ceux-ci en 1997 et en 1998. Je note (ceci se dessinait dès l'année 1996) une tendance à proposer au candidat une étude sur la nature, les propriétés des nombres et sur les écritures chiffrées qui peuvent leur être associées, sans rester exclusivement dans l'ensemble des entiers naturels.

Si globalement nous pouvons admettre que les notions de multiples et de diviseurs constituent les notions de référence au cours des sept années écoulées, que des notions semblent s'effacer pour un temps, nous pouvons aussi conjecturer que les activités relatives à la nature et à la désignation des nombres (non entiers en particulier) semblent prendre place dans l'édifice des savoirs évalués : les difficultés rencontrées par les élèves de cycle 3 dans le domaine des décimaux (difficultés relevées dans les évaluations nationales de 6ème) ne sont peut-être pas étrangères à cet état de fait.

IV . 2 . La spécificité de l'activité arithmétique pour un PE en première année de formation.

Quelques caractéristiques de l'arithmétique qui pourrait être celle du professeur d'école :
Les notions arithmétiques peuvent intervenir comme outils de modélisation du réel et de résolution de problèmes, comme outils pour comprendre d'autres savoirs arithmétiques (par exemple, la division euclidienne rend intelligible le principe de numération), comme objet de conjecture (propriété) nécessitant la mise en œuvre d'une démarche de preuve. Cette démarche de preuve peut consister en une recherche méthodique et exhaustive des cas envisageables ; elle peut accessoirement passer par un traitement algébrique. Cette démarche de preuve peut encore, la conjecture ayant été élaborée à partir de l'étude de cas particuliers, mettre en œuvre une ébauche de raisonnement par récurrence (la justification est la description en langage naturel de l'expérimentation). Dans ce dernier cas, une procédure plus experte sous tendrait l'utilisation d'un raisonnement par récurrence et fort souvent les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition et la multiplication dans Z.
Ces éléments théoriques sont absents, mais il n'en reste pas moins qu'une réflexion sur le statut de la modélisation et de la preuve est suscitée.

Il faut encore prendre en compte la spécificité de nombreux énoncés qui sont accessibles à des élèves de cycle 3, comme certaines des procédures de résolution qu'ils induisent. L'activité mathématique peut être perçue comme une activité moins « cloisonnée » entre celle de l'expert, celle de l'élève et celle du maître.
Enfin, il peut sembler que dans la « forteresse de la preuve », tenue presque totalement par la démonstration hypothético–déductive dans les domaines de la géométrie et de la mesure, s'ouvre une brèche pour un type de raisonnement, de preuve fondée sur « l'enjeu de vérité, la conjecture et la modélisation »[5]. Citons par exemple « l'existence des critères de divisibilité, le principe de numération décimale ». L'enjeu existe, il faut comprendre une propriété ou le fonctionnement d'un algorithme. La conjecture n'est pas donnée d'emblée (ça se voit sur le dessin ou c'est demandé dans l'énoncé, comme souvent en géométrie), elle s'élabore à partir d'une étude de cas nécessitant calcul numérique et recherche méthodique. Enfin, une modélisation arithmétique ou algébrique peut conduire à l'explication, à la preuve.
Il apparaît que l'intérêt de ces activités réside essentiellement dans le rapport qu'elles peuvent entretenir avec l'activité de recherche de l'élève et dans l'éclairage différent qu'elles portent sur la preuve. La démarche de preuve, en arithmétique, trouve en partie sa spécificité dans ses différences avec la démonstration en géométrie euclidienne. La conjecture n'est plus élaborée de *visu* ou explicitement donnée dans l'énoncé. La réalisation d'une démonstration constituée d'un enchaînement de pas de raisonnement utilisant des résultats de cours, structurée et rédigée suivant des normes (normes dont il est difficile d'ignorer qu'elles n'ont pas favorisé l'épanouissement de nos étudiants dans le domaine mathématique) n'est pas « la » finalité de l'activité, c'est la recherche (non nécessairement triviale), les résultats et leur justification qui constituent l'enjeu de l'activité. Il ne semble donc pas absurde de supposer que les activités arithmétiques, jouant de leur « nouveauté », (non familières aux étudiants, elles viennent d'être réintroduites dans le second degré), favorisant la compréhension de notions et techniques travaillées à l'école primaire, contribuent de façon fondamentale à l'édifice des savoirs que doit construire le futur professeur d'école.
Par ailleurs, les limites qu'imposent parfois certaines méthodes de résolution algébrique peut nous interroger sur l'absence de notions telles que les congruences, de démarches de preuve

[5] GRENIER D. (1999), Les mathématiques discrètes : objets et démarche, *Recherches en didactique des mathématiques, vol 18/2.*

telles que le raisonnement par récurrence. Si l'une des finalités de la formation initiale est de susciter, chez les étudiants, une véritable réflexion sur ce qu'est l'activité mathématique, ne s'agirait-il pas de redistribuer, plus équitablement, les rôles entre démonstration hypothético-déductive en géométrie et raisonnements arithmétiques ?

BIBLIOGRAPHIE

ASSUDE T. (1999), Evolution de l'enseignement de l'arithmétique et formation des maîtres, Actes de la COPIRELEM, IUFM de Versailles et DIDIREM. (14 p).

CHEVALLARD Y. (1985), La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné, Grenoble, La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. Recherche en didactique des mathématiques, vol 12/1 pp 73-112, La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y. (1995), Familière et problématique, la figure du professeur. Recherches en didactique des mathématiques, vol 18/1 pp 17 - 54, La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique , Recherches en didactique des mathématiques, vol 19/2 pp 221-266, La Pensée Sauvage.

GALISSON M.P. (1999), Un éclairage sur le rapport institutionnel à l'arithmétique, à travers l'analyse des sujets du CERPE, DEA de Didactique des disciplines. Paris VII.

GRENIER D. (1999), Les mathématiques discrètes : objets et démarches, Recherches en didactique des mathématiques, vol 18/2 pp 61-100, La Pensée Sauvage.

PELTIER M.L. (1995), La formation initiale, en mathématiques, des professeurs d'école : « entre conjoncture et éternité », Thèse de doctorat, Université Paris VII.

Annales et corrigés du CERPE (Années 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98) COPIRELEM, IREM de Bordeaux.